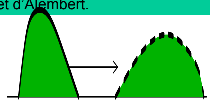
Gaspard Monge

•Naissance à Beaune en mai 1746; son père est un commerçant.
•1764: Dessine un plan de Beaune qui attire l'attention des professeurs de l'Ecole du Génie Royal de Mézières, école qui formait des ingénieurs militaires. Monge y est admis, mais, n'étant pas noble, il ne peut accéder au grade d'officier. Y devient répétiteur (1765), professeur de mathématiques (1768), de physique (1771). Développe de nouvelles méthodes graphiques et constructives pour les fortifications, « géométrie descriptive ». Travaille sur la théorie des surfaces et des courbes à double courbure, sur des problèmes mathématiques liés à l'eau et à l'électricité. Premières publications. Contacts avec Condorcet et d'Alembert.



•1780: Donne des cours d'hydrodynamique à Paris. Membre de l'Académie des sciences.
•1783: Examinateur pour les cadets de la Marine. Abandonne sa position à Mézières en 1784. Nombreux articles sur les équations aux dérivées partielles, la géométrie, la météorologie, la réfraction, la capillarité, la composition du fer, etc.…
•1788: Publie un Traité élémentaire de statique.
•1789: accueille avec enthousiasme la Révolution.
• 1792-3: Membre du Comité exécutif provisoire, Ministre de la Marine et des colonies
•1793: S'occupe des poudres et de la fabrication des canons et de l'acier pour la défense de la République, « levée en masse ».
1794: Fondation de l'Ecole centrale des Travaux Publics, bientôt Ecole polytechnique, dont il a soutenu le projet. Monge est l'un des premiers professeurs.
•1795: Publication de Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie.
•1796/7: Voyage en Italie pour estimer et envoyer en France des oeuvres d'art, sur recommandation de Napoléon Bonaparte avec qui il se lie d'amitié et qui lui conférera de nombreux honneurs. Devient directeur de l'Ecole polytechnique.
•1798/9: Participe à l'expédition d'Egypte. Fonde l'Institut d'Egypte au Caire.
• 1798: Géométrie descriptive. Contient de nombreuses applications destinées aux ingénieurs.
• 1799 Monge est nommé sénateur, puis Comte de Péluse par Napoléon.
•1807-9: Publication en deux volumes de son Application de l'analyse à la géométrie des surfaces du 1er et du 2e degrés.
•1816: Avec la Restauration, Monge est chassé de ses fonctions et privé de ses honneurs. Meurt appauvri en juillet 1818 à Paris.

GASPARD MONGE

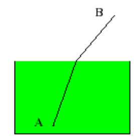
Quel est le plus court chemin entre les points A et B ?

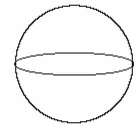
Trouver le chemin le plus court entre deux points est une tâche qui occupe beaucoup de mathématiciens.

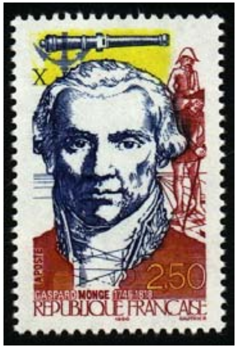
En **optique** Pierre Fermat (1601-1665) postule que la lumière va moins vite dans l'eau (ou tout autre milieu réfringent) que dans l'air et propose le principe selon lequel tout rayon lumineux suit le chemin de temps minimal. La figure ci-contre montre la réfraction d'un rayon lumineux.

Il retrouve ainsi les lois correctes de la **réfraction** énoncées par W. Snell (souvent attribuée à R. Descartes en France). Il y a 2000 ans, Hénon d'Alexandrie avait déjà trouvé un principe analogue pour retrouver les lois de la **réflexion**. La figure ci-contre montre la réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir plan.

En géométrie différentielle les plus courts chemins entre deux points sont des morceaux de **géodésique** : par exemple sur une sphère ronde, ce sont les grands cercles.



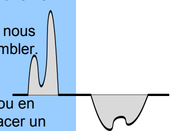




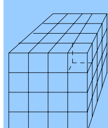
Le Problème de MONGE-KANTOROVICH

Gaspard Monge imagine un problème qui consiste à trouver le chemin le plus court entre plusieurs points.
Comment ? Imaginons que, sur une surface bien plate, nous ayons un tas de sable et, un peu plus loin, un trou à combler. Supposons en plus que le volume du tas de sable est exactement égal à celui du trou.
Nous voulons transporter tout le sable du tas dans le trou en faisant le minimum d'effort. Une variante serait de déplacer un tas de sable d'un endroit à un autre.
L'attitude de tout mathématicien est alors de formuler ce problème sous une forme idéale, plus facile à manipuler à l'aide d'outils mathématiques. Tout d'abord il faut définir ce qu'on entend par « minimum d'effort » : nous conviendrons que l'effort pour transporter un grain de sable est égal au produit de la distance qu'on lui fait parcourir par sa masse. S'il y a ***N*** grains de sables (***N*** est très grand), l'effort total est la somme de ***N*** petits efforts.
Mathématiquement cela conduit à la formule suivante : nous numérotons les grains de sable de 1 à ***N*** et nous appelons d_i la distance parcourue par le grain de sable numéro *i* et m_i sa masse. Alors l'effort total est

$$E = \sum_{i=1}^{i=N} m_i d_i$$



Il existe une autre façon de calculer cette quantité : cette fois-ci ce sont les points de l'espace que l'on numérote. On divise l'espace en petites boîtes (comme de minuscules cubes empilés) et l'on repère chaque boîte par sa position ***x*** dans l'espace.



