

**SESSION DE 1999**

**concours externe  
de recrutement de professeurs certifiés  
et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)**

**sections : mathématiques  
breton**

première composition de mathématiques

**Durée : 5 heures**

*Calculatrice électronique de poche - y compris programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.*

*Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.*

## NOTATIONS ET OBJET DU PROBLÈME

On désigne par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels et par  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels.

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Pour tout élément  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  il existe  $n+1$  réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

On note  $P'$  le polynôme dérivé du polynôme  $P$ .

On rappelle que  $\mathbb{R}_n[X]$  est un espace vectoriel normé avec :

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \right\| = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

On note  $U_n$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}_n[X]$  formé des polynômes unitaires de degré  $n$ . Précisément un élément de  $U_n$  s'écrit  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_n = 1$ .

On définit l'application  $\varphi_n$  de  $\mathbb{R}^n$  (espace produit) dans  $U_n$  par :

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mapsto \varphi_n(\lambda) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k).$$

On définit les fonctions symétriques élémentaires  $\sigma_{n,k}$  par :

$$\begin{aligned} \sigma_{n,0} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &\mapsto 1, \\ \\ \sigma_{n,k} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &\mapsto \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}. \end{aligned}$$

L'objet du problème est l'étude d'une condition nécessaire puis d'une condition suffisante, portant sur les coefficients, pour qu'un polynôme réel ait toutes ses racines réelles.

Le résultat de la question I.1.1. est utilisé dans la partie II.

Les parties II et III sont indépendantes.

La partie IV utilise des résultats des parties II et III.

## I. LA MÉTHODE DE NEWTON POUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES

Pour cette partie,  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2 et  $P$  est un polynôme appartenant à  $U_n$  dont toutes les racines sont réelles. On suppose que  $P$  a au moins deux racines réelles distinctes et on note :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$$

les racines réelles distinctes de  $P$  avec  $p$  entier compris entre 2 et  $n$ . Pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $p$ , la racine  $\lambda_j$  est de multiplicité  $m_j$  supérieure ou égale à 1 avec :

$$\sum_{j=1}^p m_j = n.$$

I.1.

I.1.1. Montrer que le polynôme dérivé  $P'$  admet les réels  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  pour racines de multiplicités respectives  $m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_p - 1$  (une multiplicité nulle signifie que  $\lambda_j$  n'est pas racine de  $P'$ ) et des racines simples  $\mu_j \in ]\lambda_{j+1}, \lambda_j[$  avec  $1 \leq j \leq p - 1$ .

I.1.2. Montrer que pour tout réel  $x$  strictement supérieur à  $\lambda_1$  et tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ , on a  $P^{(k)}(x) > 0$ , où  $P^{(k)}$  désigne la dérivée d'ordre  $k$  de  $P$ .

I.2. On définit la fonction  $g : [\lambda_1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} x - \frac{P(x)}{P'(x)} & \text{si } x > \lambda_1, \\ \lambda_1 & \text{si } x = \lambda_1. \end{cases}$$

I.2.1. Montrer que la fonction  $g$  est indéfiniment dérivable sur  $[\lambda_1, +\infty[$ .

I.2.2. Montrer que :

$$\forall x > \lambda_1, \quad \lambda_1 < g(x) < x. \quad (1)$$

Jusqu'à la fin de I.2,  $b$  est un réel strictement supérieur à  $\lambda_1$ . On définit alors la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} x_0 = b, \\ \forall k \geq 0, \quad x_{k+1} = g(x_k). \end{cases}$$

I.2.3. Montrer que cette suite converge en décroissant vers  $\lambda_1$ .

I.2.4. Montrer que :

$$\forall x > \lambda_1, \quad 1 - g'(x) = \frac{\sum_{j=1}^p \frac{m_j}{(x - \lambda_j)^2}}{\left( \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{x - \lambda_j} \right)^2}. \quad (2)$$

I.2.5. Montrer que :

$$\forall x > \lambda_1, \quad \left( \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{x - \lambda_j} \right)^2 \leq n \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{(x - \lambda_j)^2}. \quad (3)$$

I.2.6. Dédire de ce qui précède que :

$$\forall x > \lambda_1, \quad 0 < g'(x) \leq 1 - \frac{1}{n}. \quad (4)$$

I.2.7. On suppose qu'on a trouvé un réel  $a$  inférieur ou égal à  $\lambda_1$ . Dédire de (4) une majoration de  $|x_k - \lambda_1|$  pour tout entier  $k$  strictement positif en fonction de  $a, b, n$  et  $k$ .

