GRAPHES ET LABYRINTHES : DE CHARTRES A KÖNIGSBERG

Les labyrinthes ont mauvaise réputation.

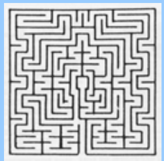
Qui n'a rêvé de se promener, de se perdre dans un labyrinthe ?
Le premier labyrinthe aurait été construit par Dédale, en Crète, pour le roi mythique Minos. Dédale se serait inspiré des tombeaux égyptiens aux plans si complexes que les pillards y restaient piégés. Dédale, emprisonné dans son propre ouvrage avec son fils Icare, ressortit en trichant un peu, à l'aide d'ailes de sa confection.

Une méthode qui mérite un peu plus d'attention fut utilisée par Thésée : en dévidant une bobine de fil, il était au moins sûr de pouvoir repartir par le même chemin. On notera que l'idée était d'Ariane, ce qui fait d'elle sans doute la première mathématicienne. Si Thésée avait été mathématicien (ou si la tâche de tuer le Minotaure n'avait pas exagérément occupé son esprit), il aurait sans doute voulu connaître **tous les chemins possibles pour se rendre d'un point à un autre du labyrinthe**.

Cathédrale
de Chartres

Il faut ajouter que les représentations traditionnelles du labyrinthe de Dédale n'incitent guère à ce genre de question : où que l'on soit, il n'y a qu'un chemin – très long -- pour sortir. C'est le même type de dessin que l'on retrouve sur le pavement de la cathédrale de Chartres mais aussi à Amiens, Bayeux, Guingamp, Saint-Quentin). Ces « chemins de Jérusalem », métaphores du pèlerinage, devaient être suivis en priant.
Plus profane, mais du même type, est le « Labyrinthe » du Jardin des Plantes : une longue allée qui s'élève en spirale jusqu'à un édicule, refuge des amoureux venus profiter de la vue sur Paris.

Cathédrale
de Saint-Omer



Un peu plus tard, comme dans la cathédrale de Saint-Omer (ou près de Londres, à Hampton Court, magnifique labyrinthe taillé dans des allées d'ifs), on semble admettre que l'esprit puisse être distrait par des questions qui sont déjà des questions de topologie : cette fois, il y a plusieurs chemins et ils demandent un peu plus de réflexion. Les anglophones ne parlent plus de « labyrinth » mais de « maze ».

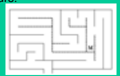
Avant de passer aux mathématiques, notons que les religieux aussi bien que les paysagistes anglais garderont toujours une certaine méfiance pour ces constructions qu'ils firent souvent détruire. Les premiers après avoir noté qu'ils engendraient plus de dissipation que de méditation (en particulier chez les enfants), les seconds au nom du « natural landscaping » (le « jardin à l'anglaise »).

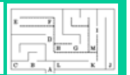
Les labyrinthes sont des graphes.

On arrivera parfois au centre du labyrinthe en posant la main sur la première haie rencontrée et en faisant le tour. Cela fonctionnera bien pour les labyrinthes anciens, du type « Chartres ».
Nous allons montrer comment faire autrement -- et nous réconcilier définitivement avec ces inquiétantes architectures -- en associant à chaque labyrinthe un **graphe**.

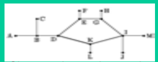
Un graphe est un ensemble de nœuds, chaque nœud étant ou non lié à chaque autre nœud. Des exemples concrets sont fournis par les réseaux tels que : routes, voies ferrées, plan du métro, télécommunications. L'exemple le plus récent (et la meilleure application des mathématiques associées) étant bien sûr Internet.

Dans un premier temps, nous ne considérerons que des liens simples (au plus *un* lien entre deux nœuds donnés). Dans l'exemple ci-dessous, nous choisissons un but (ou « centre ») M. La topologie des graphes va nous aider à simplifier le labyrinthe en ses composantes essentielles.
Lorsque nous explorons un labyrinthe, nous comprenons vite que le fait que les couloirs soient courbes ou rectilignes ne compte pas beaucoup. Ce qui compte ce sont les points où nous avons eu à prendre une décision, les **carrefours**. Sur une feuille de papier, notons tous ces points, et à partir de chacun, dessinons un lien vers chaque autre point qui peut être atteint dans le labyrinthe.
Voici le labyrinthe, puis la version avec tous les carrefours.





Et voici le graphe associé.



