SESSION DE 1999

concours externe de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On note :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels ;
$\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs ;
$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Les lettres p et q désignant des nombres entiers relatifs, on note :

$[\![p, q]\!]$ l'ensemble des nombres entiers relatifs compris (au sens large) entre les nombres p et q, autrement dit :

$$[\![p, q]\!] = \{m \,;\, m \in \mathbb{Z} \mid p \leq m \text{ et } m \leq q\}.$$

Par ailleurs, on note :

$\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$;

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;

I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

et, si (k, ℓ) appartient à $[\![1, n]\!]^2$:

$E_{k\ell}$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la k-ième ligne et la ℓ-ième colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

On rappelle que la famille $(E_{k\ell})_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note enfin :

$M = (m_{ij})$, ou $M = (m_{i,j})$ en cas d'ambiguïté, la matrice $M = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} m_{ij} E_{ij}$.

La lettre K désignant un réel, on définit les ensembles :

- $L_K = \{M \,;\, M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = K\}$;
- $L = \bigcup_{K \in \mathbb{R}} L_K$;
- $C_K = \{M \,;\, M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = K\}$;
- $C = \bigcup_{K \in \mathbb{R}} C_K$.

Une matrice $M = (m_{ij})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite matrice *magique* d'ordre n lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\{m_{ij} \,;\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\} = [\![1, n^2]\!] \qquad \mathbf{P_1}$$

$$\exists K \in \mathbb{R},\ M \in L_K \cap C_K \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} m_{kk} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,n+1-k} = K \qquad \mathbf{P_2}$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des matrices appartenant à $L \cap C$ et des matrices magiques d'ordre n, avec, notamment, une construction de certaines d'entre elles dans le cas où n est impair.

Les cinq parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Montrer que, si M est une matrice magique d'ordre n, le réel K dont la propriété $\mathbf{P}_2$ affirme l'existence vaut nécessairement $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Dans toute la suite du problème, on note $K_n = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

PARTIE I

ÉTUDE DES MATRICES MAGIQUES D'ORDRES 2 ET 3

I.1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice magique d'ordre 2.

I.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice magique d'ordre 3.

I.2.*a*. Établir l'inclusion de l'ensemble $\{1, 9\}$ dans l'ensemble $\{a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}\}$.

I.2.*b*. En déduire l'ensemble des matrices magiques d'ordre 3.

PARTIE II

ÉTUDE DE L'ESPACE VECTORIEL $L \cap C$

II.1.

II.1.*a*. Montrer que L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il est engendré par la famille de matrices $(E_{ij} - E_{in})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n-1]\!]}$. Préciser la dimension de L_0.

II.1.*b*. Soit K un réel. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - KI_n$ appartient à L_0.

II.1.*c*. En déduire que L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

II.2.

II.2.*a*. Montrer que, quelle que soit la matrice $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} m_{ij}(E_{ij} - E_{in})$ appartenant à L_0, M appartient à C_0 si et seulement si, pour tout j appartenant à $[\![1, n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$.

II.2.*b*. En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$ (après avoir succinctement justifié que $L_0 \cap C_0$ est un espace vectoriel).

II.3.

II.3.*a*. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.

II.3.*b*. En déduire la dimension de l'espace $L \cap C$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

EXEMPLE DE GROUPE OPÉRANT SUR L'ENSEMBLE DES MATRICES MAGIQUES D'ORDRE n

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère un carré ABCD de centre O tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ d'une part, $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{v}$ d'autre part, soient colinéaires.

On note $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries de $\mathscr{E}$ qui laissent le carré ABCD globalement invariant.

On note Ω le point de $\mathscr{E}$ vérifiant $\overrightarrow{O\Omega} = -\dfrac{n+1}{2}(\vec{u}+\vec{v})$ et $\mathscr{R}'$ le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

III.1.

