MENRT
FZ1

SESSION DE 2000

CA/PLP2

CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES – SCIENCES PHYSIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Le sujet est composé de deux exercices et un problème.

Le premier exercice porte sur les séries de Fourier.

Le deuxième exercice a pour objet la résolution d'une équation différentielle du deuxième ordre, linéaire.

Le problème a pour but la détermination des points à coordonnées entières d'une hyperbole.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé (conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).

PREMIER EXERCICE

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, à valeurs dans $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, telle que $f(x) = 0$ si $-\pi \leq x < 0$ et $f(x) = 1$ si $0 \leq x < \pi$.

1- Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).

2- *a.* Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.

b. Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente et calculer sa somme.

DEUXIÈME EXERCICE

Soit (E_1) l'équation différentielle $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x, à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1- Déterminer l'ensemble des fonctions polynômes solutions de l'équation différentielle (E_1).

2- Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, ne contenant pas 0.

a. On désigne par y une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur I.

Pour tout x appartenant à I, on pose $y(x) = x^3 u(x)$.

Vérifier que la fonction y est solution pour tout point de I de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si la fonction u est solution pour tout point de I de l'équation différentielle (E_2) : $xu'' + u' = 0$.

b. Déterminer l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur I, solutions de l'équation différentielle (E_1).

3- Déterminer l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle (E_1).

PROBLÈME

On se place dans le plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$, d'équation $x^2 - 6y^2 = 1$.

On désigne par S et S' les points de $\mathscr{H}$ de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(-1,0)$.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de $\mathscr{H}$ dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

L'objet du problème est de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$.

PARTIE I

Définition et étude d'une loi de composition interne sur $\mathscr{H}$, notée $*$.

1- *a.* Vérifier que $\mathscr{H}$ est symétrique par rapport à chacun des axes de coordonnées, ainsi que $\mathscr{E}$.

b. Déterminer des équations des asymptotes de $\mathscr{H}$.

c. Réaliser une figure, représentant $\mathscr{H}$ et ses asymptotes.

2- À tous points M_1 et M_2 de $\mathscr{H}$, de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2), on associe le point $M_1 * M_2$ du plan, de coordonnées $(x_1 x_2 + 6 y_1 y_2 \,,\, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

a. Vérifier que, pour tous points M_1 et M_2 de $\mathscr{H}$, le point $M_1 * M_2$ appartient à $\mathscr{H}$.

b. Montrer que $\mathscr{H}$, muni de la loi $*$, est un groupe commutatif (on admettra l'associativité).

c. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{H}$ tels que $M * M = S$.

PARTIE II

Interprétation géométrique de la loi de composition $*$.

On désigne par M_1 et M_2 des points de $\mathscr{H}$, de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

1- On suppose que $M_1 \neq M_2$ et on note M_3 le point $M_1 * M_2$.

a. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{SM_3}$ sont colinéaires.

b. En déduire une construction géométrique de M_3.

Préciser le cas particulier où $M_3 = S$.

2- On suppose que $M_1 = M_2$, $M_1 \neq S$ et $M_1 \neq S'$.

a. Vérifier que $x_1 x - 6 y_1 y - 1 = 0$ est une équation de la droite $\mathscr{D}$, tangente à $\mathscr{H}$ en M_1.

b. Démontrer que $M_1 * M_1$ appartient à la droite parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par S.

PARTIE III

Détermination de l'ensemble $\mathcal{E}$.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}^+$ des points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées sont strictement positives.

On note A le point de $\mathcal{E}^+$ dont l'abscisse est minimale et $\mathcal{E}^{+*}$ l'ensemble $\mathcal{E}^+$ privé du point A.

On considère l'application φ, de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, qui, à M, associe le point $\varphi(M) = A * M$.

1- *a.* Prouver que les coordonnées du point A sont $(5,2)$.

Vérifier que A est le point de $\mathcal{E}^+$ dont l'ordonnée est minimale.

b. Démontrer que l'application φ est une bijection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$.

c. Vérifier que, si M' est un point de $\mathcal{H}$, de coordonnées (x',y'), alors les coordonnées de l'antécédent de M' par l'application φ sont $(5x'-12y',-2x'+5y')$.

2- *a.* Vérifier que si M est un point de $\mathcal{E}^+$, alors $\varphi(M)$ est un point de $\mathcal{E}^{+*}$.

b. Soit M' un point de $\mathcal{E}^{+*}$, de coordonnées (x',y'), dont l'antécédent M par φ est différent de A.

Prouver que le coefficient directeur de la droite (SM') est strictement supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

En utilisant le résultat de la question 1-*a* de la partie II, démontrer que M appartient à $\mathcal{E}^+$.

c. Démontrer que la restriction de l'application φ à l'ensemble $\mathcal{E}^+$ est une bijection de $\mathcal{E}^+$ sur $\mathcal{E}^{+*}$.

3- Soit (A_n) la suite de points de $\mathcal{H}$, définie pour tout nombre entier naturel n non nul par $A_1 = A$ et $A_{n+1} = \varphi(A_n)$.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on désigne par a_n l'abscisse de A_n.

a. Prouver que, pour tout nombre entier naturel n non nul, A_n appartient à $\mathcal{E}^+$.

b. Démontrer que la suite (a_n) est strictement croissante.

En déduire que cette suite n'est pas majorée.

4- *a.* On considère des points M_1 et M_2 de $\mathcal{E}^+$, d'abscisses respectives x_1 et x_2, et on note respectivement x_1' et x_2' les abscisses des points $\varphi(M_1)$ et $\varphi(M_2)$.

Vérifier que si $x_1 \le x_2$, alors $x_1' \le x_2'$.

b. Prouver que, pour tout nombre entier naturel n non nul, il n'existe aucun point de $\mathcal{E}^+$ dont l'abscisse appartient à l'intervalle $]a_n, a_{n+1}[$.

c. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}^+$.

5- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.