SESSION DE 2000

concours externe
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Tournez la page S.V.P.

Note importante : Ce sujet est adapté à partir du sujet du CAPES externe 2000. Ce dernier était en effet beaucoup trop long et déstabilisant. Nous avons choisi les parties abordables, même si le sujet reste un sujet difficile. Nous vous conseillons de tenter de faire la partie I au moins jusqu'au début de I.4. Le but de la première partie est de caractériser des plans partageant un tétraèdre quelconque en deux parties dont les volumes sont 1/8 et 7/8 du volume de ce tétraèdre. La seconde partie est consacrée au tétraèdre régulier et étudie quelques aspects du groupe de ses isométries ainsi que des fonctions définies sur une sphère, invariantes par ce groupe.

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{\mathscr{E}}$ son espace vectoriel associé. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{\mathscr{E}}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et la norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$. La distance de deux points A et B de $\mathscr{E}$ est notée AB, soit $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Si $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on repérera un point M par un triplet de ses coordonnées sphériques (r, φ, θ) dans $[0, +\infty[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi[$ tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} = r\cos\varphi\cos\theta \\ \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} = r\cos\varphi\sin\theta \\ \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = r\sin\varphi, \end{cases}$$

ou en d'autres termes tout triplet $(0, \varphi, \theta)$ est un triplet de coordonnées sphériques de O ;
tout triplet $\left(\lambda, \frac{\pi}{2}, \theta\right)$ est un triplet de coordonnées sphériques de M si $\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{k}$ avec $\lambda > 0$;
tout triplet $\left(-\lambda, -\frac{\pi}{2}, \theta\right)$ est un triplet de coordonnées sphériques de M si $\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{k}$ avec $\lambda < 0$;
enfin si M n'appartient pas à la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{k}$, alors si on désigne par m la projection orthogonale de M sur le plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, φ est une mesure en radians comprise strictement entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ de l'angle $(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM})$ et θ est une mesure en radians appartenant à $[0, 2\pi[$ de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{Om})$.

Étant donnés deux points X et Y de $\mathscr{E}$, on note $[XY]$ le segment d'extrémités X et Y et si X et Y sont distincts, on note $\mathscr{D}_{(X,Y)}$ la droite passant par X et Y.

On rappelle qu'étant donnés quatre points non coplanaires A, B, C et D, on appelle tétraèdre de sommets A, B, C et D l'enveloppe convexe de ces quatre points, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres de ces quatre points affectés de masses positives ou nulles. On note T = ABCD ce tétraèdre.

Un point X de T = ABCD est dit extrémal si pour tout couple de points Y et Z de T, on a :

si X est le milieu du segment $[YZ]$, alors Y = Z.

On rappelle que les points extrémaux d'un tétraèdre sont ses sommets.

Les arêtes du tétraèdre T = ABCD sont les segments d'extrémités deux sommets.

Un tétraèdre est régulier si toutes ses arêtes sont de même longueur.

On désigne par vol, l'application de $\mathscr{E}^4$ dans $\mathbb{R}^+$ qui au quadruplet de points (A, B, C, D) associe le nombre :

$$\mathrm{vol}(A, B, C, D) = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| \qquad (1)$$

On rappelle que le nombre V = vol(A, B, C, D) est le volume du tétraèdre T = ABCD.

Soit $\{A, B, C, D\}$ un ensemble de cardinal 4. On note Σ le groupe des permutations de cet ensemble. Une permutation ρ appartenant à Σ pourra être notée $[(A, B, C, D) \mapsto (\rho(A), \rho(B), \rho(C), \rho(D))]$ ou en utilisant la notation usuelle en produit de cycles.

On désigne par τ la transposition de A et de B, on notera $\tau = [(A, B, C, D) \mapsto (B, A, C, D)]$ ou encore $\tau = (AB)$; on désigne par σ le cycle qui à B associe C, à C associe D, à D associe B et qui laisse A fixe, on notera $\sigma = [(A, B, C, D) \mapsto (A, C, D, B)]$ ou encore $\sigma = (BCD)$; on notera id l'application identique de Σ, soit $\mathrm{id} = [(A, B, C, D) \mapsto (A, B, C, D)]$.

I. À PROPOS DU TÉTRAÈDRE QUELCONQUE

On suppose donnés A, B, C et D, quatre points non coplanaires de $\mathscr{E}$.

1.

a. Montrer que les points A, B, C et D sont deux à deux distincts. Quel est l'ordre du groupe Σ ?

b. Expliciter les permutations suivantes à l'aide de cycles :

$$\tau^2, \sigma^3, \tau\sigma, (\tau\sigma)^4, \sigma\tau\sigma^2, \sigma^2\tau\sigma, \tau\sigma\tau\sigma^2\tau, \tau\sigma^2\tau\sigma\tau \text{ et } \tau\sigma\tau\sigma^2\tau\sigma.$$

c. Montrer que σ et τ engendrent Σ.

d. Déduire de *c.* que pour toute permutation ρ appartenant à Σ :

$$\mathrm{vol}(\rho(A), \rho(B), \rho(C), \rho(D)) = \mathrm{vol}(A, B, C, D).$$

e. Peut-on déduire le résultat précédent de ce que $\mathrm{vol}(A, B, C, D)$ est le volume du tétraèdre $ABCD$?

