

SESSION DE 2001**concours externe
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)****sections : mathématiques
breton**

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique -, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Tournez la page S.V.P.

Notations et objet du problème

On désigne par :

\mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels ;

\mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls ;

\mathbb{Q} le corps des nombres rationnels ;

\mathbb{R} le corps des nombres réels ;

\mathbb{R}^+ le sous-ensemble de \mathbb{R} constitué des nombres réels positifs ou nuls ;

\mathbb{R}^{+*} le sous-ensemble de \mathbb{R} constitué des nombres réels strictement positifs.

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} .

Pour tout réel x , on note $[x]$ la partie entière de x . On rappelle que c'est l'unique entier relatif défini par :

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Dans la première partie, on étudie l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ sur \mathbb{R}^+ .

Cette équation fonctionnelle est utilisée pour donner une caractérisation des variables aléatoires dites sans mémoire dans la partie III.

Dans la partie II, on étudie quelques propriétés du produit de convolution des fonctions continues sur \mathbb{R}^+ . Le produit de convolution intervient dans l'étude de variables aléatoires dans la partie III.

Les trois dernières parties sont consacrées à la modélisation probabiliste d'un problème de réception de messages par un réseau informatique. Dans les parties IV et V, on étudie le comportement asymptotique d'une suite de maximum de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson.

Les parties II.1. et II.2. sont indépendantes des parties III, IV et V.

- I - L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ sur \mathbb{R}^+

Pour cette partie, on désigne par f une fonction définie sur \mathbb{R}^+ à valeurs réelles et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad f(x+y) = f(x)f(y). \quad (1)$$

I.1. Vérifier que la fonction f est à valeurs positives ou nulles.

I.2. Montrer que si $f(0) = 0$, alors la fonction f est identiquement nulle.

Dans ce qui suit on suppose que f est non identiquement nulle.

I.3. Déterminer la valeur de $f(0)$.

I.4. Soient x un réel positif ou nul et n un entier naturel non nul. Exprimer $f(nx)$ et $f\left(\frac{1}{n}x\right)$ en fonction de $f(x)$ et de n .

I.5. Soient x un réel positif ou nul, $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel où p et q sont deux entiers strictement positifs. En calculant $f(q(rx))$ de deux manières, exprimer $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et de r .

I.6. Pour cette question, on suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que $f(\alpha) = 0$.

I.6.1. Construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergente vers 0, telle que $f(x_n) = 0$ pour tout entier naturel n .

I.6.2. Montrer que la fonction f est nulle sur \mathbb{R}^{+*} .

Dans ce qui suit on suppose que f est à valeurs réelles strictement positives.

I.7. On suppose que la fonction f est continue à droite en tout point de \mathbb{R}^+ . Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout réel x positif ou nul.

- I.8. On suppose que la fonction f est continue à droite en 0. Montrer qu'elle est continue à droite en tout point de \mathbb{R}^+ et conclure.
- I.9. On suppose qu'il existe deux réels A et B vérifiant $0 \leq A < B$, tels que f soit majorée sur l'intervalle $[A, B]$.
- I.9.1. Montrer que sur l'intervalle $[0, B - A]$, la fonction f est bornée de borne inférieure strictement positive.
- I.9.2. Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

En conclusion de cette partie, le résultat suivant a été montré :

Si une fonction f à valeurs réelles définie sur \mathbb{R}^+ :

- vérifie l'équation (1),
- est non identiquement nulle sur \mathbb{R}^{+*} ,
- est majorée sur un intervalle de longueur strictement positive, alors il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout réel x positif ou nul.