I.3. On désigne par :

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$$

les  $n$  racines réelles distinctes ou confondues de  $P$  et on suppose qu'on a obtenu des valeurs approchées des  $m - 1$  premières racines  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{m-1}$  avec  $m$  compris entre 2 et  $n$ . On se propose de déduire un calcul approché de  $\rho_m$ . Pour ce faire on définit le polynôme  $P_{m-1}$  par :

$$P_{m-1}(X) = \frac{P(X)}{(X - \rho_1) \cdots (X - \rho_{m-1})}.$$

On définit la fonction  $g_{m-1} : ]\rho_m, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x > \rho_m, \quad g_{m-1}(x) = x - \frac{P_{m-1}(x)}{P'_{m-1}(x)}$$

et la suite  $(x_k^{(m)})_{k \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} x_0^{(m)} = b_m, \\ \forall k \geq 0, \quad x_{k+1}^{(m)} = g_{m-1}(x_k^{(m)}) \end{cases}$$

où  $b_m$  est un réel strictement supérieur à  $\rho_m$ .

I.3.1. Montrer que la suite  $(x_k^{(m)})_{k \in \mathbb{N}}$  est convergente et calculer sa limite.

I.3.2. Exprimer, pour tout réel  $x$  strictement supérieur à  $\rho_m$ ,  $\frac{P_{m-1}(x)}{P'_{m-1}(x)}$  en fonction de  $P(x)$ ,  $P'(x)$  et des  $x - \rho_j$  ( $1 \leq j \leq m-1$ ).

Quel peut être l'intérêt d'une telle écriture ?

## II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ÉLÉMENTAIRES

II.1.

II.1.1. Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ . On lui associe  $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Exprimer, pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ ,  $\sigma_{n,k}(\lambda)$  en fonction de  $\lambda_n$  et des  $\sigma_{n-1,j}(\lambda')$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ).

II.1.2. Montrer par récurrence que, pour tout entier  $n$  strictement positif, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n,k}(\lambda) X^{n-k}.$$

II.2. Montrer que, pour tout entier  $n$  strictement positif, l'application  $\varphi_n$  est continue de  $\mathbb{R}^n$  dans l'espace vectoriel normé  $\mathbb{R}_n[X]$ .

II.3. Soient  $n$  un entier strictement positif,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  un élément de  $\mathbb{R}^n$  avec  $\lambda_k$  non nul pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$  et  $P = \varphi_n(\lambda)$  avec  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  ( $a_n = 1$ ).

II.3.1. Montrer que  $a_0$  est différent de 0.

On désigne par  $Q$  le polynôme de degré  $n$  à coefficients réels défini pour  $x$  réel non nul par :

$$x \mapsto Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

II.3.2. En écrivant :

$$Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$$

exprimer les coefficients  $b_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) en fonction de coefficients  $a_j$  ( $0 \leq j \leq n$ ).

II.3.3. Déterminer  $\delta$  appartenant à  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\frac{1}{a_0} Q = \varphi_n(\delta)$ .

II.3.4. Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \sigma_{n,k} \left( \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right) = \frac{\sigma_{n,n-k}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)}. \quad (5)$$

II.4. Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  un élément de  $\mathbb{R}^n$  et  $P = \varphi_n(\lambda)$ .

II.4.1. Montrer qu'il existe  $\mu'$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n-1}$  tel que  $\frac{1}{n} P' = \varphi_{n-1}(\mu')$ .

II.4.2. Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \sigma_{n,k}(\lambda) = \frac{n}{n-k} \sigma_{n-1,k}(\mu').$$

II.5. Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ .

II.5.1. Montrer que :

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

II.5.2. Montrer que :

$$(n-1) (\sigma_{n,1}(\lambda))^2 - 2n \sigma_{n,2}(\lambda) \geq 0. \quad (6)$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

II.6. Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que :

$$(n-1) (\sigma_{n,n-1}(\lambda))^2 - 2n \sigma_{n,n-2}(\lambda) \sigma_{n,n}(\lambda) \geq 0. \quad (7)$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée. (On distinguera le cas où l'un des  $\lambda_i$  est nul du cas où tous les  $\lambda_i$  sont non nuls et dans ce dernier cas on peut utiliser (5) et (6)).

II.7. Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 et tout  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  appartenant à  $\mathbb{R}^n$  on a :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad (\sigma_{n,k}(\lambda))^2 - \frac{n-k+1}{n-k} \frac{k+1}{k} \sigma_{n,k-1}(\lambda) \sigma_{n,k+1}(\lambda) \geq 0 \quad (8)$$

en précisant dans quel cas l'égalité est réalisée (on peut procéder par récurrence sur  $n \geq 2$  en utilisant le résultat de la question II.4.2. et l'inégalité (7)).