III.1.*a*. Soit f un élément de $\mathscr{I}$. Montrer qu'il existe un couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ appartenant à $\{-1, 1\}^2$ tel que, pour tout point N de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$, les coordonnées (x', y') du point $f(N)$ dans le repère $\mathscr{R}$ vérifient :

$$\begin{cases} x' = \varepsilon_1 x, \\ y' = \varepsilon_2 y, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = \varepsilon_1 y, \\ y' = \varepsilon_2 x. \end{cases}$$

Reconnaître toutes les isométries du plan $\mathscr{E}$ ainsi définies.

III.1.*b*. Soit N le point de $\mathscr{E}$ de coordonnées (X, Y) dans le repère $\mathscr{R}'$. Pour chaque élément f de $\mathscr{I}$, exprimer les coordonnées (X', Y') du point $f(N)$ dans le repère $\mathscr{R}'$ en fonction de X et de Y.

III.2. Soit f un élément de $\mathscr{I}$. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ qui, à un couple (s, t) de réels, associe le couple des coordonnées dans le repère $\mathscr{R}'$ de l'image par f^{-1} du point de coordonnées (s, t) dans ce même repère.

III.2.*a*. Montrer que, quel que soit le couple (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, le couple $\varphi(i, j)$ appartient à $[\![1, n]\!]^2$.

III.2.*b*. Soit Φ_f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à une matrice $M = (m_{ij})$, associe la matrice $\Phi_f(M) = (m'_{ij})$ vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, $m'_{ij} = m_{k\ell}$, le couple (k, ℓ) étant égal à $\varphi(i, j)$.

Montrer que l'application Φ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.3. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble $\{\Phi_f ; f \in \mathscr{I}\}$. Montrer que $(\mathscr{F}, \circ)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathscr{I}, \circ)$. (*Le symbole* $\circ$ *désigne la composition des applications.*)

III.4.

III.4.*a*. Vérifier que l'image d'une matrice magique d'ordre n quelconque par un élément de $\mathscr{F}$ quelconque est une matrice magique d'ordre n.

III.4.*b*. Soient f et g des éléments de $\mathscr{I}$. Montrer que, s'il existe une matrice magique M d'ordre n telle que $\Phi_f(M) = \Phi_g(M)$, alors $f = g$.

III.4.*c*. Montrer que l'ensemble des matrices magiques d'ordre n est fini et que son cardinal est un multiple de 8.

PARTIE IV

ÉTUDE D'UN GROUPE ASSOCIÉ À CERTAINES PERMUTATIONS DE $[\![1, n]\!]$

Étant donnée une permutation quelconque σ de $[\![1, n]\!]$, on note A_σ la matrice (a_{ij}) appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = \delta_{\sigma(i), j}$, ce dernier symbole (dit « de Kronecker ») étant défini par la relation :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble $\{A_\sigma ;\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

IV.1. Soient σ un élément de $\mathfrak{S}_n$ et $M = (m_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Expliciter le terme général de la matrice $A_\sigma M$, puis le terme général de la matrice $M A_\sigma$.

IV.2. Montrer que $(\mathcal{S}, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.
(*Le symbole* $\times$ *désigne la multiplication matricielle.*)

IV.3.

IV.3.*a*. Soit K un réel. Montrer que, pour toute matrice M appartenant à $L_K \cap C_K$ et toutes permutations σ et σ' de $[\![1, n]\!]$, $A_\sigma M A_{\sigma'}$ appartient à $L_K \cap C_K$.

IV.3.*b*. On note $\mathfrak{T}_n$ l'ensemble des permutations σ de $[\![1, n]\!]$ telles que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sigma(n+1-k) = n+1-\sigma(k).$$

Soit σ un élément de $\mathfrak{T}_n$.

Montrer que, si M est une matrice magique d'ordre n, alors $A_\sigma M A_{\sigma^{-1}}$ en est aussi une.

IV.4. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble $\{A_\sigma ; \sigma \in \mathfrak{T}_n\}$.