- II - Produit de convolution

On admet le résultat suivant : Si R est un réel strictement positif et ψ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le carré $C_R = [0, R]^2$, alors :

$$\int_0^R \left(\int_0^R \psi(t, x) dt \right) dx = \int_0^R \left(\int_0^R \psi(t, x) dx \right) dt.$$

- II.1. Soient R un réel strictement positif et φ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le triangle T_R défini par :

$$T_R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq x \leq R\}.$$

Le but de cette question II.1. est de montrer l'égalité suivante :

$$\int_0^R \left(\int_0^x \varphi(t, x) dt \right) dx = \int_0^R \left(\int_t^R \varphi(t, x) dx \right) dt. \quad (2)$$

- II.1.1. Montrer que la fonction ψ définie sur $C_R = [0, R]^2$ par :

$$\forall (t, x) \in C_R, \quad \psi(t, x) = \begin{cases} \varphi(t, x) - \varphi(t, t) & \text{si } (t, x) \in T_R, \\ 0 & \text{si } (t, x) \notin T_R, \end{cases}$$

est continue sur C_R .

- II.1.2. Soient R un réel strictement positif et k une fonction à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $[0, R]$. Montrer, à l'aide de dérivations, que :

$$\forall z \in [0, R], \quad \int_0^z \left(\int_0^x k(t) dt \right) dx = \int_0^z \left(\int_t^z k(t) dx \right) dt.$$

- II.1.3. Montrer à l'aide de ce qui précède l'identité (2).

- II.2. Pour toutes fonctions f, g appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$, on définit la fonction $f * g$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f * g(x) = \int_0^x f(x-t) g(t) dt.$$

- II.2.1. Montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$.

Tournez la page S.V.P.

On admet que la loi $*$ ainsi définie est commutative et associative.

On suppose, dans les questions qui suivent, que f et g sont deux fonctions appartenant à $C(\mathbb{R}^+)$ à valeurs positives ou nulles dont les intégrales impropres sur \mathbb{R}^+ sont convergentes.

II.2.2. Montrer que pour tout réel R strictement positif on a :

$$\int_0^R f * g(x) dx = \int_0^R g(t) \left(\int_0^{R-t} f(x) dx \right) dt.$$

II.2.3. Montrer que pour tout réel R strictement positif on a :

$$\int_0^{\frac{R}{2}} f(x) dx \int_0^{\frac{R}{2}} g(t) dt \leq \int_0^R f * g(x) dx \leq \int_0^R f(x) dx \int_0^R g(t) dt.$$

II.2.4. Dédire de ce qui précède que l'intégrale impropre de $f * g$ sur \mathbb{R}^+ est convergente et que :

$$\int_0^{+\infty} f * g(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx \int_0^{+\infty} g(t) dt.$$

II.3. Pour tout réel λ strictement positif, on désigne par f_λ la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

On définit la suite $(f_\lambda^{*n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ des puissances de convolution de la fonction f_λ par $f_\lambda^{*1} = f_\lambda$ et pour tout entier naturel non nul n , $f_\lambda^{*(n+1)} = f_\lambda^{*n} * f_\lambda$.

II.3.1. Calculer f_λ^{*2} .

II.3.2. Calculer f_λ^{*n} pour tout entier naturel non nul n .

- III- Variables aléatoires sans mémoire et temps d'attente

On rappelle que :

- si X est une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{B}, P) , alors sa fonction de répartition est la fonction notée F_X définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x);$$

- la fonction de répartition caractérise la loi de la variable aléatoire réelle X ;

- une variable aléatoire réelle X suit une loi exponentielle s'il existe un réel λ strictement positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \int_0^x f_\lambda(t) dt & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

où f_λ est la fonction définie en II.3.

On dit alors que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

III.1. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

III.1.1. Expliciter sa fonction de répartition.

III.1.2. Montrer que :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P((X > s + t) | (X > t)) = P(X > s), \quad (3)$$

où la notation $P(A | B)$ représente la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B de probabilité non nulle est réalisé. On rappelle que :

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

La propriété (3) se traduit en disant que la variable aléatoire X est sans mémoire.

III.2. Soit T une variable aléatoire réelle sans mémoire. On note F_T sa fonction de répartition.

III.2.1. Montrer que la fonction G_T définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G_T(x) = 1 - F_T(x)$$

vérifie l'équation fonctionnelle (1).

III.2.2. Montrer que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle.

