CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

CAPESA

SESSION 2000

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Deuxième composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

PREMIER PROBLEME

1 - Fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$

X est une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. ($X(\Omega) \subset \mathbb{N}$).

Si $X(\Omega) \neq \mathbb{N}$, on étend la loi de X à $\mathbb{N}$ en posant $P(X = n) = 0$ si $n \in \mathbb{N} - X(\Omega)$.

1 - Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X = n) t^n$ est supérieur ou égal à 1. On note R_X ce rayon de convergence.

Pour tout $t \in [0 ; R_X[$, on pose $\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n$. Cette fonction est la fonction génératrice de X.

2 - On suppose que $R_X > 1$.

Démontrer que X admet une espérance mathématique $E(X)$ et que $E(X) = \varphi'_X(1)$;
Démontrer que $X(X-1)$ admet une espérance mathématique et que : $E(X(X-1)) = \varphi''_X(1)$.
En déduire une expression de la variance $v(X)$ de X en fonction de $\varphi'_X(1)$ et de $\varphi''_X(1)$.

3 - On suppose que $R_X > 1$ et que $P(X = 0) \neq 1$.

Montrer que φ_X est strictement croissante sur $[0 ; R_X[$ et qu'il existe au moins un nombre $\alpha \in]1 ; R_X[$ tel que $\varphi_X(\alpha) < R_X$.

4 – Montrer que pour tout $t \in]0 ; R_X[$, $\varphi_X(t) = E(t^X)$.

En déduire que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires réelles indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, il existe un nombre réel strictement positif R tel que pour tout $t \in [0;R[$ on ait $\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$.

Montrer que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, il existe un réel strictement positif R tel que $\forall t \in [0;R[$, $\varphi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t)$.

(On rappelle que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, X_n est indépendante de $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}$)

5 – Exemples :

Déterminer la fonction génératrice φ_X de la variable aléatoire X, préciser R_X et déterminer $E(X)$ et $v(X)$ s'ils existent dans les deux cas suivants :

5-1 X est une variable binomiale de paramètres n et p $(n \in \mathbb{N}^* \,;\, p \in]0;1[)$. *(On rappelle que X est une variable binomiale de paramètres n et p si et seulement si $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ $P(X=k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$).*

5-2 X est une variable géométrique de paramètre p $(p \in]0;1[)$. *(Rappelons que X est une variable géométrique de paramètre p si et seulement si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = p.(1-p)^k$).*

2 – Etude de l'évolution d'une population de plantes

On étudie la colonisation d'un domaine par une population de plantes d'une espèce déterminée. Chaque plante de cette espèce a, au cours de sa vie, X descendants, où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Chaque plante se développe indépendamment des autres. La génération $\mathcal{G}_0$ est constituée d'une seule plante, et la génération $\mathcal{G}_{n+1}$ est constituée des descendants directs des plantes de la génération $\mathcal{G}_n$.

On note Z_n la variable aléatoire égale à l'effectif de la génération $\mathcal{G}_n$. Z_0 est donc la variable aléatoire certaine de valeur 1 et la loi de Z_1 est celle de X.

On suppose que $R_X > 1$; On pose $\varphi = \varphi_X$, $\mu = E(X)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \varphi_{Z_n}$ et $R_n = R_{Z_n}$.

2-1 Dans cette partie, on suppose que chaque plante émet au cours de sa vie N graines, où N est un entier supérieur ou égal à 2 donné, chacune d'elles ayant la probabilité p $(p \in]0;1[)$ de germer et de donner un descendant, indépendamment des autres.

2-1-1 Quelle est la loi de X ? Définir la fonction φ. Que vaut R_X ?

2-1-2 Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = P(Z_n = 0)$.

a- Que vaut u_1 ?

b- Déterminer $P(Z_2 = 0 | Z_1 = k)$ $(k \in [\![0;N]\!])$. En déduire u_2.

c- Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $u_n = (p.u_{n-1} + 1 - p)^N$.

d- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et convergente.

e- Pour tout $x \in]0;1]$, on pose $g(x) = (px + 1 - p)^N - x$ et $h(x) = N.\ln(px + 1 - p) - \ln x$. Montrer que $g(x)$ et $h(x)$ sont de même signe.

f- Calculer $h(u_1)$; quel est son signe ?

g- En étudiant les variations de h sur $]0;1]$, déterminer dans quels cas la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

Désormais on suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $X(\Omega)$ soit $\mathbb{N}$ ou un intervalle de $\mathbb{N}$ de la forme $[\![0;n]\!]$, avec $n \geq 2$. On suppose en outre que $P(X \geq 2) \neq 0$.

2-3 Pour $n \geq 2$, on note $W_{n,k}$ la variable aléatoire égale à l'effectif de la génération $\mathcal{G}_n$ sachant que $Z_1 = k$.