Pour le labyrinthe de Chartres, le graphe serait plutôt du genre suivant, puisqu'il n'y a en fait que deux « carrefours ».

En utilisant le graphe associé, il est beaucoup plus facile de se déplacer dans le labyrinthe. En fait, on peut même décrire chaque solution par les noeuds traversés. Pour le labyrinthe de Chartres, on aurait juste A → B. Pour le labyrinthe plus compliqué donné en exemple plus haut, un itinéraire de A à M serait A → B → D → K → I → M.

Vous pouvez essayer d'en trouver d'autres. Et même essayer d'énumérer **tous** les itinéraires de A à M.
L'idée qui consiste à réduire le labyrinthe à ses caractéristiques essentielles en lui associant un diagramme qui contienne toutes les informations est commune en mathématiques. Un bon exemple est celui d'un plan du métro. Ces plans ne montrent généralement que les lignes de métro, les stations et les changements possibles. Les distances entre les stations ne correspondent pas nécessairement à la réalité. Mais ce n'est pas grave pour chercher un itinéraire. Supprimer l'information non essentielle peut même aider à trouver plus vite son itinéraire.

Parcours dans les graphes.

En termes de graphes, le problème du labyrinthe devient le suivant :

Trouver un itinéraire menant de l'entrée à un point donné ou « centre » du labyrinthe -- et retour.

Il y a même deux problèmes différents, selon que l'on dispose ou non d'une carte du labyrinthe. Avec un plan du métro, on passe heureusement moins de temps à trouver comment aller de Bercy à Jussieu que dans le labyrinthe de Hampton Court !

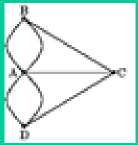
Nous allons considérer ce second cas du labyrinthe sans carte.

Rappelons que dans un graphe les carrefours sont appelés nœuds et les chemins sont appelés liens. Si un nombre pair de liens aboutit à un nœud, ce dernier est appelé un nœud **pair**. Si le nombre de liens est impair, le nœud est dit **impair**. Un cul-de-sac (comme le point C) est un nœud impair puisque un seul lien y mène.

Les graphes ont été étudiés systématiquement pour la première fois par le mathématicien Leonhard Euler (Bâle, 1707-- St Petersbourg, 1783). Euler, calculateur hors norme, mathématicien et physicien extraordinairement fécond, a laissé son nom à maintes notions encore utilisées aujourd'hui (angles d'Euler, constante d'Euler, développements d'Euler-Maclaurin, formule d'Euler sur les polyèdres, intégrales eulériennes).

Les ponts de Königsberg.

En 1736 Euler s'intéressa aux graphes en résolvant le problème des ponts de Königsberg. Königsberg, (plus tard la ville de Kant, aujourd'hui Kaliningrad... dans la Fédération de Russie), est traversée par la rivière Pregel, et possède une île au milieu.
Les habitants de Königsberg avaient remarqué qu'il n'y avait apparemment pas de moyen d'effectuer un parcours traversant chaque pont une fois et une seule. Etaient-ils trop stupides ou y avait-il là une impossibilité mathématique ? Euler les rassura vite en ramenant le problème à l'étude d'un graphe. Dans ce graphe, les noeuds représentent les masses de terre ferme A, B, C, D et les liens les ponts.
Les ponts sur la rivière Pregel étaient alors comme ci-dessous. D'où le graphe (on notera que plusieurs liens peuvent relier les deux mêmes noeuds) :



Le problème des ponts de Königsberg peut alors être formulé de la manière suivante:

Peut-on partir d'un noeud quelconque et construire un itinéraire à travers le graphe revenant au même nœud après avoir utilisé chaque lien une fois et une seule ?

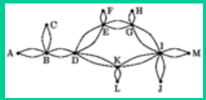
On peut bien sûr poser la question pour tout graphe, pas seulement pour celui de Königsberg, et Euler trouve la solution suivante au problème général :

Si le graphe n'a que des nœuds pairs, on peut faire un tel itinéraire en partant de n'importe quel noeud (et en y revenant).
Si le graphe a exactement deux nœuds impairs, on peut faire un tel itinéraire qui commence à l'un des deux et se termine à l'autre.
Si le graphe a plus de deux nœuds impairs, il n'y a aucun itinéraire parcourant tous les nœuds et utilisant chaque lien une et une seule fois.

