OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Ce problème a pour objet l'étude de propriétés de majoration et de minoration de solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre.

$I = [\alpha, \beta]$ désigne un intervalle de $\mathbf{R}$. On note $C(I)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues définies sur I. Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on note $C^p(I)$ le sous-espace de $C(I)$ formé des fonctions p fois continûment dérivables et $C^p_0(I)$ le sous-espace de $C^p(I)$ formé des fonctions nulles en α et β.

Trois fonctions u, v et w appartenant à $C(I)$ étant fixées, on leur associe le problème différentiel **(P)** suivant :

> Étant donné $(\lambda, \mu, f) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times C(I)$, trouver $y \in C^2(I)$ vérifiant :
>
> $$\begin{cases} \forall t \in I, \quad u(t)\, y''(t) + v(t)\, y'(t) + w(t)\, y(t) = f(t) \\ y(\alpha) = \lambda, \quad y(\beta) = \mu. \end{cases}$$

On dira que **(P)** vérifie la propriété **(P.M)** si :

> Il existe des fonctions positives $a \in C(I)$ et $b \in C(I)$ et des réels positifs A et B tels que, quelle que soit la donnée (λ, μ, f), toute solution y de **(P)** vérifie :
>
> $$\forall t \in I, \quad y(t) \leqslant a(t) \max\left(A\lambda,\ B\mu,\ \sup_{s \in I} (b(s) f(s))\right).$$

I. ÉTUDE D'UNE ÉQUATION À COEFFICIENTS CONSTANTS

On pose $I = [0, 1]$ et on considère le problème différentiel $(\mathbf{P}_1)$ associé aux fonctions u, v et w définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = c^2$, avec $c > 0$.

I.1. Résolution de l'équation homogène.

Montrer que les fonctions Y_0 et Y_1 définies par $Y_0(t) = \operatorname{sh}(ct)$ et $Y_1(t) = \operatorname{sh}(c(1-t))$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2 y = 0$.

I.2. Résolution du problème $(\mathbf{P}_1)$.

I.2.1. Une fonction $f \in C(I)$ étant fixée, déterminer en fonction de Y_0 et Y_1 les solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2 y = f(t)$. [On pourra utiliser la méthode de variation des constantes. On rappelle que $\operatorname{sh}(p+q) = \operatorname{sh}(p)\operatorname{ch}(q) + \operatorname{ch}(p)\operatorname{sh}(q)$].

I.2.2. Montrer que $(\mathbf{P}_1)$ a une unique solution qui se met sous la forme :

$$y(t) = \frac{\operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c}\left[\mu + \frac{1}{c}\int_t^1 f(s)\operatorname{sh}(c(1-s))\,\mathrm{d}s\right] + \frac{\operatorname{sh}(c(1-t))}{\operatorname{sh} c}\left[\lambda + \frac{1}{c}\int_0^t f(s)\operatorname{sh}(cs)\,\mathrm{d}s\right].$$

I.3. Démonstration de la propriété (P.M) pour le problème $(\mathbf{P}_1)$.

On note M la borne supérieure de f sur I.

I.3.1. Utiliser le résultat du I.2.2. pour établir l'inégalité suivante :

$$\forall t \in I, \quad y(t) \leqslant \frac{\operatorname{sh}(c(1-t)) + \operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c} \max(\lambda, \mu) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}(c(1-t)) + \operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c}\right) \frac{M}{c^2}.$$

I.3.2. Exprimer $\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q$ en fonction de $\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ainsi que $\operatorname{sh}(2p)$ en fonction de $\operatorname{sh} p$ et $\operatorname{ch} p$.

I.3.3. Pour $t \in I$, montrer que $\dfrac{\operatorname{sh}(c(1-t)) + \operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c}$ reste compris entre 0 et 1. En déduire que $(\mathbf{P}_1)$ vérifie la propriété (P.M) avec $a = 1$, $b = \dfrac{1}{c^2}$, $A = B = 1$.

I.3.4. Étant donné une fonction $h \in C(I)$, comparer $\inf\limits_{s \in I} (-h(s))$ avec $\sup\limits_{s \in I} (h(s))$. En déduire une propriété de minoration des solutions de $(\mathbf{P}_1)$ sur le modèle de (P.M).

I.4. Extension à un intervalle quelconque.

