

**SESSION DE 1994****concours externe  
de recrutement de professeurs certifiés****section mathématiques**

deuxième composition de mathématiques

**durée : 5 heures**

*L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche – éventuellement programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.*

**Tournez la page S.V.P.**

### Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème,  $P$  désigne un plan affine euclidien orienté,  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct de  $P$ . Les coordonnées et les affixes des points de  $P$  (resp. des vecteurs du plan vectoriel associé) sont définies par rapport au repère  $\mathcal{R}$  (resp. à la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ ).

Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux droites de  $P$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , et  $\theta$  un nombre réel. On rappelle que  $\theta$  est une mesure de l'angle orienté du couple de droites  $(D_1, D_2)$  si, et seulement si,  $\theta$  ou  $\theta + \pi$  est une mesure de l'angle orienté du couple de vecteurs  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ .

Étant donné trois droites  $D, D_1, D_2$  du plan  $P$ , on dit que  $D_1$  et  $D_2$  sont symétriquement inclinées sur  $D$  si, et seulement si, les angles orientés des couples de droites  $(D, D_1)$  et  $(D, D_2)$  ont des mesures opposées modulo  $\pi$ .

Le problème est consacré à quelques questions relatives à la notion de points cocycliques. La partie I la relie à la notion de deux droites symétriquement inclinées sur une même troisième. Les parties IV et V étudient plusieurs configurations associées à des points cocycliques d'une conique. Cette étude s'appuie sur la généralisation à une conique quelconque de la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle (parties II et III).

### Preliminaires

1. Soit  $Q(X) = a_0 X^4 + a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4$  un polynôme de degré 4 à coefficients complexes  $a_j$ ,  $0 \leq j \leq 4$ . On note  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ses quatre racines complexes, distinctes ou non, et on pose :

$$\sigma_1 = \sum_{1 \leq j \leq 4} x_j, \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leq j < k \leq 4} x_j x_k, \quad \sigma_3 = \sum_{1 \leq j < k < l \leq 4} x_j x_k x_l, \quad \sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Exprimer, sans démonstration, les nombres complexes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  en fonction des coefficients  $a_0, a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$ .

2. Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux droites de  $P$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . On note  $z_1, z_2$ , les affixes de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . Soit  $\theta$  un nombre réel.

2.1. Donner, sans démonstration, une propriété du nombre complexe  $\frac{z_2}{z_1} e^{-i\theta}$  qui soit équivalente à l'égalité  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \theta (2\pi)$ .

2.2. En déduire une propriété du nombre complexe  $\frac{z_2}{z_1} e^{-i\theta}$  qui soit équivalente à l'égalité :

$$(D_1, D_2) = \theta (\pi).$$

3. Soit  $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

3.1. Préciser, sans démonstration, la nature et les éléments de la transformation  $\phi$  du plan  $P$  définie analytiquement dans le repère  $\mathcal{R}$  par la représentation :  $x' = \lambda x + \alpha, y' = \lambda y + \beta$ .

3.2. Soit  $\Gamma$  une courbe d'équation, dans le repère  $\mathcal{R}$ ,  $f(x, y) = 0$ , où  $f$  désigne une application de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'ensemble  $\Gamma'$  défini par l'équation  $f(\lambda x + \alpha, \lambda y + \beta) = 0$  se déduit de  $\Gamma$  par une transformation qu'on exprimera au moyen de  $\phi$ .

### I. Droites symétriquement inclinées et points cocycliques.

I.1. Soit trois droites  $D, D_1, D_2$  du plan  $P$ ,  $\vec{v}$  un vecteur directeur de  $D$  d'affixe  $z$ ,  $\vec{v}_j$  un vecteur directeur de  $D_j$ , d'affixe  $z_j$ ,  $1 \leq j \leq 2$ .

Montrer, au moyen des préliminaires que  $D_1$  et  $D_2$  sont symétriquement inclinées sur  $D$  si, et seulement si,  $\frac{z_1 z_2}{z^2}$  est réel.

En déduire que, lorsque  $D_1$  et  $D_2$  sont parallèles, elles sont symétriquement inclinées sur  $D$  si, et seulement si, elles sont soit parallèles à  $D$ , soit perpendiculaires à  $D$ .

I.2. Soit  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , quatre points distincts d'un cercle  $C$  du plan  $P$ . Pour  $1 \leq j \leq 4$ , on note  $z_j$  l'affixe de  $A_j$ . On suppose que les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  sont symétriquement inclinées sur une droite  $D$  de  $P$ .

I.2.1. Montrer que  $\frac{(z_3 - z_4)(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}$  est un nombre réel.

