Objectifs et notations

Ce problème propose essentiellement l'étude de deux définitions classiques de la fonction exponentielle. La première partie établit des résultats fondamentaux qui seront utilisés dans les deux parties suivantes, mais à l'exception de la toute dernière question, la deuxième et la troisième partie sont totalement indépendantes.

Les candidats sont invités à lire soigneusement les en-têtes de chaque partie et à se conformer strictement aux exigences qui y sont formulées. Toute solution ne respectant pas ces exigences sera rejetée.

Certaines questions comportent des indications ou des suggestions de solutions. Les candidats peuvent bien sûr ne pas en tenir compte et proposer des solutions personnelles.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{R}^{*+}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

E désigne l'application usuelle *partie entière.*

n désignant un entier naturel non nul, on appelle n-uplet de réels un élément du produit cartésien $\mathbb{R}^n$.

L'écriture $(u_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite indexée par $\mathbb{N}^*$, de terme général u_n et si a désigne un réel positif, $(u_n)_{n>a}$ désigne une suite indexée à partir du premier entier strictement supérieur à a et de terme général u_n. Dans certaines questions, l'indexation de la suite ne sera pas précisée et la notation (u_n) utilisée.

Partie A : Quelques résultats fondamentaux

Le but de cette partie est essentiellement la démonstration d'inégalités qui seront utilisées dans les parties suivantes, au service de constructions de l'exponentielle. On s' interdit donc tout emploi de propriétés de la fonction exponentielle exp, *de la fonction logarithme* ln *et des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel.*

Par contre, les propriétés des fonctions puissances à exposant rationnel sont supposées connues.

A. I. L'inégalité de Bernoulli

Il s'agit de l'inégalité suivante :

pour tout réel a strictement supérieur à -1 et tout entier naturel n appartenant à $\widehat{\mathbb{N}}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + n\,a$ avec égalité si et seulement si $a = 0$

Démontrer cette inégalité de deux manières différentes, par des méthodes élémentaires. On étudiera le cas d'égalité.

Suggestion : Une méthode possible est de poser $x = 1 + a$ et d'utiliser une factorisation.

A. II. L'inégalité de Cauchy

Il s'agit de l'inégalité suivante :

pour tout entier naturel non nul n, pour tout n-uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$ avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$

encore appelée inégalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique.

1. Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$. On étudiera le cas d'égalité.

2. La première démonstration proposée du cas général est due à Cauchy lui-même.

2.1. Soit $\mathbb{A}$ une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} i) & 1 \in \mathbb{A} \\ ii) & \forall n \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{A} \Rightarrow 2n \in \mathbb{A} \\ iii) & \forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in \mathbb{A} \Rightarrow n \in \mathbb{A} \end{cases}$$

Démontrer que $\mathbb{A} = \mathbb{N}^*$

Indication : on pourra commencer par démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \in \mathbb{A}$.

2.2. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

Indication : pour le passage de n à $2n$, on pourra utiliser le cas $n = 2$ et pour le passage de $n+1$ à n, on pourra généraliser l'égalité : $\dfrac{a + b + \frac{a+b}{2}}{3} = \dfrac{a+b}{2}$.

3. Deuxième démonstration : soit n un entier naturel non nul, et $(x_1, \cdots, x_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs supposés pas tous égaux. On définit une application ϕ de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ en posant $\phi(t) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left[x_k + \frac{t}{n} \sum_{h=1}^{n} (x_h - x_k) \right]$.

3.1. Justifier que, pour tout $t \in [0,1]$, $\phi(t) > 0$.

3.2. Démontrer que ϕ est strictement croissante sur $[0,1]$.

Indication : Utiliser $\left(\dfrac{\phi'}{\phi} \right)'$.

3.3. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

4. La troisième démonstration est plus élaborée (on signale aux candidats que sa recherche n'a aucune incidence sur la suite du problème). Elle repose sur les trois idées suivantes :

4.1. Si les x_k ne sont pas tous égaux, alors soient $m = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k$ et $M = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k$. On a donc $m < M$; si dans le n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ on remplace m et M par $\frac{m+M}{2}$, on obtient un n-uplet différent dont la moyenne arithmétique est la même, et la moyenne géométrique est strictement plus grande.

4.2. L'inégalité de Cauchy dans le cas général se déduit de l'inégalité obtenue dans le cas particulier où on suppose que les x_k vérifient de plus l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

4.3. L'application $\psi : (x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right) \prod_{k=1}^{n-1} x_k$ possède un maximum sur l'ensemble Ω des $(n-1)$-uplets vérifiant $x_1 > 0, \cdots, x_{n-1} > 0, \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k < 1$ atteint uniquement en $\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$.

Démontrer ces trois propriétés, sans faire appel au calcul différentiel à plusieurs variables.

Indication : pour la propriété 3), on pourra commencer par démontrer que le maximum de ψ existe sur l'adhérence de Ω.

5. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

Tournez la page S.V.P.

