NOTATIONS DU PROBLÈME

Soit Π un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On notera d la distance sur Π. Si $\mathscr{R}$ est un sous-ensemble non vide de Π et M un point de Π, on notera $d(M, \mathscr{R})$ la distance de M à $\mathscr{R}$, définie par $d(M, \mathscr{R}) = \inf_{N \in \mathscr{R}} d(M, N)$. Étant donné un point M de Π et un réel positif r, on notera $\overline{B}(M; r)$ le disque fermé de centre M et de rayon r et $C(M; r)$ le cercle de centre M et de rayon r. Si r est strictement positif, on notera $B(M; r)$ le disque ouvert de centre M et de rayon r. Étant donné deux points A et B de Π, on note $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B et on note $]A, B[$ ce segment privé de ses extrémités.

La frontière d'un sous-ensemble $\mathscr{R}$ de Π sera notée $\partial\mathscr{R}$: on rappelle qu'un point M appartient à $\partial\mathscr{R}$ si et seulement si tout disque ouvert de centre M contient au moins un point appartenant à $\mathscr{R}$ et au moins un point n'appartenant pas à $\mathscr{R}$. On a en particulier $\partial\overline{B}(M; r) = \partial B(M; r) = C(M; r)$.

Soit $\mathscr{R}$ un sous-ensemble borné non vide de Π. Pour tout point M de Π, on notera $n(M)$, avec éventuellement $n(M) = \infty$, le nombre des points T de $\partial\mathscr{R}$ tels que $d(M, \partial\mathscr{R}) = d(M, T)$. On appellera squelette de $\mathscr{R}$, et on notera $sq(\mathscr{R})$, le sous-ensemble des points M de $\mathscr{R}$ tels que $n(M) \geqslant 2$.

I. EXEMPLES DE SQUELETTES

I.1. Squelette d'un carré.

Dans cette question on désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des points M du plan Π dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient $|x| < 1$ et $|y| < 1$. On note A, B, C et D les points de coordonnées respectives $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ et $(1, -1)$.

I.1.1. Démontrer que $\partial\mathscr{R}$ est la réunion des quatre segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$.

I.1.2. Démontrer que si un point M de coordonnées (x, y) est intérieur au triangle OAD, on a alors $d(M, \partial\mathscr{R}) = 1 - x$ et $n(M) = 1$.

I.1.3. Démontrer que si un point M de coordonnées (x, y) appartient à $]O, A[$, on a alors $d(M, \partial\mathscr{R}) = 1 - x = 1 - y$ et $n(M) = 2$.

I.1.4. Calculer $n(O)$.

I.1.5. Démontrer que $sq(\mathscr{R}) =]A, C[\cup]B, D[$.

I.1.6. Démontrer que le squelette de l'intérieur d'un carré est la réunion de ses diagonales, sommets non compris.

I.2. Squelette d'un disque.

Dans cette question on désigne par $\mathscr{R}$ le disque ouvert $B(A; r)$.

I.2.1. Démontrer que si un point M appartient à $\mathscr{R}$ et est différent de A, on a alors $n(M) = 1$.

I.2.2. Calculer $n(A)$.

I.2.3. Quel est le squelette de $\mathscr{R}$?

I.3. Squelette d'un triangle.

Soit A, B et C trois points non alignés du plan Π. Un point du plan sera repéré par ses coordonnées barycentriques (α, β, γ) relativement aux points A, B et C, normalisées par $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Dans cette question, on désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des points intérieurs au triangle ABC, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées barycentriques strictement positives. On notera $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$ et S l'aire du triangle. On admet que $\partial\mathscr{R} = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, A]$.

I.3.1. Soit M un point de $\mathscr{R}$ de coordonnées barycentriques (α, β, γ) relativement aux points A, B et C. Exprimer la distance de M à la droite (B, C) en fonction de a, α et S.

I.3.2. En déduire les coordonnées barycentriques du point I, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

I.3.3. Démontrer qu'un point M appartient à l'intérieur du triangle IBC si et seulement si

$$\frac{\alpha}{a} < \min\left(\frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}\right).$$

I.3.4. Démontrer que, si M appartient à l'intérieur du triangle IBC, le produit scalaire $\overline{\mathrm{BM}} \cdot \overline{\mathrm{BC}}$ est strictement positif. En déduire que $d(M, [B, C]) = d(M, (B, C))$ et que $n(M) = 1$.

I.3.5. Décrire le squelette de $\mathscr{R}$.

I.4. Squelette d'un parallélogramme.

On suppose le plan Π orienté. Soit A, B, C et D quatre points de Π tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $d(A, B) = 2\, d(A, D)$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) > 0$.

I.4.1. Déterminer une mesure des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$.

Dessiner un parallélogramme ABCD en indiquant l'orientation sur la figure.

I.4.2. Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des points intérieurs au parallélogramme ABCD. On admet que $\partial\mathscr{R} = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, D] \cup [D, A]$.

Décrire $\mathrm{sq}(\mathscr{R})$ sans expliciter votre démonstration et représenter $\mathrm{sq}(\mathscr{R})$ sur la figure de la question précédente.

