Enoncé de la Première Composition

du Capes Externe 1993

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

On désigne par E l'espace vectoriel constitué des fonctions ϕ réelles, continues et bornées sur $[0, +\infty[$, et telles que, pour tout réel strictement positif x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\phi(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

On convient de désigner, en abrégé, par C^∞ l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $]0, +\infty[$.

L'objet du problème est l'étude de l'application linéaire S qui, à tout élément ϕ de E, fait correspondre la fonction $S\phi$ définie sur $]0, +\infty[$ par $S\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\phi(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Les deux premières parties sont consacrées à la détermination de quelques transformées $S\phi$ et à la preuve de l'appartenance de $S\phi$ à C^∞, pour tout élément ϕ de E. Les deux autres parties étudient une suite d'endomorphismes L_n de C^∞ telle que, pour tout élément ϕ de E, et pour tout x strictement positif, on ait :

$$\lim (L_n\, S\phi(x)) = \phi(x).$$

PREMIÈRE PARTIE

I.1. **Appartenance à E.**

a. La fonction constante, égale à 1 sur $[0, +\infty[$, est-elle élément de E ?

b. Montrer que la fonction ϕ_1, définie sur $[0, +\infty[$ par $\phi_1(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$, appartient à E.

c. Soit ψ une fonction continue sur $[0, +\infty[$, qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que ψ est bornée sur $[0, +\infty[$.

Montrer que, si ℓ n'est pas nulle, ψ n'appartient pas à E. ψ appartient-elle à E si $\ell = 0$?

I.2. **Étude de $S\phi_1$.**

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on ait :

$$\frac{t^2(1-x^2)}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{bx^2}{x^2+t^2}.$$

En déduire, pour $x \neq 1$, la valeur de $S\phi_1(x)$.

b. Calculer $S\phi_1(1)$ (on pourra faire une intégration par parties ou utiliser le changement de variable défini par $t = \tan\theta$, $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$).

c. Vérifier que $S\phi_1$ appartient à C^∞.

I.3. **Appartenance de $S\phi$ à C^∞.**

Dans cette question ϕ est un élément quelconque de E, k est un entier strictement positif. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par u_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{t\,\phi(t)}{x^2 + t^2}\,dt$.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $S\phi$.

b. Montrer que, pour tout entier n, la fonction u_n appartient à C^∞.

c. Déterminer deux nombres complexes α et β tels que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on ait :

$$\frac{t}{x^2 + t^2} = \frac{\alpha}{x - it} + \frac{\beta}{x + it}.$$

Utiliser cette égalité pour calculer $\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right)$ et en déduire que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on a : $\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right)\right| \leqslant \frac{k!}{(x^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$.

d. On note $u_n^{(k)}$ la dérivée k-ième de la fonction u_n.
Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe une constante A_k telle que, pour tout $x \geqslant a$ et tout entier n, on ait :

$$|u_n^{(k)}(x)| \leqslant A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

En déduire que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

e. Prouver que la fonction $S\phi$ appartient à C^∞ et que, pour tout entier $k > 0$, on a :

$$(S\phi)^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right)\phi(t)\,dt.$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie on étudie un exemple de détermination de $S\phi$ à l'aide d'une équation différentielle.

II.1. **Définition d'une fonction ϕ_2, élément de E.**

Soit ϕ_2 la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\phi_2(t) = \sin t$.
Montrer que, pour tout nombre positif T, on a :

$$\int_0^T \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\,dt = \frac{-T\cos T}{x^2 + T^2} + \int_0^T \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \cos t\,dt.$$

En déduire que ϕ_2 appartient à E.

II.2. **Détermination et intégration d'une équation différentielle dont $S\phi_2$ est solution.**

a. Prouver que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) = 0.$$

b. En déduire que, sur $]0, +\infty[$, la fonction $S\phi_2$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ (on utilisera I.3.*e.* et on fera deux intégrations par parties successives).

c. Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle précédente sur $]0, +\infty[$.

II.3: **Détermination explicite de $S\phi_2$.**

a. Prouver que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\, dt\right| \leqslant \frac{\pi}{2x}$$

(on pourra utiliser l'égalité obtenue en II.1.). En déduire la limite de $S\phi_2(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente et que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2 + 1)}\, d\lambda .$$

Déduire de cette égalité que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\, dt$ a une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

c. On admet sans démonstration l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$. Expliciter la fonction $S\phi_2$.

TROISIÈME PARTIE

On désigne par T l'endomorphisme de C^∞ qui à un élément f de cet espace associe l'élément Tf défini, pour $x > 0$, par $Tf(x) = -xf'(x)$. L'identité de C^∞ est notée I et les puissances successives de T sont définies par $T^1 = T$, $T^2 = T \circ T, \ldots, T^p = T \circ T^{p-1}$.