A. III. Un calcul d'intégrale

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une application de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit F une application de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que f et F satisfont à la condition suivante :

$$\text{pour tout } (x, y) \in [a, b]^2,\ F(y) - F(x) \geqslant (y - x)f(x)$$

1. Démontrer que f est croissante sur $[a, b]$.

2. Démontrer que F est convexe sur $[a, b]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, si $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(a_k) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(a_{k+1})$$

4. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

A. IV. Continuité des applications convexes

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, convexe sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer l'inégalité dite *des pentes* : pour tous réels a, b, c, si $a < b < c$ alors :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Indication : on pourra étudier les limites à droite et à gauche en x_0 arbitraire.

Partie B : Étude de la fonction exponentielle

Comme application des inégalités fondamentales de la partie A, on se propose de construire « à partir de rien » la fonction exponentielle.

On s'interdit donc, dans cette partie, *tout emploi de propriétés de la fonction exponentielle* exp, *de la fonction logarithme* ln, *et par voie de conséquence des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel, à moins qu'elles n'aient préalablement été redémontrées.*

Cette partie fait un usage intensif des inégalités de la partie A, en particulier de l'inégalité de Bernoulli.

1. Soit x un nombre réel fixé ; on note, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, et pour tout entier $n > |x|$, $v_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

1.1. Démontrer que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n>|x|}$ est croissante.

Suggestion : Une méthode est de partir de l'égalité

$$1 + \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right) = (n + 1)\left[1 + \frac{x}{n + 1}\right]$$

1.2. En déduire que la suite $\big(v_n(x)\big)_{n>|x|}$ est décroissante.

1.3. Démontrer que les suites $\big(u_n(x)\big)_{n>|x|}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n>|x|}$ sont convergentes et ont la même limite.

Indication : Démontrer que $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x)\frac{x^2}{n}$.

2. On note $\boldsymbol{e}$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui, à un réel x, associe la limite commune des suites de la question précédente.

2.1. Soient a, b deux réels, a strictement inférieur à b.
Démontrer que la convergence de la suite d'applications $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est uniforme sur $[a, b]$. Que peut-on en déduire pour l'application $\boldsymbol{e}$?

2.2. Démontrer que, pour tout réel x, $1 + x \leqslant \boldsymbol{e}(x)$ et, pour tout réel x strictement inférieur à 1, $\boldsymbol{e}(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

2.3.

2.3.1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{e}(x)$ est non nul et exprimer son inverse à l'aide de $\boldsymbol{e}$.

2.3.2. Soit (ε_n) une suite de nombres réels convergente vers 0. Démontrer que la suite $\left(\left(1 + \dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\right)$ converge vers 1.

2.3.3. En déduire que, pour tous x, y réels, on a : $\boldsymbol{e}(x+y)\boldsymbol{e}(-x)\boldsymbol{e}(-y) = 1$.

2.4. Énumérer les propriétés *usuelles* de la fonction exponentielle et démontrer que l'application $\boldsymbol{e}$ possède bien chacune de ces propriétés. (Propriétés usuelles est à comprendre ici comme propriétés enseignées dans les classes de lycée).

2.5. On pose $\mathrm{e} = \boldsymbol{e}(1)$. Déterminer la valeur décimale approchée par défaut de e à 10^{-1} près. On se gardera bien sûr d'utiliser la touche d'exponentiation ^ ou x^y des calculatrices car elle fait en général appel aux fonctions ln et exp. Toutes les explications utiles sur les moyens de calcul mis en oeuvre pour cette détermination seront fournies.

2.6. Expliquer pourquoi les suites $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$ et $\left((1 - \frac{1}{n})^{-n}\right)$ sont mal adaptées au calcul numérique de valeurs approchées de e.

3. On va voir que la définition précédente de $\boldsymbol{e}$ peut être étendue aux nombres complexes.

3.1. Soit z un nombre complexe, et n un entier naturel non nul. Démontrer que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(n)\frac{z^k}{k!} \quad \text{où on a posé : } a_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ ou } 1 \\ \displaystyle\prod_{h=1}^{k-1}\left(1 - \frac{h}{n}\right) & \text{si } 1 < k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.2. En déduire que, pour tout complexe z, et tous entiers naturels non nuls n, m

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m\right| \leqslant \left|\left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{|z|}{m}\right)^m\right|$$

Indication : on pourra commencer par observer qu'à k fixé, la suite $n \mapsto a_k(n)$ est croissante.

3.3. En déduire, pour tout nombre complexe z, la convergence de la suite de nombres complexes $\left(\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$.

Tournez la page S.V.P.

Partie C : L'exponentielle $\mathbb{R}$-solution de $y' = y, y(0) = 1$

Dans cette partie, on propose à nouveau une étude ex nihilo de la fonction exponentielle ; on s'interdit donc encore tout usage de exp, *de* ln, *et des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel. Est aussi exclu tout emploi de la théorie des équations différentielles linéaires, a fortiori tout théorème d'existence et d'unicité de type Cauchy-Lipschitz ainsi que toute référence aux résultats de la partie précédente.*

Par contre, on utilise librement les résultats de la première partie, en particulier ceux des questions III et IV.