III.3. Pour cette partie et les suivantes, on s'intéresse à la modélisation probabiliste d'un problème concernant l'arrivée de messages vers un réseau informatique.

On désigne par T_1 le temps d'attente pour le réseau d'un premier message à partir de l'instant initial $t = 0$ et, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, par T_k le temps d'attente du k -ième message à partir de l'arrivée du $(k - 1)$ -ième.

On suppose que les T_k , pour $k \geq 1$, sont des variables aléatoires suivant une même loi exponentielle de paramètre λ strictement positif et que pour tout entier $n \geq 2$, les variables aléatoires T_1, \dots, T_n sont indépendantes.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par S_n la variable aléatoire réelle définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n T_k.$$

On admet que la fonction de répartition F_{S_n} de S_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \int_0^x f_\lambda^{*n}(t) dt & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

III.3.1. Donner une interprétation de la variable aléatoire S_n .

Pour les cinq questions suivantes, t est un réel strictement positif fixé. Pour les solutions, on pourra utiliser les variables de type S_i ($i \in \mathbb{N}^*$) et leur fonction de répartition.

III.3.2. Calculer la probabilité pour qu'aucun message ne soit arrivé entre les instants 0 et t .

III.3.3. Calculer la probabilité pour qu'au plus un message soit arrivé entre les instants 0 et t .

Soit n un entier naturel.

III.3.4. Calculer la probabilité pour qu'au plus n messages soient arrivés entre les instants 0 et t .

III.3.5. Calculer la probabilité pour qu'exactement n messages soient arrivés entre les instants 0 et t .

III.3.6. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire N_t indiquant le nombre de messages reçus entre les instants 0 et t ?

- IV - Comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires

Dans ce qui suit, Y est une variable aléatoire réelle, suivant une loi de Poisson de paramètre μ , réel strictement positif. On rappelle que cette loi est déterminée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y = k) = \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}.$$

La fonction de répartition, dont la définition est rappelée au début de la partie III, est notée F_Y . On note G_Y la fonction définie sur l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à -1 par :

$$\forall m \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, \quad G_Y(m) = 1 - F_Y(m).$$

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par A_n le nombre de messages arrivés dans l'intervalle de temps $[n-1, n[$. On suppose que les A_n , pour $n \geq 1$, sont des variables aléatoires suivant une même loi de Poisson de paramètre μ strictement positif et que pour tout entier $n \geq 2$, les variables aléatoires A_1, \dots, A_n sont indépendantes.

Le réseau informatique ayant une capacité limitée de réception de messages sur chaque unité de temps, il est intéressant d'étudier la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n = \max \{A_1, \dots, A_n\}$$

(On admet que les M_n sont des variables aléatoires réelles).

IV.1. Que représente la variable aléatoire M_n pour le modèle proposé.

IV.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad P(M_n \leq m) = (1 - G_Y(m))^n,$$

IV.3.

IV.3.1. Montrer que, pour tout entier naturel m strictement supérieur à $\mu - 2$, on a :

$$\frac{e^{-\mu} \mu^{m+1}}{(m+1)!} \leq G_Y(m) \leq \frac{e^{-\mu} \mu^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{1 - \frac{\mu}{m+2}}.$$

IV.3.2. En déduire un équivalent de $G_Y(m)$ pour m tendant vers l'infini.

IV.3.3. En déduire un équivalent de $\frac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)}$ pour m tendant vers l'infini.

IV.4. On définit la fonction G_C sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad G_C(x) = G_Y([x]) \left(\frac{G_Y([x]+1)}{G_Y([x])} \right)^{x-[x]}$$

IV.4.1. Montrer que la fonction G_C est continue sur $[-1, +\infty[$.

IV.4.2. Montrer que la fonction G_C est strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$.

IV.4.3. Montrer que la fonction G_C définit un homéomorphisme de $[-1, +\infty[$ sur $]0, 1[$.