Notons qu'il n'y a pas d'autre cas qui se présente : il n'existe pas de graphe sans lien double avec un seul nœud impair ! Voyez-vous comment cela se démontre ?

Pour revenir au graphe des ponts de Königsberg, il a clairement quatre nœuds impairs, donc aucun itinéraire utilisant chaque pont une fois et une seule n'est possible.
A moins de démolir celui que vous n'auriez pas pu parcourir lors de votre dernière tentative, mais ce serait pousser un peu loin l'obsession mathématique.

On pourrait croire que nous nous sommes beaucoup éloignés de notre problème de labyrinthe, mais en fait nous avons presque fini. Prenons le graphe associé au labyrinthe. Ce type de graphe a un certain nombre de nœuds pairs et de nœuds impairs, ce qui rend difficile une application directe du théorème. Nous transformons notre graphe de façon à n'avoir plus que des nœuds pairs. Il suffit pour cela de doubler chaque lien entre deux nœuds. Concrètement, cela veut dire que nous pouvons emprunter chaque chemin deux fois mais pas plus. C'est un point important à comprendre : si nous pouvions emprunter chaque chemin une fois au maximum, nous ne pourrions pas sortir d'un cul-de-sac ! Pour notre exemple, cela donne le graphe ci-dessous :



Il est clair que ce procédé de doublage des liens a rendu chaque nœud pair. Le théorème d'Euler nous assure que dans un tel graphe nous pouvons trouver un chemin partant de n'importe quel nœud et y revenant, et qui aura utilisé chaque lien une fois et une seule. Cela dit, nous n'avons pas encore donné un moyen concret, c'est-à-dire une série d'instructions comme on pourrait en donner à un ordinateur.

Monsieur Plus et le Petit Poucet : cacahuètes et miettes de pain.

La méthode suivante est un algorithme (une série d'instructions) qui permet d'explorer complètement le labyrinthe. En particulier pour aller de l'entrée au centre et retour.

Munissez-vous d'un paquet de cacahuètes et d'un morceau de pain. Semez des cacahuètes et laissez-en aussi aux carrefours. Cela vous indiquera si vous êtes déjà passé par un carrefour ou une allée auparavant. Si vous passez sur une allée pour la deuxième fois, semez des miettes de pain.

Nous prendrons comme règle de ne jamais emprunter un chemin avec des miettes de pain. Si nous rencontrons un carrefour sans cacahuète, nous l'appelons un nouveau nœud -- et y déposons une cacahuète : il devient un ancien nœud. De même, un chemin sans cacahuète que nous parcourons pour la première fois (en y semant des cacahuètes) est appelé un nouveau chemin. Un chemin qui en a déjà et que nous parcourons pour la deuxième fois (en y semant des miettes de pain) est appelé un ancien chemin.

Voici maintenant l'algorithme.

1. Prenez n'importe quel chemin à partir de l'entrée.
2. Si vous arrivez à un nouveau nœud, prenez n'importe quel nouveau chemin.
3. Si vous arrivez à un ancien nœud, ou à la fin d'un cul-de-sac, et que vous êtes sur un nouveau chemin, reprenez le même chemin dans l'autre sens.
4. Si vous arrivez à un ancien nœud et que vous êtes sur un ancien chemin, prenez un nouveau chemin si c'est possible.
5. Ne prenez aucun chemin une troisième fois.

Avec cet algorithme, vous arriverez au centre du labyrinthe et pourrez retourner à l'entrée. Par exemple dans notre labyrinthe, la méthode peut vous donner l'itinéraire
A→B→C→B→D→E→F→E→G→I→M→I→J→I→K→L→K→D→K→I→G→H→G→E→D→B→A.

Mais tout ceci n'est bien sûr que le début de l'histoire : appliquer la théorie des graphes, telle que commencée par Euler, au problème du labyrinthe ne produit ici qu'une solution très longue. Il faut d'autres méthodes si on veut les itinéraires les plus courts possibles, comme sur Internet ou dans le métro...

Solution de la question : pour chaque nœud, noter le nombre de liens qui en sont issus. Faites la somme de ces nombres. Il est facile de voir que vous avez compté chaque lien du graphe exactement deux fois : une fois pour chacune de ses deux extrémités. Donc la somme de ces nombres est un nombre pair. Il ne peut donc y en avoir un nombre impair qui soient impairs : la somme de deux nombres impairs est impaire...
Bref (et ouf), il y a un nombre pair de nœuds impairs.