Soient k et a deux réels, k non nul. Il s'agit de démontrer que le problème

$$\mathsf{PC}_{k,a} \quad \begin{cases} y' = k\,y \\ y(0) = a \end{cases}$$

possède une unique $\mathbb{R}$-solution, et que cette unique solution s'exprime simplement en fonction de la solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

On appelle $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ toute application ϕ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que, $\phi(0) = a$ et pour tout réel x, $\phi'(x) = k\,\phi(x)$.

1. Quelle relation existe-t-il entre les $\mathbb{R}$-solutions éventuelles du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ et celles du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$?

2. Soit a un réel quelconque et ϕ une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

i) ϕ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,a}$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} \phi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \text{pour tout réel } x \;\; \phi(x) = a + \displaystyle\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

3. On démontre dans cette question l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

3.1. Quel lien y-a-t-il entre l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ et celle pour le problème $\mathsf{PC}_{1,0}$?

3.2. Soient ϕ une $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ et T un réel fixé. Démontrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout x entre 0 et T, $|\phi(x)| \leqslant M\frac{|x|^n}{n!}$. Que peut-on en déduire pour ϕ?

Indication : On pourra traiter séparément les cas T positif et T négatif.

3.3. En déduire l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

On va maintenant démontrer l'existence d'une $\mathbb{R}$-solution pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

Dans toute la suite, h désigne un réel strictement positif.

4. On définit une application ψ_h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par les deux conditions suivantes :

- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\psi_h(n\,h) = (1+h)^n$;
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la restriction de ψ_h à $[n\,h\,;(n+1)\,h]$ est affine.

4.1. Construire dans le même repère les représentations graphiques de ψ_h sur $[-1, 2]$ pour $h = 1$ et $h = \frac{1}{2}$. On prendra 4 cm comme unité en abscisse et 2 cm en ordonnée.

4.2. Expliquer l'origine graphique de la définition de ψ_h et son lien avec le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$. On se contentera de fournir cette explication pour des réels positifs.

5. On obtient dans cette question quelques propriétés utiles de ψ_h qui seront utilisées dans la suite.

5.1. Démontrer que, pour tout réel x, $\psi_h(x) = (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)} \left(1 + x - h\ \mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right)$.

5.2. Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\psi_h(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\, \mathrm{d}t$.

Indication : on pourra d'abord, pour x et y appartenant à l'intervalle $[n\,h, (n+1)\,h]$, exprimer $\psi_h(y) - \psi_h(x)$ à l'aide d'une intégrale.

5.3. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \psi_h(y) - \psi_h(x) \geqslant (y-x)(1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}$$

5.4. Donner une interprétation graphique de cette inégalité.

5.5. En déduire que ψ_h est croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.

6. On supppose dans cette question que x est un réel strictement positif.

On va démontrer l'existence de la limite $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \psi_h(x)$.

Pour cela, on introduit les deux applications α_x et β_x de $]0,x]$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\alpha_x(h) = \psi_h(x) \text{ et } \beta_x(h) = \psi_h\,[x(1+h)]$$

6.1. Construire, à l'aide de la calculatrice, un échantillon de représentations graphiques des applications α_x et β_x (pour des x fixés à choisir et h variant entre 0 et x). Quelles conjectures peut-on faire sur les propriétés de ces applications?

6.2. Déterminer le sens des variations de α_x sur $]0,x]$.

Indication : on pourra commencer par prouver que α_x est dérivable sur chaque $\left]\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}\right[$, p entier positif non nul, puis démontrer la continuité de α_x sur $]0,x]$.

De façon similaire, on démontre que β_x est croissante sur $]0,x]$. Cette propriété sera admise pour la suite.

6.3. En déduire que, pour tout réel h appartenant à $]0,x]$, on a $\alpha_x(h) \leqslant \beta_x(x)$.

6.4. Conclure.

On démontre par un procédé similaire l'existence de $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \psi_h(x)$ dans le cas où x est strictement négatif. Dans la suite, on admettra ce résultat. Le cas $x = 0$ est banal.

7. On définit donc une application $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en posant $\mathcal{E}(x) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \psi_h(x)$. Il reste à démontrer que $\mathcal{E}$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

7.1. Quelles sont les propriétés de ψ_h qui sont conservées par le passage à la limite sur h?

7.2. Démontrer que, pour tous x, y réels, on a $\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x) \geqslant (y-x)\mathcal{E}(x)$.

7.3. En déduire l'existence d'une solution pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

8. On revient au problème $\mathsf{PC}_{k,a}$.

8.1. Démontrer que le problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ possède une unique $\mathbb{R}$-solution que l'on explicitera en fonction de $\mathcal{E}$.

8.2. En déduire que $\mathcal{E}$ satisfait à la propriété fonctionnelle fondamentale de la fonction exponentielle.

9. Dans cette question, on utilise les résultats de la partie B.

Démontrer que $\mathcal{E} = \boldsymbol{e}$.