2. Soit H_A le projeté orthogonal de A sur le plan passant par B, C et D. Montrer à partir de (1) que le volume du tétraèdre T peut aussi s'écrire :

$$V = \mathrm{vol}(A, B, C, D) = \frac{1}{3} AH_A \,\mathrm{aire}(BCD)$$

où $\mathrm{aire}(BCD)$ désigne l'aire du triangle BCD.

3. Soit λ un réel strictement compris entre 0 et 1 et soit L le barycentre de A et H_A affectés des masses λ et $1-\lambda$. Montrer que le plan P passant par L et perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(A, H_A)}$ coupe les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. On désigne les points d'intersections correspondants par S_B, S_C et S_D. L'intersection du tétraèdre T et du demi-espace limité par P et contenant A est le tétraèdre $AS_BS_CS_D$. Soit v_1 le volume de cette intersection et soit v_2 le volume de l'intersection du tétraèdre T avec le demi-espace limité par P et contenant B.

a. Déterminer la valeur λ_1 de λ telle que $v_1 = \dfrac{V}{8}$.

b. Déterminer la valeur λ_2 de λ telle que $v_2 = \dfrac{V}{8}$.

4.

a. Montrer qu'il existe un couple unique de points (I, J) tel que I appartienne à $\mathscr{D}_{(A,B)}$, que J appartienne à $\mathscr{D}_{(C,D)}$, que $\mathscr{D}_{(I,J)}$ soit perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(A,B)}$ et que $\mathscr{D}_{(I,J)}$ soit perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(C,D)}$.

b. Soit μ un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et soit M le barycentre de I et de J affectés des masses μ et $1-\mu$. Montrer que le plan Q passant par M et perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(I,J)}$ coupe les arêtes $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$ et $[BD]$; on note ces intersections respectivement U_{AC}, U_{AD}, U_{BC} et U_{BD}. Montrer que $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ est un parallélogramme.

c. Dans cette question $\mu = \dfrac{1}{3}$. Dessiner sans commentaire les deux figures planes obtenues par projections orthogonales des arêtes du tétraèdre T et des côtés du parallélogramme $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ d'une part sur le plan Q, d'autre part sur le plan passant par A, B et J (on supposera que $\mathscr{D}_{(C,D)}$ et $\mathscr{D}_{(A,B)}$ ne sont pas orthogonales).

d. On suppose de nouveau μ quelconque dans $]0, 1[$. Exprimer l'aire du parallélogramme $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ en fonction de μ et de l'aire W d'un parallélogramme $U_1U_2U_3U_4$ tel que $\overrightarrow{U_1U_2} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{U_2U_3} = \overrightarrow{CD}$.

e. Exprimer le volume V du tétraèdre $T = ABCD$ en fonction de W et de la distance IJ.

f. On désigne par v_3 le volume de l'intersection de T avec le demi-espace limité par Q et contenant les points C et D. Déterminer la fonction polynomiale f de degré 3, qui s'annule en 0 et qui est telle que les équations en μ dans $]0, 1[$:

$$f(\mu) + \frac{1}{8} = 0 \qquad (2)$$

et $v_3 = \dfrac{V}{8}$ soient équivalentes. Montrer que (2) admet une solution unique μ_0 dans l'intervalle $]0, 1[$.

g. Vérifier que $f(1-\mu_0)+\dfrac{7}{8}=0$. Pourquoi pouvait-on prévoir ce résultat ?

h. On définit les fonctions réelles de variable réelle g et h par $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{8}$ et $h(x)=\dfrac{32x^3-24x^2-1}{48x(x-1)}$, et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=h(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que g et g' sont décroissantes sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ_0. Calculer u_1 et u_2. Montrer que $0{,}22<\mu_0$. Donner une valeur approchée de μ_0 à $2\cdot 10^{-3}$ près.

i. Montrer que h'' est décroissante sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$, calculer à la calculatrice une valeur approchée de $h''(0{,}2)$ et vérifier que $h''(0{,}2)<5$. Montrer que pour n entier naturel, on a :

$$(u_{n+1}-\mu_0)<5\,(u_n-\mu_0)^2.$$

Montrer que u_4 est une approximation de μ_0 à 10^{-7} près et que u_5 est une approximation de μ_0 à 10^{-13} près.

Partie II

On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit A, B, C et D les points de coordonnées respectives dans ce repère $(0,0,3)$, $(2\sqrt{2},0,-1)$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{6},-1)$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{6},-1)$.

