CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

CAPESA

SESSION 2000

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Première composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Définitions - notations : Soit n un entier naturel non nul ; on désigne par E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$. On notera φ le produit scalaire usuel et $\|x\|^2 = \varphi(x, x)$. Si C est une partie de E, on notera $\overline{C}$,son adhérence, $\mathring{C}$, son intérieur et $\mathrm{Fr}(C) = \overline{C} \setminus \mathring{C}$, la frontière de C.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, si $\forall i,\ x_i \geq y_i$ (resp. $>$) on notera $x \geq y$. (resp. $>$).
Si A et B sont des parties de E, un élément z de E appartient à $A - B$, (resp. $A + B$) s'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que, $\forall\ i,\ 1 \leq i \leq n,\ z_i = a_i - b_i$.(resp. $a_i + b_i$).

Soit X une partie de E. Si $\forall\ (x, y) \in X^2$, $\forall\ \alpha \in [0, 1]$, $\alpha.x + (1 - \alpha).y \in X$, on dira que X est convexe.
Soient a et b deux points de E ; le segment d'extrémités a et b, et on note $[ab]$, est l'ensemble des barycentres des points pondérés (a, t) et $(b, 1 - \mathrm{t})$ où $\mathrm{t} \in [0; 1]$.

Une partie X est un sous espace affine de E si X est l'image par une translation d'un sous-espace vectoriel F de E, appelé direction de X (on rappelle que F est unique) ; Si v est le vecteur de cette translation, on a donc $X = \{v\} + F$, ce qu'on notera $X = v + F$; la dimension de F est la dimension de X. Si $\dim(X) = n - 1$, on dit que X est un hyperplan affine de E.

I. Exemples de Parties Convexes.

I.1. Soit r un réel positif et $D = \{\, x \in E \ / \ \|x\| \leq r \,\}$.
Montrer que D est une partie convexe de E.

I.2. Soit I un ensemble non vide, et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes de E.
Montrer que $\bigcap_{i \in I} X_i$ est une partie convexe de E.

I.3. Montrer que l'adhérence $\overline{X}$ d'une partie convexe X est convexe.

I.4 Montrer que, tout sous-espace affine de E est une partie convexe de E.

I.5. Soit p un élément donné non nul de E et c un réel ; on pose
$H = \{ x \in E \,/\, \varphi(x, p) = c \}$.

I.5.a. Montrer que H est un hyperplan affine de E ; on précisera une base de sa direction et un vecteur normal à sa direction.

On dit que l'hyperplan H a pour équation cartésienne : $\varphi(x,p) = c$.

I.5.b. Montrer que $H^- = \{ x \in E \,/\, \varphi(x,p) \leq c \}$ est une partie convexe fermée de E.

I.6. On dit qu'une partie S de E est « stable par demi-somme » si
pour tout $(x, y) \in E^2$, $(x \in S \text{ et } y \in S) \Rightarrow \left(\frac{x+y}{2} \in S\right)$.

I.6.a. Montrer qu'une telle partie S n'est pas nécessairement convexe.

I.6.b. Si en outre S est fermée, montrer que S est convexe.

II. Enveloppes Convexes.

Définition - notation : Pour toute partie X de E, on appelle enveloppe convexe de X, et on note conv(X), l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant X ; et $\langle X \rangle$ le sous espace affine engendré par X, i.e. l'intersection de tous les sous espaces affines de E contenant X.

II.1 Montrer que, pour toute partie X de E, conv(X) est la plus petite partie (au sens de l'inclusion) convexe de E contenant X et que conv$(X) \subset \langle X \rangle$.

II.2. Montrer les propriétés suivantes :

II.2.1. Pour toutes parties X, Y de E, $(X \subset Y) \Rightarrow (\text{conv}(X) \subset \text{conv}(Y))$.

II.2.2. X est convexe si et seulement si conv$(X) = X$.

II.2.3. conv(conv(X)) = conv(X).

II.3. Soit X une partie non vide de E.