I.2.2. Montrer que les droites  $(A_1 A_3)$  et  $(A_2 A_4)$  sont symétriquement inclinées sur  $D$ . En est-il de même pour les droites  $(A_1 A_4)$  et  $(A_2 A_3)$ ?

I.3. Soit  $A_1, A_2, A_3$ , trois points distincts d'un cercle  $C$  du plan  $P$  et  $T$  la tangente en  $A_1$  à  $C$ . Pour  $1 \leq j \leq 3$ , on note  $z_j$  l'affixe de  $A_j$ . On note  $t$  l'affixe d'un vecteur directeur de  $T$ , et on suppose que les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_1 A_3)$  sont symétriquement inclinées sur une droite  $D$  de  $P$ .

I.3.1. Montrer que  $\frac{(z_3 - z_2)t}{(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)}$  est un nombre réel.

I.3.2. Montrer que les droites  $T$  et  $(A_2 A_3)$  sont symétriquement inclinées sur  $D$ .

### II. Puissance d'un point par rapport à une conique.

Soit  $\Gamma$  une conique et  $S$  un point du plan  $P$ . On se propose de définir la notion de puissance du point  $S$  par rapport à la conique  $\Gamma$  en commençant par le cas où  $\Gamma$  est un cercle. Pour cela on considère une droite quelconque  $\Delta$  passant par  $S$ , munie d'un vecteur directeur unitaire  $\vec{u}$  par rapport auquel sont définies les mesures algébriques.

II.1. On suppose, dans cette question II.1. seulement, que  $\Gamma$  est un cercle de centre  $I$  et de rayon  $R, R > 0$ .

II.1.1. On suppose que  $\Delta$  coupe  $\Gamma$  en deux points distincts  $A$  et  $B$  et on pose  $p = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$ . Soit  $A'$  le point de  $\Gamma$  diamétralement opposé à  $A$ . Montrer que  $p = \overline{SA} \cdot \overline{SA'}$ . Exprimer  $p$  en fonction de  $SI$  et de  $R$ .

Le nombre  $p$ , qui ne dépend que de  $S$  et de  $\Gamma$ , s'appelle la puissance du point  $S$  par rapport au cercle  $\Gamma$  et sera noté  $\Gamma(S)$ .

II.1.2. On suppose que  $\Delta$  est tangente à  $\Gamma$  en un point  $M_0$ . Montrer que  $\Gamma(S) = SM_0^2$ .

II.2. On suppose maintenant que  $\Gamma$  n'est pas un cercle. Soit  $e$  son excentricité,  $D$  son axe focal, c'est-à-dire l'axe de symétrie qui contient son (ou ses) foyer(s). On note  $\theta$  une mesure de l'angle orienté du couple de droites  $(D, \Delta)$ .

On se propose de montrer que, lorsque  $\Delta$  coupe  $\Gamma$  en deux points  $A$  et  $B$ , le produit  $(1 - e^2 \cos^2 \theta) \overline{SA} \cdot \overline{SB}$  ne dépend que de  $S$  et de  $\Gamma$ . Pour cela on suppose, dans cette question II.2., le repère  $\mathcal{R}$  choisi de façon que  $D = (O, \vec{i})$ .

II.2.1. Montrer que  $\Gamma$  peut être définie, dans le repère  $\mathcal{R}$ , par l'équation  $f(x, y) = 0$ , avec  $f(x, y) = (1 - e^2)x^2 + y^2 + u_1 x + u_2$ ,  $u_1$  et  $u_2$  désignant deux constantes réelles.

**Tournez la page S.V.P.**

- II.2.2. On note  $(x_0, y_0)$  les coordonnées de S. Soit M un point de  $\Delta$ . On pose  $\lambda = \overline{SM}$ .  
Exprimer les coordonnées  $x$  et  $y$  de M au moyen de  $x_0, y_0, \theta$  et  $\lambda$ . En déduire que M appartient à  $\Gamma$  si, et seulement si,  $\lambda$  est racine d'une équation de la forme  $(1 - e^2 \cos^2 \theta) X^2 + \beta X + \gamma = 0$  où  $\beta$  et  $\gamma$  sont deux réels qu'on exprimera au moyen de  $\theta, x_0, y_0, e, u_1$  et  $u_2$ .
- II.2.3. On suppose que  $\Delta$  coupe  $\Gamma$  en deux points distincts A et B. Montrer que le réel  $p$  défini par  $p = (1 - e^2 \cos^2 \theta) \overline{SA} \cdot \overline{SB}$  ne dépend que de S et de  $\Gamma$  et en donner une expression en fonction de  $x_0, y_0, e, u_1$  et  $u_2$ .  
 $p$  s'appelle la puissance du point S par rapport à la conique  $\Gamma$  et sera noté  $\Gamma(S)$ .
- II.2.4. On suppose que  $\Delta$  est tangente à  $\Gamma$  en un point  $M_0$ . Montrer qu'on a alors  $1 - e^2 \cos^2 \theta \neq 0$ , puis que  $\Gamma(S) = (1 - e^2 \cos^2 \theta) SM_0^2$ .

