1128

JF.1
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

CA/PLP

CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES - SCIENCES PHYSIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices de poche est autorisé (conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

Le premier exercice, de probabilités, s'intéresse à un couple de variables aléatoires.

Le second, de géométrie plane, est consacré à la recherche de l'ensemble des isobarycentres des triangles équilatéraux qui ont leurs sommets sur les côtés d'un carré.

Le problème a pour objet la résolution d'une équation différentielle, puis l'étude de l'une de ses solutions.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

PREMIER EXERCICE

Pour cet exercice, le résultat suivant sera admis :

Pour tout nombre réel x, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ *est convergente et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

À propos d'un magasin, on considère les variables aléatoires discrètes Z, X et Y qui, à une journée ouvrable prise au hasard, associent respectivement le nombre de clients qui achètent lors de cette journée dans le magasin, le nombre parmi eux qui règlent leurs achats par carte bancaire et le nombre parmi eux qui les règlent par un autre moyen de paiement.

On suppose que :

• la variable aléatoire Z suit une loi de Poisson, de paramètre λ, où λ est un nombre réel strictement positif ;

• la probabilité qu'un client pris au hasard règle ses achats par carte bancaire est égale à p, où p est un nombre réel tel que $0 < p < 1$;

• le moyen de paiement de tout client qui achète lors d'une journée ouvrable dans le magasin est indépendant du moyen de paiement de tout autre client qui achète lors de cette journée dans le magasin.

1- Pour tous nombres entiers naturels k et n tels que $k \leq n$, calculer la probabilité que $X = k$ sachant que $Z = n$.

2- *a.* Déterminer la loi du couple (Z, X) de variables aléatoires.

b. Déterminer la loi de la variable aléatoire X, comme loi marginale du couple (Z, X).

c. Par analogie avec le résultat obtenu à la question précédente, donner la loi de la variable Y.

d. Étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y.

SECOND EXERCICE

Le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Le point de coordonnées (x,y) est caractérisé par son affixe, le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\, y$.

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère le carré $OABC$, tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{v}$.

L'objet de ce problème est de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des isobarycentres des triangles équilatéraux qui ont leurs sommets appartenant aux côtés du carré $OABC$.

Les dessins destinés à accompagner la résolution des questions de cet exercice seront réalisés en prenant 10 cm *comme unité graphique.*

1- Démontrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral ayant ses sommets appartenant aux côtés du carré $OABC$, avec deux sommets sur le même côté de ce carré.

2- On considère des points M, N et P tels que M, d'affixe m, appartient au segment $[OA]$, N, d'affixe $1+\mathrm{i}\,n$, appartient à la demi-droite $[AB)$, et P, d'affixe $\mathrm{i}\,p$, appartient à la demi-droite $[OC)$.

a. Démontrer que le triangle MNP est équilatéral si et seulement si :
$n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1+m)$ et $p = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(2-m)$.

En déduire que, pour tout point M, il existe un unique couple (N,P) tel que le triangle MNP soit équilatéral.

b. On note S le milieu du segment $[NP]$ et on suppose que le triangle MNP est équilatéral.

Démontrer que le point S est indépendant du point M.

En déduire, pour tout point M, une méthode de construction géométrique des points N et P, à la règle non graduée et au compas.

3- On considère des points M, N et P tels que M, d'affixe m, appartient au segment $[OA]$, N appartient à la demi-droite $[AB)$ et P appartient à la demi-droite $[OC)$.

On suppose que le triangle MNP est équilatéral.

a. On note I l'ensemble des nombres m tels que les points N et P appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[OC]$.

Déterminer l'ensemble I.

b On note respectivement Σ_M, Σ_N et Σ_P, l'ensemble des points M, l'ensemble des points N et l'ensemble des points P, tels que m appartient à I.

Démontrer que les ensembles Σ_M, Σ_N et Σ_P sont des segments, que l'on précisera.

c. On note Σ_Ω l'ensemble des isobarycentres Ω des triangles MNP tels que m appartient à I.

Déterminer l'ensemble Σ_Ω et ses points d'intersection avec les diagonales du carré $OABC$.

Donner une méthode de construction géométrique de l'ensemble Σ_Ω,à la règle non graduée et au compas.

4- Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ et le représenter sur un dessin (unité graphique : 10 cm).

PROBLÈME

Pour ce problème, le résultat suivant sera admis :

Soit α un nombre réel et soit f une fonction définie sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$, à valeurs réelles.

Si f est continue sur $[\alpha, +\infty[$, dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ et admet $f(\alpha)$ pour limite en $+\infty$, alors il existe un nombre β appartenant à $]\alpha, +\infty[$ tel que $f'(\beta) = 0$.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2xy = 1$, où y est une fonction dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

PARTIE I
Résolution de l'équation (E).

1- Résoudre l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$, où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2- Pour toute fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note y la fonction définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ par $y(x) = u(x)e^{-x^2}$.

Démontrer que y est solution de (E) si et seulement si la fonction u est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$.

3- Démontrer que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto \int_a^x e^{t^2-x^2}\,dt$, où a désigne un nombre réel.

PARTIE II
Étude de la solution de (E) qui s'annule en 0.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction f, définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x e^{t^2-x^2}\,dt$.

1- Vérifier que la fonction f est impaire.

2- *Étude de f au voisinage de $+\infty$.*

a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 2, $\int_2^x e^{t^2}\,dt = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)\frac{e^{x^2}}{x} - \frac{9}{32}e^4 + \frac{3}{4}\int_2^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt$.

b. Démontrer que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 2, $0 \leq \int_2^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leq \frac{e^{x^2}}{x^3}$.

c. Déduire des questions précédentes que $f(x)$ est équivalent à $\frac{1}{2x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3- *Étude de f au voisinage de 0.*

a. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre entier naturel n non nul et pour tout nombre réel x, $f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)$, où $f^{(0)} = f$ et $f^{(n)}$ désigne la fonction dérivée d'ordre n de f.

b. Pour tout nombre réel a, justifier l'existence d'un développement limité de f à tout ordre en a.

c. Pour tout nombre entier naturel n, on note A_n la partie régulière du développement limité de f en 0 à l'ordre n : pour tout nombre réel x, $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Pour tout nombre entier naturel p, déterminer a_{2p} et démontrer que $a_{2p+1} = (-4)^p \dfrac{p!}{(2p+1)!}$.

d. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

4- *Étude du sens de variation de f sur l'intervalle* $[0,+\infty[$.

On considère l'ensemble $\mathcal{D}_0$ des nombres réels a strictement positifs tels que $f'(a) = 0$.

a. Démontrer que $\mathcal{D}_0$ n'est pas vide.

b. Vérifier que, pour tout a appartenant à $\mathcal{D}_0$, $f(a) = \dfrac{1}{2a}$.

c. Démontrer que, pour tout a appartenant à $\mathcal{D}_0$, f présente un maximum en a.

(On pourra utiliser un développement limité de f en a).

d. Démontrer que $\mathcal{D}_0$ n'a qu'un seul élément.

On note a_0 cet élément, et on admet que $0{,}9 < a_0 < 1$.

5- *Tracé de la courbe représentative de f.*

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a. Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

b. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point O.

Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$ au voisinage du point O.

c. Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2x}$, pour les abscisses strictement positives.

[Pour tout nombre réel x strictement positif, on pourra exprimer $f(x)$ en utilisant $f'(x)$].

d. Pour les abscisses positives, tracer $\mathscr{T}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{C}$.

(Unités graphiques : 8 cm sur l'axe des abscisses et 16 cm sur l'axe des ordonnées).