II.3.1. Montrer que, si X est convexe, tout barycentre à poids positifs $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ d'une famille finie $(a_1, \ldots, a_n)$ de points de X est dans X.

II.3.2. Montrer, dans le cas général, que conv(X) est égal à l'ensemble des barycentres des familles finies de points de X affectés de poids positifs.

II.4. On suppose $n = 2$. Soit $X = \{ a, b, c \}$ un ensemble de trois points de E. Déterminer l'enveloppe convexe de X.

Définition : Soit C une partie convexe de E et $m \in C$. On dit que m est un point extrémal si : $\forall (a,b) \in C^2$, $(m \in [ab]) \Rightarrow (m = a \text{ ou } m = b)$.

II.5. On suppose que $n = 2$. Déterminer les points extrémaux des parties convexes suivantes :

II.5.1. Un segment d'extrémités distinctes.

II.5.2. Un disque fermé.

II.5.3. Un disque ouvert.

II.5.4. Un carré (intérieur et bord).

II.5.5. La partie X, où $X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \}$.

II.6. Soit X un convexe compact de E, $a \notin X$.

II.6.1. Montrer qu'il existe un point b de X tel que : $\forall x \in X$, $||a - x|| \leq ||a - b||$.

II.6.2. Montrer qu'un tel point b est un point extrémal de X.

II.7. Soit C un convexe de E. Montrer que $x \in C$ est un point extrémal de C si et seulement si $C \setminus \{x\}$ est convexe.

II.8. Soit S une partie non vide E et $C = \mathrm{conv}(S)$.
Montrer que tout point extrémal de C est nécessairement dans S.

II.9. Soit X une partie finie de E.
Démontrer que $\mathrm{conv}(X)$ est égal à l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux. (on pourra faire un raisonnement par récurrence sur $\mathrm{card}(X)$).

II.10. Montrer que le résultat précédant ne subsiste pas lorsque X n'est pas fini.

Partie III. Projection sur un Convexe.

Définition : Soit C une partie *non vide* de E et x un élément de E. On désigne par $d(x, C)$ la distance de x à C, c'est à dire le reel $\inf\{||x-c|| \; ; \; c \in C\}$.

III.1. Soit $a \in E$; montrer qu'il existe une boule fermée $B_F(a, r)$, $r > 0$, telle que $B_F(a,r) \cap C \neq \varnothing$.

III.2. Montrer que, si C est une fermée, pour tout $a \in E$, il existe un élément b de C tel que : $||b - a|| = d(a, C)$.

III.3. Montrer que, si C est une partie convexe fermée non vide, l'élément b défini en III.2 est unique. (On utilisera l'égalité du parallélogramme).

Le point b est appelé projeté de a sur C et noté $b = p_C(a)$.

III.4. Donner des exemples de non existence et de non unicité de b lorsque C n'est pas convexe ou pas fermée.

III.5. Soit C une partie convexe fermée non vide, a une point de E et b un point de C.

III.5.1 Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

(1) $b = p_C(a)$

(2) $b \in C$ et $\forall x \in C, \varphi(x - b, b - a) \geq 0$.

III.5.2. Donner une interprétation géométrique de la condition (2) en termes d'écart angulaire.

III.5.3. Montrer que : $\forall (a, a') \in E^2$, $\|p_C(a) - p_C(a')\|^2 \leq \varphi(a - a', p_C(a) - p_C(a'))$

III.5.4. Montrer que l'application p_C est lipschitzienne.

III.5.5. Montrer que le réel 1 est le meilleur coefficient de Lipschitz possible.

III.6. On suppose que C est un sous espace affine de E de direction V.
Montrer que $b \in C$ est la projection de a sur C si et seulement si $a - b$ est orthogonal à V.

III.7. On suppose $n = 2$. Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2\}$.

III.7.1. Montrer que C est convexe et fermé.

III.7.2. Soit $A = (a, a') \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, et notons $B = (b, b') = p_C(A)$.
Montrer que $b' = b^2$.

Partie IV. Hyperplan d'appui.