On considère plus généralement un problème différentiel $(\hat{\mathbf{P}}_1)$ de même type, avec $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = c^2$, mais défini sur $I = [\alpha, \beta]$.

Montrer, en faisant le changement de variable affine $t = \alpha + (\beta - \alpha)s$, que $(\hat{\mathbf{P}}_1)$ vérifie (P.M).

II. ÉTUDE D'UNE ÉQUATION À COEFFICIENTS NON CONSTANTS

On prend $I = [\alpha, \beta]$, avec $0 < \alpha < \beta$, et on considère le problème différentiel $(\mathbf{P}_2)$ associé aux fonctions u, v et w définies par $u(t) = -t^2$, $v(t) = -2t$ et $w(t) = 1$.

II.1. Démonstration de la propriété (P.M) pour le problème $(\mathbf{P}_2)$.

II.1.1. Déterminer $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que, si y est solution de l'équation différentielle

$$-t^2 y'' - 2ty' + y = f(t),$$

alors la fonction z définie par $z(x) = e^{-\gamma x} y(e^x)$ est solution d'une équation différentielle de la forme $-z'' + c^2 z = g(x)$. On précisera la valeur de la constante c et la relation entre les fonctions f et g.

II.1.2. Déduire du I.4. que le problème $(\mathbf{P}_2)$ vérifie (P.M) (on précisera les fonctions a et b et les constantes A et B).

II.1.3. Formuler et démontrer une propriété de minoration des solutions de $(\mathbf{P}_2)$.

Tournez la page S.V.P.

II.2. **Solution développable en série entière.**

On cherche à déterminer et à majorer les solutions de l'équation différentielle

$$- t^2 y'' - 2ty' + y = \arctan t$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0.

II.2.1. On suppose qu'une solution y de l'équation différentielle est, sur un intervalle $]-R, R[$, somme d'une série entière $\sum_{p \geq 0} a_p t^p$.

Montrer que $a_{2k} = 0$ et exprimer a_{2k+1} en fonction de k.

II.2.2. Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ?

Conclure sur l'existence d'une solution développable en série entière au voisinage de 0.

II.2.3. La série est-elle uniformément convergente sur $[-1, 1]$? Les fonctions dérivées y' et y'' sont-elles sommes des séries dérivées sur $[-1, 1]$?

II.2.4. Pour n donné et $t \in [0, 1[$, trouver un majorant indépendant de t de l'erreur commise en remplaçant $y(t)$ par la somme partielle $\sum_{0 \leq k \leq n} a_{2k+1} t^{2k+1}$. Déterminer une valeur de n qui assure que cette erreur reste inférieure à 10^{-5}. Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près de $\lambda = y\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\mu = y\left(\frac{2}{3}\right)$.

II.2.5. Utiliser II.1. pour obtenir un majorant et un minorant de y sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

III. UNE FAMILLE DE PROBLÈMES VÉRIFIANT (P.M)

On considère dans cette partie les problèmes différentiels **(P)** sur $I = [\alpha, \beta]$, pour lesquels les fonctions u et v sont définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et la fonction w est strictement positive. On notera $(\mathbf{P}_3)$ un tel problème.

III.1. **Existence et unicité d'une solution d'un problème $(\mathbf{P}_3)$.**

III.1.1. Justifier que l'équation différentielle $- y'' + w(t) y = 0$ admet une unique solution Y_0 définie sur I vérifiant $Y_0(\alpha) = 0$ et $Y'_0(\alpha) = 1$ ainsi qu'une unique solution Y_1 définie sur I vérifiant $Y_1(\alpha) = 1$ et $Y'_1(\alpha) = 0$.

III.1.2. Montrer, en étudiant l'intégrale $\int_\alpha^\beta (- Y''_0(s) + w(s) Y_0(s)) Y_0(s) \, ds$, que $Y_0(\beta)$ n'est pas nul.

III.1.3. Montrer que la fonction $Y_0 Y'_1 - Y_1 Y'_0$ est constante sur I.

III.1.4. Soit $f \in C(I)$. Exprimer en fonction de Y_0, Y_1 et f la solution générale de l'équation différentielle $- y'' + w(t) y = f(t)$.

III.1.5. Démontrer que, quelle que soit la donnée (λ, μ, f), le problème $(\mathbf{P}_3)$ a toujours une solution unique.