I.4.3. $\mathrm{sq}(\mathscr{R})$ est une réunion de 5 segments, privée de 4 points. Calculer la longueur totale de $\mathrm{sq}(\mathscr{R})$ en fonction de $l = d(A, D)$.

I.5. Squelette d'un domaine elliptique.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a > b > 0$. On désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des points M de Π dont les coordonnées (x, y) vérifient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$. On admet que $\partial\mathscr{R}$ est l'ellipse de centre O, de demi-grand axe a et de demi-petit axe b admettant l'axe des x comme axe principal. On désigne par A et A′ les sommets du grand axe de cette ellipse, l'abscisse de A étant positive.

I.5.1. Déterminer le lieu géométrique $\mathscr{V}$ des points d'intersection de la droite (A, A′) avec la normale en M à $\partial\mathscr{R}$ quand M décrit $\partial\mathscr{R} - \{A, A'\}$.

I.5.2. Démontrer que $\mathrm{sq}(\mathscr{R})$ est un segment privé de ses extrémités.

I.6. Squelette d'une tête de chat.

Soit B le point de coordonnées (0, 1) et U le point de coordonnées (0, 2). Les tangentes issues de U au cercle C (O; 1) rencontrent C (O; 1) en T et T′, l'abscisse de T étant positive. La parallèle à la droite (U, T′) menée de B coupe (U, T) en K et la parallèle à (U, T) menée de B coupe (U, T′) en K′. On désigne par Γ la courbe simple fermée constituée par les segments [T′, K′], [K′, B], [B, K], [K, T] et l'arc du cercle C (O; 1) d'extrémités T et T′ ne contenant pas B. On note $\mathscr{R}$ la région ouverte intérieure à Γ et on admet que $\partial\mathscr{R} = \Gamma$.

Tournez la page S.V.P.

I.6.1. Démontrer que $\mathrm{sq}(\mathscr{R})$ est la réunion de deux segments et de deux arcs de conique, privée de 2 points. Déterminer les excentricités, les foyers et les directrices des deux coniques.

I.6.2. Démontrer que $\mathrm{sq}(\mathscr{R})$ admet une tangente en chacun de ses points, sauf un.

I.6.3. Calculer la longueur de $\mathrm{sq}(\mathscr{R})$ à 10^{-4} près.

II. UNE PROPRIÉTÉ DES SQUELETTES

Soit $\mathscr{R}$ un ouvert borné non vide de Π.

II.1. Disques contenus dans $\mathscr{R}$.

II.1.1. Démontrer que $\partial\mathscr{R}$ est un compact non vide, que $\mathscr{R} \cap \partial\mathscr{R}$ est vide et que la fermeture $\overline{\mathscr{R}}$ de $\mathscr{R}$ est compacte et est égale à $\mathscr{R} \cup \partial\mathscr{R}$.

II.1.2. On note φ l'application de Π dans l'ensemble des réels, définie par $\varphi(M) = d(M, \partial\mathscr{R})$. Démontrer que φ est continue.

II.1.3. Démontrer que, pour tout point M de $\mathscr{R}$, la boule ouverte $B(M; \varphi(M))$ est contenue dans $\mathscr{R}$.

II.1.4. Démontrer que, pour tout point M de $\mathscr{R}$ et tout réel $r > 0$, si la boule fermée $\overline{B}(M; r)$ est contenue dans $\mathscr{R}$, alors $\varphi(M) > r$.

En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{R}$, la boule fermée $\overline{B}(M; \varphi(M))$ rencontre $\partial\mathscr{R}$ en au moins un point F.

II.2. Comment retrouver $\mathscr{R}$ à partir de son squelette et de l'application φ ?

Soit M_0 un point fixé de $\mathscr{R}$ et r un réel strictement positif tel que $\overline{B}(M_0; r) \subset \mathscr{R}$. On note $\mathscr{R}_0$ le sous-ensemble des points M de $\mathscr{R}$ tels que $\overline{B}(M_0; r) \subset \overline{B}(M; \varphi(M))$.

II.2.1. On suppose que M appartient à $\mathscr{R}_0$ et que $\overline{B}(M; \varphi(M)) \cap \partial\mathscr{R}$ ne contient qu'un seul point F. Démontrer que, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout point P de $C(M; \varphi(M))$ vérifiant $d(F, P) \geqslant \varepsilon$, on ait $\varphi(P) > \alpha$.

En déduire, en choisissant ε assez petit, qu'il existe un point M' de la demi-droite d'origine F passant par M, appartenant à $\mathscr{R}_0$ et tel que $\varphi(M') > \varphi(M)$.

II.2.2 Démontrer que la restriction de l'application φ à $\mathscr{R}_0$ atteint sa borne supérieure en un point S_0 de $\mathscr{R}_0$.

II.2.3. Démontrer que S_0 appartient à $\mathrm{sq}(\mathscr{R})$.

II.2.4. Démontrer que $\mathscr{R} = \bigcup_{S \in \mathrm{sq}(\mathscr{R})} B(S; \varphi(S))$.