On suppose que le contenu de chaque boîte (située en ***x***) est, dans une bonne approximation, totalement expédié dans une boîte, située en un point ***y***, lors du transport. Si on note ***m(x)*** la masse de la quantité de sable contenue dans la boîte ***x***, alors l'effort réalisé pour transporter le contenu de cette boîte est ***m(x).distance(x; y)*** et l'effort total est

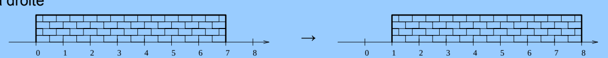
$$E = \sum_x m(x).\text{distance}(x,y)$$

Il est commode de remplacer cette somme par sa limite lorsque la taille des boîtes devient infiniment petite. On note cette limite par l'intégrale

$$E = \int m(x).\text{distance}(x,y)dx$$

Puisque chaque point ***y*** est image d'un point ***x*** par le transport, l'usage est de noter ***y = f(x)*** : le transport est alors décrit par une *fonction* ***f***, qui associe à chaque point ***x*** son image ***f(x)***.

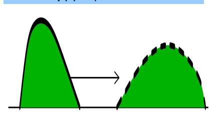
Un exemple : « déplacer horizontalement un mur de briques ». On veut déplacer un mur de briques de 1 mètre vers la droite

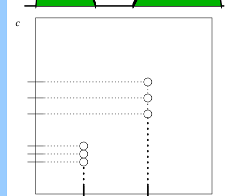


Une solution consiste à déplacer chaque brique du mur de 1 mètre vers la droite. Cette solution est décrite en terme de fonction en écrivant que pour tout point ***x*** représentant la position initiale d'une brique sa position finale est ***y = f(x) = x+1***. Cette solution minimise l'effort que nous avons défini.

A votre avis existe-il d'autres façon de déplacer les briques du mur qui rendent aussi l'effort minimal ?

la densité **p(x)** de production d'électricité





Un plan de transport

Optimiser un réseau de distribution

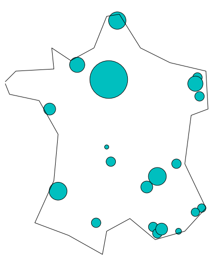
En fait ce type de problème se retrouve dans une très grande variété de situations. Par exemple, on cherche à optimiser un réseau de distribution d'électricité (ou d'eau...) : comment acheminer l'énergie depuis les centrales électriques jusqu'aux lieux de consommation avec le minimum de lignes électriques ?

Pour modéliser ce problème, on peut représenter la production d'énergie par une densité **p(x)** définie en chaque point **x** du territoire du pays : **p(x)** sera nulle là où il n'y a pas de production d'énergie (c'est à dire presque partout) et sera très grand là où se trouve une centrale (**p(x)** est l'analogue de la densité de masse **m(x)** pour le problème précédent).

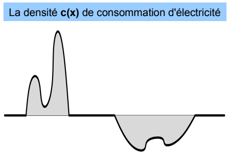
Nous pouvons aussi représenter la consommation par une autre densité **c(x)**, elle aussi définie en chaque point **x** du territoire **T**. Contrairement à la densité de production, la densité de consommation est très diffuse : elle est relativement faible partout (dans chaque maison), mais est étalée sur pratiquement tout le territoire.

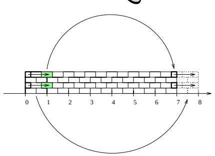
Une façon d'idéaliser cette situation est de dire que **p(x)** est une ***mesure***, tandis que **c(x)** est une fonction. Le problème est que le transport optimal ne peut plus se représenter par une fonction ***f*** (de **T** dans **T**), car l'énergie produite par une centrale est répartie dans des centaines de foyers. Le bon concept, introduit par **Leonid V. Kantorovich** (1912-1986, prix Nobel d'économie en 1975), est celui de ***plan de transport*** (il s'agit d'une mesure sur le produit cartésien **TxT** dont la projection sur le premier facteur est **p** et la projection sur le deuxième facteur est **c**).

Aujourd'hui le problème de **Monge--Kantorovich** est encore l'objet de recherches actives, avec des applications à l'optimisation de formes, de circuits électriques, etc.



La densité **c(x)** de consommation d'électricité





Une solution possible différente de la translation