III.2. **Démonstration de la propriété (P.M) pour un problème $(\mathbf{P}_3)$.**

On note y la solution du problème $(\mathbf{P}_3)$ correspondant à une donnée (λ, μ, f).

III.2.1. Montrer que, quelle que soit la fonction $z \in C_0^1(I)$, on a :

$$\int_\alpha^\beta y'(s)\, z'(s)\, ds + \int_\alpha^\beta w(s)\, y(s)\, z(s)\, ds = \int_\alpha^\beta f(s)\, z(s)\, ds.$$

III.2.2. Soit G une fonction réelle, définie et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Vérifier que $t\,G(t) \geqslant 0$ quel que soit $t \in \mathbf{R}$. Montrer que, si la constante réelle K vérifie $K \geqslant \max(\lambda, \mu)$, alors la fonction z définie sur I par $z(t) = G(y(t) - K)$ appartient à $C_0^1(I)$.

III.2.3. Montrer que, si K vérifie $K \geqslant \max(\lambda, \mu)$, on a :

$$\int_\alpha^\beta y'^2(s)\, G'(y(s) - K)\, ds + \int_\alpha^\beta w(s)\,(y(s) - K)\, G(y(s) - K)\, ds$$
$$= \int_\alpha^\beta (f(s) - Kw(s))\, G(y(s) - K)\, ds.$$

En déduire que, si K est assez grand pour que $f(t) - Kw(t) \leqslant 0$ quel que soit $t \in I$, alors on a $y(t) \leqslant K$ quel que soit $t \in I$.

III.2.4. Démontrer que $(\mathbf{P}_3)$ vérifie **(P.M)** (on précisera les fonctions a et b et les constantes A et B). Formuler et démontrer une propriété de minoration des solutions de $(\mathbf{P}_3)$.

III.3. **D'autres problèmes vérifiant (P.M).**

On considère dans cette question des problèmes différentiels **(P)** sur $I = [\alpha, \beta]$ pour lesquels les fonctions u et v sont toujours définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$, mais pour lesquels la fonction w est de signe quelconque. On note $(\mathbf{P}_4)$ un tel problème.

On fixe h une fonction strictement positive appartenant à $C^2(I)$ et telle que $h(\alpha) = h(\beta) = 1$. On note k une primitive de $\dfrac{1}{h^2}$, $\alpha' = k(\alpha)$ et $\beta' = k(\beta)$.

III.3.1. Justifier que k admet une fonction réciproque k^{-1} et faire dans $(\mathbf{P}_4)$ le changement de fonction défini par $y(t) = h(t)\, z(k(t))$.

III.3.2. Démontrer que, si h est telle que la fonction $-h'' + wh$ soit strictement positive, alors $(\mathbf{P}_4)$ vérifie **(P.M)** et a, quelle que soit la donnée (λ, μ, f), une solution unique.

III.3.3. *Application :* on suppose que la fonction $w + \dfrac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$ est strictement positive.

Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que l'on ait simultanément $m < \dfrac{\pi}{\beta - \alpha}$ et $w + m^2 > 0$.

Montrer que la fonction h définie par $h(t) = \dfrac{\cos m\left(t - \dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\cos m\,\dfrac{\beta - \alpha}{2}}$ vérifie toutes les conditions précédentes. Conclure.

Tournez la page S.V.P.

IV. UNICITÉ DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES VÉRIFIANT (P.M)

IV.1. Unicité des solutions.

Soit **(P)** un problème différentiel sur $I = [\alpha, \beta]$ vérifiant **(P.M)**.

IV.1.1. On note y_1 et y_2 des solutions de **(P)** correspondant à des données (λ_1, μ_1, f_1) et (λ_2, μ_2, f_2). Montrer que si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, $\mu_1 \leqslant \mu_2$ et $f_1 \leqslant f_2$, on a alors $y_1 \leqslant y_2$.

IV.1.2. En déduire que si **(P)** a une solution pour une donnée (λ, μ, f), alors cette solution est unique.

IV.2. Un contre-exemple.

Montrer que le problème différentiel **(P)** sur $I = [\alpha, \beta]$ associé aux fonctions u, v et w définies par

$u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = -\dfrac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$ ne vérifie pas **(P.M)**.