SESSION DE 1998

concours externe de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche - éventuellement programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Document interdits.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS DU PROBLÈME

$\mathcal{A}$ désigne un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct et $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel associé à $\mathcal{A}$. On note $\vec{x} \cdot \vec{y}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\mathcal{E}$.

Si ψ est un endomorphisme linéaire de $\mathcal{E}$, on note ψ^* l'endomorphisme adjoint de ψ, c'est-à-dire l'unique endomorphisme tel qu'on ait $\vec{x} \cdot \psi(\vec{y}) = \psi^*(\vec{x}) \cdot \vec{y}$ quels que soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathcal{E}$. Un endomorphisme ψ est dit symétrique si et seulement si $\psi^* = \psi$.

On réservera le nom de triangle aux triangles non dégénérés, c'est-à-dire dont les trois sommets sont distincts et non alignés.

On appelle coordonnées barycentriques d'un point M relativement à un triangle ABC, les trois nombres réels λ, μ et ν tels que $\lambda + \mu + \nu = 1$ et que M soit le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients λ, μ et ν. On rappelle qu'un point M est intérieur au triangle ABC si et seulement si ses coordonnées barycentriques relativement au triangle sont strictement positives.

Les parties I et II sont indépendantes.

0. PRÉLIMINAIRES

0.1. Montrer qu'un endomorphisme linéaire ψ de $\mathcal{E}$ est symétrique s'il existe une base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de $\mathcal{E}$ telle que $\vec{u} \cdot \psi(\vec{v}) = \psi(\vec{u}) \cdot \vec{v}$.

0.2. Montrer que l'inverse d'un automorphisme linéaire symétrique de $\mathcal{E}$ est symétrique.

0.3. Soit ABC un triangle et M un point du plan. Montrer que si λ, μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda \overrightarrow{MA} + \mu \overrightarrow{MB} + \nu \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

I. POINTS ISOGONAUX RELATIVEMENT À UN TRIANGLE

Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{A}$. On note a, b et c les affixes des points A, B et C, et P le polynôme unitaire ayant a, b et c pour racines. Deux points M et N, distincts ou confondus, sont dits isogonaux (resp. strictement isogonaux) relativement à ce triangle s'ils sont distincts de A, B et C et si on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}) \ [\text{mod } \pi] \ (\text{resp. } [\text{mod } 2\pi])\,;$$
$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}) \ [\text{mod } \pi] \ (\text{resp. } [\text{mod } 2\pi])\,;$$
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}) \ [\text{mod } \pi] \ (\text{resp. } [\text{mod } 2\pi]).$$

I.1. Soit M et N deux points distincts ou confondus, d'affixes respectives m et n, et soit Q le polynôme $Q(z) = (z-m)(z-n)$. Montrer que M et N sont isogonaux relativement au triangle ABC si et seulement si il existe des nombres réels non nuls α, β et γ tels que $Q(a) = \alpha P'(a)$, $Q(b) = \beta P'(b)$ et $Q(c) = \gamma P'(c)$ et que ces points sont strictement isogonaux si et seulement si α, β et γ sont strictement positifs.

I.2. On suppose que les points M et N, d'affixes m et n, sont isogonaux relativement au triangle ABC.

I.2.1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{Q(z)}{P(z)}$.

En déduire que les nombres α, β et γ de la question précédente vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

I.2.2. Établir que $\dfrac{\alpha}{m-a} + \dfrac{\beta}{m-b} + \dfrac{\gamma}{m-c} = 0$ et $\dfrac{\alpha}{n-a} + \dfrac{\beta}{n-b} + \dfrac{\gamma}{n-c} = 0$.

I.2.3. Exprimer les coordonnées barycentriques des points M et N relativement au triangle ABC. En déduire que ces points appartiennent au complémentaire dans $\mathcal{A}$ de la réunion des droites (AB), (BC) et (CA) et qu'ils sont strictement isogonaux si et seulement si ils appartiennent à l'intérieur du triangle ABC.

I.3. Soit α, β et γ trois réels non nuls, de somme égale à 1. On pose :

$$Q(z) = \alpha(z-b)(z-c) + \beta(z-a)(z-c) + \gamma(z-a)(z-b).$$

Soit m et n les racines de ce polynôme, avec éventuellement $m = n$. Montrer que les points M et N d'affixes respectives m et n sont isogonaux relativement au triangle ABC.

I.4. Soit M un point du plan $\mathcal{A}$. On note m son affixe et (λ, μ, ν) ses coordonnées barycentriques relativement au triangle ABC.