### III. Lignes de niveau de l'application $S \mapsto \Gamma(S)$ .

Soit  $\Gamma$  une conique du plan P.

A tout réel  $r$  on associe l'ensemble  $\Gamma_r = \{S \in P \mid \Gamma(S) = r\}$ .

On pose  $U = \{r \in \mathbb{R} \mid \Gamma_r = \emptyset\}$ ,  $V = \{r \in \mathbb{R} \mid \Gamma_r \text{ est réduit à un point}\}$ ,  $W = \mathbb{R} \setminus (U \cup V)$ .

III.1. On suppose que  $\Gamma$  est un cercle de centre I et de rayon R. Préciser, au moyen du réel R, les trois ensembles U, V et W et décrire  $\Gamma_r$  pour  $r \in W$ .

III.2. On suppose que  $\Gamma$  n'est pas un cercle.

III.2.1. Montrer que  $\Gamma = \Gamma_0$  et en déduire que  $0 \in W$ .

III.2.2. On suppose que  $\Gamma$  est une ellipse, d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , avec  $0 < b < a$ .

Déterminer les trois ensembles U, V et W, puis montrer que, pour tout réel  $r$  appartenant à W,  $\Gamma_r$  est l'image de  $\Gamma$  par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments.

III.2.3. Répondre aux questions III.2.2. dans le cas où  $\Gamma$  est la parabole d'équation  $y^2 = 2ax$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , avec  $a > 0$ .

III.2.4. On suppose que  $\Gamma$  est une hyperbole, d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , avec  $a > 0$  et  $b > 0$ .

a. Décrire l'ensemble  $\Gamma_{b^2}$ .

b. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma' = \Gamma_{2b^2}$ .

c. On suppose  $r \neq b^2$ . Montrer que, selon la valeur du réel  $r$ ,  $\Gamma_r$  est l'image de  $\Gamma$  ou de  $\Gamma'$  par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments.

### IV. Points cocycliques sur une conique.

Dans toute cette partie,  $\Gamma$  désigne une conique du plan P qui n'est pas un cercle. On note D son axe focal et on considère des points distincts  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sur  $\Gamma$ .

IV.1. On suppose que les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  sont sécantes en un point S.

IV.1.1. Montrer que S est différent de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ .

IV.1.2. Les mesures algébriques sur les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  étant définies par rapport à des vecteurs unitaires, montrer que  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sont cocycliques si, et seulement si,  $\overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2} = \overline{SA_3} \cdot \overline{SA_4}$  (on pourra utiliser II.1.1.).

IV.1.3. Montrer que les points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sont cocycliques si, et seulement si, les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  sont symétriquement inclinées sur la droite D.

IV.2. On suppose les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  parallèles.

IV.2.1. L'équivalence montrée en IV.1.3. est-elle encore vraie (on pourra utiliser I.2.2.) ?

IV.2.2. Montrer que les points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sont cocycliques si, et seulement si, les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  sont perpendiculaires à un même axe de symétrie de  $\Gamma$ .

IV.3. On suppose que la tangente  $T_1$  à  $\Gamma$  en  $A_1$  et la droite  $(A_2 A_3)$  sont sécantes en un point  $S$ . On appelle  $C$  le cercle circonscrit au triangle  $A_1 A_2 A_3$ .

IV.3.1. Montrer que  $S$  est différent de  $A_1, A_2$  et  $A_3$ .

IV.3.2. Les mesures algébriques sur la droite  $(A_2 A_3)$  étant définies par rapport à un vecteur unitaire, montrer que  $T_1$  est la tangente à  $C$  en  $A_1$  si, et seulement si,  $SA_1^2 = \overline{SA_2} \cdot \overline{SA_3}$  (on pourra utiliser II.1.2.).

IV.3.3. Montrer que  $T_1$  est la tangente à  $C$  en  $A_1$  si, et seulement si, les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_1 A_3)$  sont symétriquement inclinées sur la droite  $D$ .

IV.4. On suppose que la tangente  $T_1$  à  $\Gamma$  en  $A_1$  et la tangente  $T_2$  à  $\Gamma$  en  $A_2$  sont sécantes en un point  $S$ .

IV.4.1. Montrer que  $S$  est différent de  $A_1$  et  $A_2$ .

IV.4.2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un cercle  $C$  tangent à  $T_1$  en  $A_1$  et à  $T_2$  en  $A_2$  ;

(ii)  $SA_1 = SA_2$  ;

(iii)  $T_1$  et  $T_2$  sont symétriquement inclinées sur la droite  $D$ .

