0395

2A61-42
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2004

CA/PLP

CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES - SCIENCES PHYSIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices de poche est autorisé
(conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).

L'usage des calculatrices de poche est autorisé
(conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

Le premier exercice porte sur des calculs d'aires de domaines délimités par une parabole et différentes droites.

Le deuxième exercice, de probabilités, met en œuvre le calcul matriciel et permet d'étudier l'évolution, à long terme, de l'utilisation de trois marques d'un produit.

Le problème porte sur l'étude d'une fonction dont il faut montrer qu'elle est l'unique solution d'une équation différentielle donnée.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

PREMIER EXERCICE

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,)$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On désigne par A et B les points de la parabole $\mathscr{P}$ d'abscisses respectives a et b.

1. Déterminer une équation de la droite (AB).

2. a) Exprimer en fonction de a et b l'aire $\mathscr{A}_1$ du domaine limité par la parabole $\mathscr{P}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

   b) Exprimer en fonction de a et b l'aire $\mathscr{S}$ du domaine limité par la droite (AB) et la parabole $\mathscr{P}$.

3. Les tangentes à $\mathscr{P}$ en A et B sont respectivement notées Δ_A et Δ_B. Elles se coupent en C. Déterminer les coordonnées du point C.

4. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC (on rappelle que dans une base orthonormée directe $\text{dét}(\vec{u}\,,\vec{v}\,) = \|\,\vec{u}\,\|\,\|\,\vec{v}\,\|\,\sin(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$).

5. Quelle est la valeur du rapport $\dfrac{\mathscr{A}}{\mathscr{S}}$?

DEUXIÈME EXERCICE

L'objet de cet exercice est l'étude de l'évolution, au cours du temps, de l'utilisation de trois marques de dentifrice pour une population donnée de consommateurs.

L'ensemble des couples de réels est noté $\mathbb{R}^2$.
Trois marques ***X***, ***Y*** et ***Z*** d'un dentifrice occupent un secteur de consommation. Chaque mois, les consommateurs de la population étudiée utilisent une et une seule de ces marques.

Soit n un entier naturel. Pour un consommateur pris au hasard, on désigne par X_n (respectivement Y_n et Z_n) l'événement : « La marque ***X*** (respectivement ***Y*** et ***Z***) est utilisée au cours du n-ième mois ».

Les probabilités des évènements X_n, Y_n et Z_n sont respectivement notées x_n, y_n et z_n.

Au cours du mois d'essai ($n = 0$), on a observé les valeurs initiales : $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 0{,}2$ et $z_0 = 0{,}7$.

D'autre part, on a pu déterminer par sondage les intentions des consommateurs que l'on supposera constantes :

- la probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque ***X*** au cours du mois n, d'adopter la marque ***X*** (respectivement ***Y*** et ***Z***) au cours du mois suivant est 0,4 (respectivement 0,3 et 0,3) ;
- la probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque ***Y*** au cours du mois n, d'adopter la marque ***X*** (respectivement ***Y*** et ***Z***) au cours du mois suivant est 0,3 (respectivement 0,4 et 0,3) ;
- la probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque ***Z*** au cours du mois n, d'adopter la marque ***X*** (respectivement ***Y*** et ***Z***) au cours du mois suivant est 0,2 (respectivement 0,1 et 0,7).

1. Pour tout entier naturel n :

   a) exprimer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.

   b) vérifier que $x_n + y_n + z_n = 1$.

2. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = A\,U_n + B$.

3. On désigne par I la matrice unité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que la matrice $I - A$ est inversible.

   b) Déterminer une matrice C telle que $C = A\,C + B$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - C$.

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n\,V_0$.

5. a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice A, ainsi que les sous-espaces propres associés respectivement à chacune des valeurs propres.

   b) Préciser pourquoi A est diagonalisable et déterminer une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^2$, constituée de vecteurs propres de A.

   c) Déterminer la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathscr{C}$, ainsi que son inverse P^{-1}.

   d) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de la matrice A^n.

   Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

6. Que conclure de l'utilisation, à long terme, des marques ***X***, ***Y***, ***Z*** ?

PROBLÈME

Notations et rappels

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

La fonction tangente réalise une bijection continue de $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque de cette fonction est notée arctan.

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Pour tout entier naturel n, le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction arctan est:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

PARTIE A

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x} \; pour \; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est paire.

2. Étudier la limite de f en $+\infty$.

3. a) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

   b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.

4. a) Pour tout réel x positif, on pose $N(x) = x - (1 + x^2)\arctan(x)$.
   Étudier les variations de la fonction N et préciser son signe sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

PARTIE B

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt \quad pour \; x \neq 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.

2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) \leqslant F(x) \leqslant 1$. (On pourra utiliser la question 4-b) de la partie A).

3. a) Établir que F est dérivable en 0 et préciser la valeur de $F'(0)$.

   b) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que, pour tout réel x non nul,

$$F'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - F(x)\right).$$

   c) En déduire le sens de variation de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

   d) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = 0$. En déduire la limite de la fonction F en $+\infty$.

4. Tracer la représentation graphique de la fonction F dans le plan rapporté au même repère que celui utilisé pour tracer la représentation graphique de la fonction f.

PARTIE C

Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $x^2 y' + xy = \arctan(x)$.

On note (E_0) l'équation différentielle associée : $x^2 y' + xy = 0$.

1. a) On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{4}{x} & \text{si } x > 0 \\ g(x) = \frac{-1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   La fonction g est-elle solution de (E_0) sur $\mathbb{R}^*$?

   b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0 ; +\infty[$.

2. À toute fonction y de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, on associe la fonction u définie pour $x \neq 0$ par $u(x) = xy(x)$.

   Donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction u pour que la fonction y soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire, sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$, les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Montrer que la fonction F définie dans la partie B est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).