Soit p un élément non nul de E et c un réel ; on considère l'hyperplan affine H d'équation cartésienne $\varphi(p,x) = c$, et A, B deux parties non vides de E.
Définitions : On dit que H sépare A et B si : $\forall x \in A, \varphi(p,x) \leq c$ et $\forall x \in B, \varphi(p, x) \geq c$ ou l'inverse.

Si les deux inégalités précédentes sont strictes, on dira que la séparation est stricte.

On dira alors que A et B sont séparables (resp. strictement séparables).
Soit A une partie de E ; on appelle hyperplan d'appui de A, tout hyperplan H contenant un point x de A et séparant $\{x\}$ et A ; H est dit hyperplan d'appui de A en x.

IV.1. Donner une interprétation géométrique de parties séparables à l'aide des demi-espaces délimités par H.

IV.2. On suppose $n = 2$. On pose $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y \geq \frac{1}{x}\}$ et
$X_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0 \}$.

IV.2.1. Démontrer que X_1 est une partie convexe fermée et déterminer un hyperplan qui sépare X_1 et le point $(5, 0.1)$; justifier.

IV.2.2. Montrer qu'aucun hyperplan ne sépare strictement les deux parties convexes fermées X_1 et X_2.

IV.3. Soit C une partie convexe fermée de E et $a \in E \setminus C$. Montrer qu'il existe un hyperplan séparant strictement $\{a\}$ et C.

IV.4. Soient C et C' deux convexes fermés disjoints, et C étant de plus compact.
On note $A = C - C' = \{c - c' \,/\, c \in C,\ c' \in C'\}$.

IV.4.1. Montrer que A est un convexe fermé qui ne contient pas l'origine O.

IV.4.2. En déduire qu'il existe un hyperplan séparant strictement C et C'.

IV.5. Soit C une partie convexe fermée non vide, et a est un point de C, non intérieur à C.

IV.5.1. Montrer qu'il existe une suite (a_p) de points de $E \setminus C$ qui converge vers a.

IV.5.2. Montrer qu'il existe une suite (n_p) de vecteurs unitaires de E telle que :
$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in C, \varphi(n_p, x - a_p) > 0$.

IV.5.3. En déduire qu'il existe n unitaire tel que : $\forall x \in C \quad \varphi(n, x - a) \geq 0$.
(on pourra utiliser la compacité de la boule unité de E).

IV.5.4. Justifier que l'hyperplan d'équation : $\varphi(n, x - a) = 0$, est un hyperplan d'appui à C au point a.

IV.6. On suppose $n = 2$. Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 \}$.
Montrer que la seule droite d'appui à C au point $A(a, a^2)$ est la tangente en A à la courbe d'équation $y = x^2$.

IV.7. Soit un demi-disque de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il peut exister en un même point une infinité de droites d'appui à ce demi-disque.

IV.8. Soit X une partie convexe de E.

IV.8.1. Montrer que si H est un hyperplan d'appui à X au point a, alors a ne peut être un point intérieur à X.

IV.8.2. Montrer que si X admet deux hyperplans d'appui distincts en un point frontière de X alors X admet alors une infinité d'hyperplans d'appui en ce point.

IV.9. On note $E^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0 \}$. Soit X un ensemble convexe ne contenant aucun point intérieur de E^+.

IV.9.1. Montrer que 0 n'est pas un point ~~intérieur~~ rieur de $X \setminus E^+$.

IV.9.2. Montrer qu'il existe un hyperplan d'équation $\varphi(p,x) = 0$ tel que :
$\forall x \in X,\ \varphi(p,x) \leq 0.$

III.9.3. Montrer que, pour un tel hyperplan, on a $p \geq 0$.

IV.10. Soit $X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y \leq 0 \text{ et } 2x - y \leq 0 \}$.
Montrer qu'on peut séparer X et E^+ par un hyperplan de normale $p > 0$.

IV.11. Donner un exemple de convexe X, tel que X et E^+ soient séparables mais par aucun hyperplan de normale $p > 0$.

IV.12. Soit X une partie de E. On suppose que pour tout point y de $E \setminus X$, X et $\{y\}$ sont séparables. Montrer que X est convexe.