IV.4.3. On suppose que les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus sont satisfaites. On note  $D_1$  la parallèle à  $D$  passant par  $S$ ,  $\phi_1$  la réflexion d'axe  $D_1$ ,  $D'_1$  la perpendiculaire à  $D$  passant par  $S$ ,  $\phi'_1$  la réflexion d'axe  $D'_1$ . On pose  $\phi = \phi_1 \circ \phi'_1$ .

a. Reconnaître la transformation  $\phi$ .

b. Quelle est l'image de  $T_1$  par  $\phi_1$  ? En déduire que  $\phi_1(A_1)$  appartient à l'ensemble  $\{A_2, \phi(A_2)\}$ .

c. Montrer que  $A_2$  appartient à l'ensemble  $\{\phi_1(A_1), \phi'_1(A_1)\}$ .

IV.4.4. Montrer que les propriétés (i), (ii) et (iii) de la question IV.4.2. sont encore équivalentes à : la droite  $(A_1 A_2)$  est perpendiculaire à un axe de symétrie de  $\Gamma$ .

## V. Cas de l'ellipse.

Dans cette partie,  $\Gamma$  désigne une ellipse, d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , avec  $0 < b < a$ . On pose  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

On note ici  $U$  l'ensemble des nombres complexes de module 1 et, à tout élément  $u$  de  $U$ , on associe le point  $M(u)$  du plan  $P$  de coordonnées  $x = a \frac{u + \bar{u}}{2}$ ,  $y = b \frac{u - \bar{u}}{2i}$ .

V.1. Montrer que l'application  $u \mapsto M(u)$  est une bijection de  $U$  sur  $\Gamma$ .

V.2.  $C$  désigne un cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

V.2.1. Déterminer un polynôme  $Q_C(X)$  de degré 4, à coefficients complexes, de coefficient dominant  $c^2$ , dont les autres coefficients sont des polynômes en  $a, b, \alpha, \beta, \gamma$  qu'on précisera, et qui vérifie la propriété suivante :  $(\forall u, u \in U)[(M(u) \in C \cap \Gamma) \iff Q_C(u) = 0]$ .

Le polynôme  $Q_C(X)$  ainsi construit est appelé polynôme associé au cercle  $C$ .

V.2.2. On suppose que  $C \cap \Gamma$  est un ensemble de quatre points (distincts)  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$ . Pour  $1 \leq j \leq 4$ , on pose  $M_j = M(u_j)$ ,  $u_j \in U$ .

Montrer que  $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$ .

**Tournez la page S.V.P.**

V.3. Soit  $M_1 = M(u_1)$ ,  $M_2 = M(u_2)$ ,  $M_3 = M(u_3)$  et  $M_4 = M(u_4)$ ,  $u_j \in U$  pour  $1 \leq j \leq 4$ , quatre points distincts de  $\Gamma$ . Montrer que ces points sont cocycliques si, et seulement si,  $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$ .

V.4. Soit  $M_0 = M(u_0)$  un point de  $\Gamma$ ,  $u_0 \in U$ .

V.4.1. Montrer qu'il existe un unique cercle  $C_0$  tel que  $u_0$  soit racine d'ordre de multiplicité au moins égal à 3 du polynôme  $Q_{C_0}(X)$  associé à  $C_0$ .

$C_0$  s'appelle le cercle osculateur à l'ellipse  $\Gamma$  au point  $M_0$ .

V.4.2. Exprimer, en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $u_0$ , les coordonnées du centre  $\Omega_0$  de  $C_0$ .

V.4.3. Montrer que  $C_0$  et  $\Gamma$  ont la même tangente  $T_0$  au point  $M_0$ .

V.4.4. Comment doit-on choisir  $M_0$  sur  $\Gamma$  pour avoir  $C_0 \cap \Gamma = \{M_0\}$ ?

V.4.5. On suppose que  $M_0$  n'est pas choisi de cette manière.

Montrer que  $C_0$  recoupe  $\Gamma$  en un unique point  $M_1$  (différent de  $M_0$ ), et que les droites  $T_0$  et  $(M_0 M_1)$  sont symétriquement inclinées sur l'axe focal  $D$  de  $\Gamma$ .

V.4.6. On note  $E$  l'ensemble de tous les points  $M$  de  $\Gamma \setminus \{M_0\}$  qui sont tels que le cercle osculateur en  $M$  à  $\Gamma$  passe par  $M_0$ . Quel est le cardinal de  $E$ ? Montrer que l'ensemble  $E \cup \{M_0\}$  est contenu dans un cercle (on distinguera les cas où  $M_0$  est choisi comme en V.4.4. et ceux où il est choisi comme en V.4.5.).