Expliquer pourquoi on peut considérer que $W_{n,k}$ est la somme de k variables aléatoires indépendantes de même loi que Z_{n-1}.

En déduire que $\varphi_{W_{n,k}} = (\varphi_{n-1})^k$.

2-4 Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0;R_n[$, $\varphi_n(t) = \varphi(\varphi_{n-1}(t))$.

En s'aidant du 3 de la partie 1, montrer que $R_n > 1$.

Montrer que la suite $(E(Z_n))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison μ.

En déduire que $E(Z_n) = \mu^n$.

Etudier la limite de $E(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2-5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P(Z_n = 0)$.

Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $u_n = \varphi(u_{n-1})$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone et convergente.

Montrer que si $\mu \leq 1$ la suite (u_n) converge vers 1, et que si $\mu > 1$, elle converge vers un nombre l de l'intervalle $]0;1[$.

Donnez la valeur de μ et un encadrement de l d'amplitude 10^{-2} si X est une variable binomiale de paramètres $N = 50$ et $p = 0{,}022$, puis si $N = 50$ et $p = 0{,}08$.

SECOND PROBLEME

I. PRÉLIMINAIRE

On pose, pour tout entier naturel n : $w_n = \int_0^{\pi/2} cos^n(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} sin^n(t)\,dt$

1° a) Trouver une relation entre w_n et w_{n+2}, valable pour tout entier n.

b) Établir la propriété : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+1)w_{n+1}w_n = \frac{\pi}{2}$

2° Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et prouver que : $w_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} w_{2n}$

3° Donner une expression de w_{2n} en fonction de C_{2n}^n et de n.

4° Déduire des questions précédentes : $\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$

II. ÉTUDE D'UNE FAMILLE D' INTÉGRALES

On définit, pour x réel et pour tout entier naturel n :

$$J_n(x) = \int_0^{\pi} e^{-2x\theta}\, sin^{2n}(\theta)d\theta$$

1° Justifier que J_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, étudier ses variations et déterminer ses limites en $\pm\infty$. Donner la valeur de $J_n(0)$.

2° Exprimer J_n à l'aide de J_{n-1}, pour n entier non nul.

3° Soit φ une fonction continue sur $[0;\frac{\pi}{2}]$;on pose , pour tout entier n :

$$\lambda_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(\theta) sin^{2n}(\theta)\,d\theta$$

a) On suppose : $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$. En décomposant l'intégrale λ_n sur deux intervalles, démontrer que : $\lambda_n = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$

b) On suppose à présent : $\varphi(\frac{\pi}{2}) \neq 0$. En se ramenant à la question précédente, montrer que : $\lambda_n \underset{+\infty}{\sim} \varphi(\frac{\pi}{2}).\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\pi}{n}}$

c) Justifier la relation , valable pour tout entier n et tout réel x strictement positif:

$$J_n(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-2x\theta}\, sin^{2n}(\theta)d\theta + e^{-2\pi x}\int_0^{\pi/2} e^{2x\theta}\, sin^{2n}(\theta)d\theta$$

d) En déduire , pour tout réel x strictement positif: $J_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\pi x}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$

III. DÉVELOPPEMENT EN PRODUIT INFINI

On pose, pour tout entier n et tout réel x : $A_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2x\theta} \sin^{2n}(\theta)\, d\theta$

1° a) Pour quelles valeurs de x et de n cette intégrale est-elle convergente ?

b) Expliciter $A_0(x)$ et $A_1(x)$.

2° a) Exprimer , pour tout réel x strictement positif et tous entiers naturels n et k , l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2x\theta} \sin^{2n}(\theta)\, d\theta$ en fonction de $J_n(x)$ et de k.

b) Prouver alors l'égalité , valable pour tout réel x strictement positif et n entier :
$A_n(x) = f(x) J_n(x)$ où f est une fonction indépendante de n.

3° En déduire une relation entre $A_n(x)$ et $A_{n-1}(x)$, puis prouver la formule :

$$A_n(x) = \frac{1}{2x} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \left[\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{x^2+k^2} \right) \right]$$

4° Montrer que, pour tout réel x strictement positif, le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{x^2+k^2}{k^2}$ est convergent et est égal à $\frac{sh(\pi x)}{\pi x}$.

Cette égalité s'étend-elle sur $\mathbb{R}^*$?

IV UN CALCUL DE $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ ET DE $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$

1° On introduit la fonction D par la relation : $D(x) = \ln\left(\frac{sh(\pi x)}{\pi x}\right)$

Montrer qu'elle est prolongeable en une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2° Prouver l'égalité, valable pour x réel : $D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right)$

3° a) Justifier : $\forall x \in]-1;1[\quad D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{x^{2p}}{pk^{2p}} \right)$

b) Prouver que $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{pk^{2p}} \right)$ est convergente pour $x \in]-1,1[$.

On admet que, dans ce cas, on peut intervertir les sommations dans l'expression de D.

4° En déduire les valeurs de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.