### III. UN RÉSULTAT DE CONTINUITÉ DES RACINES D'UN POLYNÔME COMME FONCTIONS DES COEFFICIENTS

Pour cette partie,  $n$  est un entier strictement positif et  $P$  désigne un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  ayant  $n$  racines réelles distinctes :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n.$$

III.1. Montrer qu'il existe un réel  $r > 0$  tel que les intervalles  $I_k = [\lambda_k - r, \lambda_k + r]$  ( $1 \leq k \leq n$ ) soient deux à deux disjoints.

III.2. Montrer que, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ , on peut trouver des réels  $a_k$  et  $b_k$  appartenant à  $I_k$  tels que :

$$P(a_k)P(b_k) < 0.$$

III.3. On note :

$$[a, b] = [\lambda_n - r, \lambda_1 + r],$$

$$\alpha = \min \{ |P(a_1)|, \dots, |P(a_n)|, |P(b_1)|, \dots, |P(b_n)| \}.$$

III.3.1. Montrer qu'il existe un réel  $\beta$  strictement positif tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n(X), \quad \sup_{x \in [a, b]} |Q(x)| \leq \beta |Q|. \quad (9)$$

III.3.2. Soit  $Q$  appartenant à  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $|Q - P| < \frac{\alpha}{\beta}$ .

a. Montrer que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad Q(a_k)Q(b_k) < 0.$$

b. Montrer que le polynôme  $Q$  a  $n$  racines réelles distinctes.

On a donc montré le résultat suivant :

Si  $P$  est un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  ayant  $n$  racines réelles distinctes, alors il existe un réel  $\varepsilon$  strictement positif tel que tout polynôme  $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$  appartenant à  $\mathbb{R}_n[X]$  et vérifiant  $|b_k - a_k| < \varepsilon$  pour tout  $k$  compris entre 0 et  $n$ , admet  $n$  racines réelles distinctes. (R1)

#### IV. INÉGALITÉS DE NEWTON

Pour cette partie on suppose l'entier  $n$  supérieur ou égal à 2.

IV.1. Soit  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme de  $U_n$  ( $a_n = 1$ ) admettant  $n$  racines réelles  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . En utilisant (8), montrer que nécessairement :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad a_k^2 - \frac{n-k+1}{n-k} \frac{k+1}{k} a_{k-1} a_{k+1} \geq 0 \quad (R2)$$

(inégalités de Newton). Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

IV.2. Étude d'un exemple. Soient  $a$  un réel et  $P$  le polynôme :

$$P(X) = X^5 + 5aX^3 + a^2X + 1.$$

IV.2.1. Montrer que si  $P$  a 5 racines réelles alors  $a$  est strictement négatif.

IV.2.2. On suppose que  $a$  est strictement négatif.

a. Montrer que les inégalités (R2) sont vérifiées.

On pose  $a = -\frac{1}{b^2}$  avec  $b$  strictement positif et :

$$R(X) = X^5 - 5X^3 + X + b^5,$$

$$S(X) = X^5 - 5X^3 + X.$$

- b. Montrer que  $P$  a 5 racines réelles si et seulement si  $R$  a 5 racines réelles.  
 c. Montrer que le polynôme dérivé  $S'$  a 4 racines réelles  $-\alpha_1 < -\alpha_2 < \alpha_2 < \alpha_1$  et que  $S(\alpha_2) < S(-\alpha_1)$ .  
 d. En étudiant les variations sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto S(x)$  montrer que  $P$  a 5 racines réelles distinctes si et seulement si  $a < -\frac{1}{(S(\alpha_2))^{1/2}}$ .

On admet le résultat suivant :

Si  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  est un polynôme de  $U_n$  admettant  $n$  racines réelle strictement négatives, l'une d'elles étant de multiplicité supérieure ou égale à 2, alors :

$$\exists k \in \{1, 2, \dots, n-1\}; \quad a_k^2 - 4a_{k-1}a_{k+1} \leq 0. \quad (R3)$$

IV.3. Dans cette question on se propose de montrer, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, la propriété

$(\mathcal{P}_n)$  suivante : si  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  est un polynôme de  $U_n$  ( $a_n = 1$ ) vérifiant les conditions :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad a_k > 0, \quad (H1)$$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad a_k^2 - 4a_{k-1}a_{k+1} > 0, \quad (H2)$$

alors toutes les racines de  $P$  sont simples et réelles.