1.a Montrer que le tétraèdre T=ABCD est régulier. Quel est son volume V ?

1.b Soit ρ appartenant à Σ. Montrer qu'il existe une isométrie de $\mathcal{E}$ unique, notée t telle que $t(A)=\rho(A)$, $t(B)=\rho(B)$, $t(C)=\rho(C)$ et $t(D)=\rho(D)$. On désigne par ψ l'application qui à ρ associe t. L'application ψ est-elle un homomorphisme de groupes ? L'application ψ est-elle injective, surjective, bijective ?

2 Montrer que $\Sigma'=\psi(\Sigma)$ est l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ qui conservent globalement le tétraèdre T.

3. Pour toute permutation ρ de Σ, on note L_ρ la matrice, relativement à la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\vec{\mathcal{E}}$, de l'isométrie vectorielle $\overrightarrow{\psi(\rho)}$ associée à $\psi(\rho)$.

   a. Vérifier que :

$$L_\tau=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\dfrac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

Montrer que $\psi(\tau)$ est une réflexion ; préciser par rapport à quel plan. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice L_τ ?

b. Déterminer L_σ. Montrer que $\psi(\sigma)$ est une rotation ; préciser pour cette rotation : son axe, ses axes orientés, ses angles orientés et leurs mesures. Quels sont les valeurs propres réelles ou complexes et les vecteurs propres réels ou complexes de la matrice L_σ ?

c. On désigne par ρ_3 la permutation de $\{A, B, C, D\}$ telle que $\rho_3(A) = B$, $\rho_3(B) = C$, $\rho_3(C) = D$ et $\rho_3(D) = A$, soit $\rho_3 = (ABCD)$. Montrer que l'image du milieu M_{AC} du segment $[AC]$ par $\psi(\rho_3)$ est le milieu M_{BD} du segment $[BD]$, point symétrique de M_{AC} par rapport à O. Montrer que la restriction de $\psi(\rho_3)$ au plan médiateur du segment $[M_{AC}M_{BD}]$ est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

En déduire les valeurs propres de L_{ρ_3} et le polynôme caractéristique de L_{ρ_3}. Montrer que $L_{\rho_3} = L_\tau L_\sigma$; écrire explicitement la matrice L_{ρ_3} puis retrouver son polynôme caractéristique.

d. On désigne par ρ_4 la permutation de $\{A, B, C, D\}$ telle que $\rho_4(A) = C$, $\rho_4(B) = D$, $\rho_4(C) = A$ et $\rho_4(D) = B$, soit $\rho_4 = (AC)(BD)$. Décrire la transformation géométrique $\psi(\rho_4)$. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice L_{ρ_4} ? Il n'est pas demandé d'écrire explicitement la matrice L_{ρ_4}.

4. On trace sur la sphère Ω circonscrite au tétraèdre $ABCD$ tous les grands cercles passant par deux sommets du tétraèdre (un grand cercle est un cercle inclus dans la sphère et centré au centre de la sphère ou encore l'intersection de la sphère avec un plan passant par le centre de la sphère). On appellera points simples les points communs à deux tels grands cercles et points triples les points communs à trois tels grands cercles. Dénombrer le nombre de points simples et le nombre de points triples. Quels sont les coordonnées sphériques des points simples ?

5. On repère tout point M de Ω par ses coordonnées sphériques $(3, \varphi, \theta)$.

a. Montrer que M appartient au grand cercle passant par C et D si et seulement si : $\sqrt{2}\tan\varphi - \cos\theta = 0$.

b. Écrire pour chacun des grands cercles Γ de Ω passant par deux sommets de T une relation (R_Γ) entre φ et θ telle que pour tout point M de coordonnées sphériques $(3, \varphi, \theta)$, M appartient à Γ si et seulement si (R_Γ) est vérifiée.

c. Dessiner dans le rectangle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi[$ du plan (φ, θ) la courbe d'équation : $\varphi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta)\right)$. Cette courbe est appelée l'image dans le plan (φ, θ) du grand cercle de Ω passant par C et D. Dessiner sur le même schéma pour chaque grand cercle Γ de Ω passant par deux sommets de T, son image dans le plan (φ, θ), c'est-à-dire la courbe du plan (φ, θ) d'équation (R_Γ). Indiquer sur votre schéma les points (φ, θ) tels que $(3, \varphi, \theta)$ soient les coordonnées sphériques des points simples de la question précédente.

d. On désigne par F l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à chaque point M de Ω associe la distance ON où N est l'intersection du segment $[OM]$ avec la frontière de T. Les lignes de niveau de F sont des cercles ou des réunions d'arcs de cercles. Donner l'allure dans le plan (φ, θ) des images des courbes de niveaux $F(M) = 1{,}5$, $F(M) = 2{,}5$ et $F(M) = \sqrt{3}$.