Soit G l'espace vectoriel des fonctions réelles de deux variables (x, t) définies sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$ et indéfiniment dérivables par rapport à la première variable. On désigne de même par T_x l'endomorphisme de G qui à un élément g de G associe l'élément $T_x g$ défini, pour $(x, t) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[$, par

$$T_x g(x, t) = -x \frac{\partial g}{\partial x}(x, t).$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $L_n = T \circ \left(I - \frac{T^2}{4}\right) \circ \left(I - \frac{T^2}{4.2^2}\right) \circ \ldots \left(I - \frac{T^2}{4n^2}\right)$ et on définit $L_{n,x}$ en remplaçant dans cette formule T par T_x.

III.1. **Commutation de L_n et de l'intégrale.**

a. Soit k un entier strictement positif. Montrer qu'il existe k réels $\lambda_{k,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, tels que, pour tout élément f de C^∞ et pour tout $x > 0$, on ait :

$$T^k f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k,i}\, x^i f^{(i)}(x).$$

En déduire que pour tout élément ϕ de E et pour tout $x > 0$, on a :

$$T^k S\phi(x) = \int_0^{+\infty} T_x^k \left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) \phi(t)\, dt.$$

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, pour tout élément ϕ de E et pour tout $x > 0$, on a :

$$L_n S\phi(x) = \int_0^{+\infty} L_{n,x} \left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) \phi(t)\, dt.$$

III.2. **Détermination de $L_1 S\phi$.**

a. Soit f un élément de C^∞. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\left(I - \frac{T^2}{4}\right)(f)(x) = f(x) - \frac{xf'(x) + x^2 f''(x)}{4}.$$

b. Déduire de l'égalité précédente $L_{1,x}\left(\frac{1}{x^2+t^2}\right)$ et prouver que, pour tout $x > 0$, on a :

$$L_1 S\phi(x) = 12\int_0^{+\infty} \frac{x^4 t^3}{(x^2+t^2)^4}\phi(t)\,dt.$$

III.3. **Détermination de** $L_n S\phi$.

Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$ par $u(x,t) = \frac{x}{x^2+t^2}$.

a. On suppose t fixé. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$\left(I - \frac{T_x}{2n}\right)(u^{2n})(x,t) = \frac{2t^2 u^{2n}(x,t)}{x^2+t^2}.$$

Montrer ensuite que $\left(I + \frac{T_x}{2n}\right)\left(\frac{u^{2n}}{x^2+t^2}\right)$ s'exprime simplement à l'aide de n et de u^{2n+2}.

En déduire l'expression de $\left(I - \frac{T_x^2}{4n^2}\right)(u^{2n})$ à l'aide de t, de n et de u^{2n+2}.

b. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $x > 0$ et pour tout élément ϕ de E, les formules :

$$L_n S\phi(x) = \frac{2(2n+1)!}{(n!)^2}\int_0^{+\infty} t^{2n+1}u^{2n+2}(x,t)\phi(t)\,dt$$

$$= \frac{2(2n+1)!}{(n!)^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1}\frac{\phi(\lambda x)}{1+\lambda^2}\,d\lambda.$$

QUATRIÈME PARTIE

Dans toute cette partie x est un nombre réel strictement positif *fixé*.

Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose $K_n = \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

IV.1. **Étude d'une suite d'intégrales.**

a. Prouver, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'existence de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty}\frac{(2\lambda)^{2n+1}}{(1+\lambda^2)^{2n+2}}\,d\lambda$.

b. Montrer que, pour tout n, on a :

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}I_{n+1}$$

(on pourra utiliser le changement de variable défini par $\lambda = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\theta \in [0, \pi[$ et faire une intégration par parties).

c. Calculer I_0, I_n, et en déduire la valeur de $K_n I_n$.

Pour l'étude de la limite de $L_n S\phi(x)$, on écrit la formule obtenue à la fin de la troisième partie sous la forme :

$$L_n S\phi(x) = K_n \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x) - \phi(x)}{1+\lambda^2}\, d\lambda + K_n I_n \phi(x).$$

IV.2. **Comportement à l'infini de** $K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda)\, d\lambda$.

Soit a un nombre réel, $0 < a < 1$, et f une fonction continue sur $[0, a]$.

a. Montrer que, pour tout réel $\theta \in]0, 1[$, $\theta^{2n+1} K_n$ a une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$ (on pourra considérer la série de terme général $v_n = \theta^{2n+1} K_n$ et étudier la limite du rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$).

b. En déduire la limite de $K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda)\, d\lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$.

IV.3. **Comportement à l'infini de** $K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda)\, d\lambda$.

Soit b un nombre réel, $b > 1$, et g une fonction continue sur $[0, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |g(\lambda)|\, d\lambda$ soit convergente. Déterminer la limite de $K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda)\, d\lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$.

IV.4. **Détermination de lim** $L_n S\phi(x)$.

Montrer, en utilisant notamment les deux résultats précédents et la continuité de ϕ en x, que

$$K_n \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x) - \phi(x)}{1+\lambda^2}\, d\lambda$$

a une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire le résultat annoncé dans les objectifs du problème.