I.4.1. Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe un point N tel que M et N soient isogonaux relativement au triangle ABC est que l'on ait :

$$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad \nu \neq 0 \qquad \textbf{(C1)}$$

$$\lambda\,|m-a|^2 + \mu\,|m-b|^2 + \nu\,|m-c|^2 \neq 0. \qquad \textbf{(C2)}$$

I.4.2. Montrer que si M vérifie ces conditions, il existe un point N et un seul tel que M et N soient isogonaux relativement au triangle ABC.

I.4.3. Justifier que tout point M de l'intérieur Δ du triangle ABC vérifie les conditions du I.4.1. et que le point N associé à M appartient à Δ. Montrer que l'application g qui associe N à M est un difféomorphisme involutif de Δ sur lui-même.

I.4.4. Montrer que la condition **(C2)** est équivalente à :

$$\det \begin{vmatrix} m-a & m-b & m-c \\ \overline{m}-\overline{a} & \overline{m}-\overline{b} & \overline{m}-\overline{c} \\ |m-a|^2 & |m-b|^2 & |m-c|^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Développer ce déterminant [on pourra, pour alléger les calculs, supposer que l'origine est en A, c'est-à-dire faire $a = 0$].

I.4.5. Décrire l'ensemble des points $\mathcal{A}$ vérifiant les conditions du I.4.1.

II. TRIANGLES ORTHOLOGIQUES

Étant donné deux triangles ABC et A′B′C′ du plan $\mathcal{A}$, on note :

– δ_A, δ_B et δ_C les droites passant respectivement par A, B et C et perpendiculaires respectivement aux droites (B′C′), (C′A′) et (A′B′) ;

– $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$ les droites passant respectivement par A′, B′ et C′ et perpendiculaires respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) ;

– f l'application affine de $\mathcal{A}$ dans lui-même transformant A en A′, B en B′ et C en C′ et φ l'application linéaire associée à f.

On dit que le triangle A′B′C′ est <u>orthologique</u> au triangle ABC si les droites δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes.

II.1. Soit ABC et A′B′C′ deux triangles du plan $\mathcal{A}$.

II.1.1. Montrer que l'application Φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\Phi(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{A'B'}$$

est constante sur $\mathcal{A}$.

II.1.2. Montrer que cette constante est égale à $\overrightarrow{CA} \cdot \left([\varphi - \varphi^*](\overrightarrow{AB}) \right)$.

II.1.3. On suppose que le triangle $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC et on note O le point de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C. Montrer que $\Phi(O) = 0$. En déduire que φ est symétrique.

II.1.4. Réciproquement, montrer que si φ est symétrique, alors le triangle $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC.

II.2. Montrer que si $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC, alors ABC est orthologique au triangle $A'B'C'$. Quelle relation y a-t-il entre le point de concours O des droites δ_A, δ_B et δ_C et le point de concours O' des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$?

La relation « $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC » est donc symétrique. On dira désormais : « Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques ».

II.3. Soit ABC un triangle et soit A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques. Préciser les points de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C et des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$. Identifier l'application affine f transformant les points A, B et C en les points A', B' et C'.

III. ISOGONIE ET ORTHOLOGIE

Étant donné deux points distincts X et Y du plan, on note σ_{XY} la symétrie orthogonale par rapport à la droite (XY). Soit ABC un triangle et M un point n'appartenant pas aux droites (AB), (BC) et (CA). On pose $A' = \sigma_{BC}(M)$, $B' = \sigma_{CA}(M)$ et $C' = \sigma_{AB}(M)$.

III.1. À quelle condition les points A', B' et C' forment-ils un triangle ? Cette condition étant remplie, montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques.

On suppose dans ce qui suit que $A'B'C'$ est un triangle. On note N le point de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C.

III.2. Quelle est la nature de l'application affine $\sigma_{CA} \circ \sigma_{AB}$? En déduire que le point N est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

III.3. Montrer que $\sigma_{AB} \circ \sigma_{AN} \circ \sigma_{AC} = \sigma_{AM}$. En déduire que M et N sont isogonaux relativement au triangle ABC. Que peut-on dire du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre d'un triangle ?

III.4. On suppose que M est intérieur au triangle ABC et on note I, J et K les points d'intersections respectivement des droites (NA') et (BC), des droites (NB') et (CA) et des droites (NC') et (AB). Soit r le rayon du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

III.4.1. Montrer que $MI + IN = r$. En déduire qu'il existe une ellipse Γ de foyers M et N qui passe par les points I, J et K.

III.4.2. Montrer que Γ est tangente aux trois côtés du triangle ABC.

III.5. Réciproquement, montrer que les foyers d'une ellipse tangente aux côtés d'un triangle ABC sont strictement isogonaux relativement à ce triangle.