IV.4.*a*. Montrer que $(\mathcal{T}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}, \times)$.

IV.4.*b*. Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{T}$.

PARTIE V

CONSTRUCTION DE MATRICES MAGIQUES D'ORDRE n IMPAIR

V.A. Cas où n n'est pas multiple de 3.

On suppose dans cette section V.A. que n est un entier impair non multiple de 3.

On dit que deux entiers p et q sont *congrus modulo* n, et l'on note $p \equiv q\ [n]$, lorsque n divise $p-q$.

V.A.1. Montrer qu'il existe un entier m premier avec n tel que, pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) appartenant à $\mathbb{Z}^4$,

$$\begin{cases} k \equiv 2i + j\ [n], \\ \ell \equiv i + 2j\ [n], \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} i \equiv m(2k - \ell)\ [n], \\ j \equiv m(2\ell - k)\ [n]. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout couple (k, ℓ) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, il existe un et un seul couple (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$ tel que :

$$\begin{cases} k \equiv 2i + j\ [n], \\ \ell \equiv i + 2j\ [n]. \end{cases}$$

On note alors $i = \alpha(k, \ell)$ et $j = \beta(k, \ell)$.

V.A.2. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'anneau quotient de $\mathbb{Z}$ par l'idéal $n\mathbb{Z}$ et, si x est élément de $\mathbb{Z}$, $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

V.A.2.*a*. Soient u et v deux entiers relatifs, u non nul. Montrer que, si u et n sont premiers entre eux, l'application $x \mapsto \dot{u}x + \dot{v}$ est une bijection de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur lui-même.

V.A.2.*b*. En déduire que, pour tout ℓ appartenant à $[\![1, n]\!]$, la somme $\sum_{k=1}^{n} \alpha(k, \ell)$ est constante (préciser sa valeur en fonction de n).

Soit $W = (w_{i,j})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$:

$$w_{i,j} = n(i-1) + j.$$

Soit $G = (g_{k,\ell})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (k, ℓ) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$:

$$g_{k,\ell} = w_{\alpha(k,\ell),\, \beta(k,\ell)}.$$

V.A.3. Construire G dans le cas où $n = 5$.

Dans la suite, l'entier n n'est plus supposé égal à 5.

V.A.4.

V.A.4.*a*. Montrer que l'ensemble des coefficients de G est $[\![1, n^2]\!]$.

V.A.4.*b*. Montrer que G est une matrice magique d'ordre n.

V.A.5. Dans cette question, on établit une propriété supplémentaire de la matrice G.

Si i appartient à $[\![1, n]\!]$, on note $E_i = \{(k, \ell) ;\ (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2 \mid k - \ell \equiv i\ [n]\}$.

V.A.5.*a*. Montrer que, pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\sum_{(k,\ell) \in E_i} g_{k\ell} = K_n$.

V.A.5.*b*. Déterminer n autres ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_n$, analogues aux ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, tels que, pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\sum_{(k,\ell) \in F_i} g_{k\ell} = K_n$.

V.B. Composition de deux matrices magiques. Cas où n est multiple de 3.

Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 3.

À partir d'une matrice magique $A = (a_{k\ell})$ d'ordre p et d'une matrice magique $B = (b_{ij})$ d'ordre q, on considère la matrice carrée $D = (d_{uv})$ d'ordre pq vérifiant, pour tout (k, ℓ) appartenant à $[\![1, p]\!]^2$ et tout (i, j) appartenant à $[\![1, q]\!]^2$, $d_{(i-1)p+k,\,(j-1)p+\ell} = a_{k\ell} + (b_{ij} - 1)\,p^2$.

V.B.1. Construire D dans le cas particulier où les matrices A et B sont égales à $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

V.B.2. Montrer que, pour toutes matrices magiques A et B d'ordres respectifs p et q, D est une matrice magique d'ordre pq.

V.B.3. En déduire que, si n est un multiple de 3, l'ensemble des matrices magiques d'ordre n n'est pas vide.