IV.5. On définit la suite de réels $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_m = \frac{G_C\left(m + \frac{1}{2}\right)}{G_C(m)}.$$

IV.5.1. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_m = \sqrt{\frac{G_C(m+1)}{G_C(m)}} = \frac{G_C(m+1)}{G_C\left(m + \frac{1}{2}\right)}.$$

IV.5.2. Montrer que la suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

IV.6. En notant G_C^{-1} l'application réciproque de G_C , on définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = G_C^{-1}\left(\frac{1}{n}\right), \quad I_n = \left[a_n + \frac{1}{2} \right].$$

IV.6.1. Etudier les limites éventuelles des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

IV.6.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} 0 < G_C(I_n + 1) \leq \frac{\alpha_{I_n}}{n}, \\ G_C(I_n - 1) \geq \frac{1}{n\alpha_{(I_n-1)}}. \end{cases}$$

IV.7. On définit les suites de réels $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} p_n = P(M_n \leq I_n + 1), \\ q_n = P(M_n \leq I_n - 1). \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.

IV.8. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (P(M_n = I_n) + P(M_n = I_n + 1)) = 1.$$

IV.9. Application numérique. On utilisera la table numérique suivante, pour $\mu = 0,4$:

| k | $P(Y = k)$ | $F_Y(k)$ | $G_Y(k)$ |
|-----|------------|------------|-------------|
| 0 | 0,67032005 | 0,67032005 | 0,329679954 |
| 1 | 0,26812802 | 0,93844806 | 0,061551936 |
| 2 | 0,0536256 | 0,99207367 | 0,007926332 |
| 3 | 0,00715008 | 0,99922375 | 0,000776251 |
| 4 | 0,00071501 | 0,99993876 | 6,12433E-05 |
| 5 | 5,7201E-05 | 0,99999596 | 4,04268E-06 |
| 6 | 3,8134E-06 | 0,99999977 | 2,29307E-07 |
| 7 | 2,1791E-07 | 0,99999999 | 1,13997E-08 |

IV.9.1. Calculer I_{10^5} .

IV.9.2. Calculer $P(M_{10^5} = I_{10^5}) + P(M_{10^5} = I_{10^5} + 1)$.

IV.9.3. Commenter ce résultat.

- V - Étude des suites $P(M_n = I_n)$ et $P(M_n = I_n + 1)$.

On définit les suites de réels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} r_n = P(M_n = I_n + 1), \\ s_n = P(M_n = I_n), \end{cases}$$

où M_n est la variable aléatoire définie au début de la partie IV et le réel I_n est défini en IV.6.

Tournez la page S.V.P.

V.1. On définit la fonction H sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad H(x) = \frac{1}{G_C(x)},$$

où G_C est la fonction définie en IV.4.

V.1.1. Montrer que la fonction H est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ des réels positifs non entiers.

V.1.2. Calculer, pour tout entier naturel m :

$$h_m = \inf_{x \in]m, m+1[} H'(x)$$

où H' désigne la fonction dérivée de la fonction H . Montrer que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} h_m = +\infty.$$

V.2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie en IV.6.

V.2.1. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H(a_{n+1}) - H(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = +\infty.$$

V.2.2. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

V.3. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{I_n - a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

est dense dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

V.4.

V.4.1. Montrer que pour tout entier m non nul tel que :

$$I_m - a_m < -\frac{1}{4},$$

on a :

$$G_C(I_m) > \frac{1}{m\sqrt{\alpha_{I_m}}},$$

où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie en IV.5.

V.4.2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(r_{\theta(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers 1, soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_{\theta(n)} = I_{\theta(n)} + 1) = 1.$$

V.4.3. Montrer que pour tout entier m non nul tel que :

$$I_m - a_m > \frac{1}{4},$$

on a :

$$G_C(I_m) < \frac{\sqrt{\alpha_{(I_m-1)}}}{m}.$$

V.4.4. Montrer qu'il existe une sous-suite $(s_{\xi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers 1, soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_{\xi(n)} = I_{\xi(n)}) = 1.$$