IV.3.1. Montrer que si le polynôme  $P$  appartenant à  $U_n$  vérifie (H2) alors il vérifie (R2).

IV.3.2. Montrer la propriété  $(\mathcal{P}_2)$ .

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. On suppose que  $(\mathcal{P}_{n-1})$  est vraie et on considère un polynôme  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  appartenant à  $U_n$  vérifiant les conditions (H1) et (H2); on note alors  $Q = P - a_0$ .

IV.3.3 Montrer que le polynôme  $Q$  admet  $n$  racines réelles simples, la plus grande étant 0.

Pour tout réel  $t$  positif ou nul on pose :

$$Q_t(X) = Q(X) + t,$$

on désigne par  $N_t \in \mathbb{N}$  le nombre de racines réelles distinctes de  $Q_t$ , et on note :

$$S = \{t > 0 \mid N_t < n\}.$$

IV.3.4. Calculer  $N_0$ .

IV.3.5. Montrer que  $S$  est non vide puis que  $S$  admet une borne inférieure  $\alpha \geq 0$ .

IV.3.6. En utilisant le résultat (R1) de la partie III, montrer que  $\alpha > 0$ .

IV.3.7. En utilisant le résultat (R1) de la partie III, montrer que  $N_\alpha < n$ .

IV.3.8.a. Montrer qu'il existe un réel  $M$  strictement positif tel que pour tout  $t$  dans  $[0, \alpha[$  les  $n$  racines réelles de  $Q_t$  sont dans  $[-M, 0]$ .

Soit  $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de réels appartenant à  $[0, \alpha[$  qui converge vers  $\alpha$ . Pour tout entier naturel  $p$  on note :

$$\delta_{1,p} > \dots > \delta_{n,p}$$

les  $n$  racines réelles de  $Q_{t_p}$  et on pose  $\delta_p = (\delta_{1,p}, \dots, \delta_{n,p}) \in \mathbb{R}^n$ .

b. Montrer qu'on peut extraire de la suite  $(\delta_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une sous-suite convergente. On note  $(\delta_{\sigma(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  une telle sous-suite et  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  sa limite dans  $\mathbb{R}^n$ .

On note :

$$R(X) = \prod_{k=1}^n (X - \delta_k).$$

c. Montrer que dans  $\mathbb{R}_n[X]$  on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} Q_{t\sigma(p)} = R.$$

d. Montrer que  $R = Q_\alpha$ .

e. Montrer que  $Q_\alpha$  a toutes ses racines réelles strictement négatives, l'une d'elles étant de multiplicité supérieure ou égale à 2.

f. En utilisant le résultat (R3), montrer que nécessairement  $\alpha$  est strictement supérieur à  $a_0$  et conclure.

IV.4. En considérant le polynôme  $P(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 1$ , montrer que la propriété  $(\mathcal{P}_n)$  n'est plus valable si on a l'hypothèse (H2) sans l'hypothèse (H1).

IV.5. Dans cette question on se propose de montrer que le coefficient 4 de (H2) ne peut pas être diminué, c'est-à-dire que pour tout réel  $\gamma$  strictement inférieur à 4 il existe un polynôme  $P$  appartenant à  $U_n$  à coefficients strictement positifs vérifiant :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad a_k^2 - \gamma a_{k-1} a_{k+1} > 0 \quad (\text{H3})$$

et admettant des racines complexes non réelles.

IV.5.1. Montrer le résultat pour  $n = 2$ .

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. On se donne un réel  $\gamma$  strictement inférieur à 4 et on suppose qu'on a trouvé un polynôme  $B(X) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$  appartenant à  $U_{n-1}$ , vérifiant (H1) et (H3) et admettant des racines complexes non réelles. On pose alors pour tout réel  $t$  strictement positif :

$$P_t(X) = (tX + 1) B(X).$$

Pour tout entier  $m$  supérieur ou égal à 2 et pour tout polynôme  $A(X) = \sum_{k=0}^m \alpha_k X^k$  à coefficients réels tous non nuls, on note :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \quad \theta(A, k) = \frac{\alpha_k^2}{\alpha_{k-1} \alpha_{k+1}}.$$

IV.5.2. Montrer que :

a. pour tout entier  $k$  compris entre 2 et  $n-1$  on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(P_t, k) = \theta(B, k-1);$$

b.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(P_t, 1) = +\infty$ .

IV.5.3. En déduire qu'on peut trouver un réel  $t$  strictement positif tel que  $\theta(P_t, k) > \gamma$  pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n-1$  puis conclure.