CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT AGRICOLE **CAPESA**

SESSION 2001

Concours : EXTERNE
Section : MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

(Coefficient : 2,5 ; durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Le thème de ce problème est l'approche, par plusieurs outils mathématiques, du nombre réel π^2 dont on montrera l'irrationalité.

- Le problème est divisé en cinq parties notées respectivement Préliminaires, A, B, C, D ; ces quatre dernières parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
- Dans les préliminaires, la partie notée Pr(B) (respectivement Pr(C)) regroupe les items dont les résultats vous serviront dans la partie B (respectivement C).
- Le signe $\neq$ indique que la question s'éloigne du thème principal du problème.
- Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $R = \left(O, (\vec{u}, \vec{v})\right)$, on note $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \right.$ et $B \left| \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$ et $\mathscr{C}$ le cercle

trigonométrique
La fonction cotangente est notée cot.

Préliminaires

Pr(B)

1. Préciser pourquoi la fonction cotangente est une bijection de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0; +\infty\right[$.

2. Si P est un polynôme de degré p à coefficients complexes, $P = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_0$, ayant pour racines $z_1, \ldots, z_p$, donner la formule liant $s = \sum_{k=1}^{p} z_k$ aux coefficients a_i.

3. Démontrer que pour tout réel x de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\cot x \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}.$$

4. ✎ Donner une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}_A$ centré en A passant par B et préciser les points d'intersection de ce cercle avec l'axe des abscisses.

5. Pour x réel non nul, on pose :

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

a) Prouver que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour simplifier les notations, ce prolongement sera encore noté g dans la suite.

b) Quelle est alors la valeur de $g(0)$?

c) Etudier la dérivabilité de g en 0.

d) Après avoir donné les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$, donner le tableau de variations de g (on pourra-être amené à étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $h : x \mapsto (1-x)e^x - 1$).

e) ✎ Démontrer que la courbe représentative de g dans le repère R admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote dont on donnera une équation cartésienne.

Pr(C)

1. *Soit u continue sur l'intervalle $[0;1]$, montrer que, si U est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$U(x) = \int_0^1 u(t)\cos(xt)\,dt,$$

alors, U est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, x \in \mathbb{R}, U'(x) = -\int_0^1 u(t)\,t\sin(xt)\,dt$.

* Il y a plusieurs méthodes pour parvenir à ce résultat, l'une d'elles consiste à revenir à la définition du nombre dérivé en un point et à utiliser l'inégalité (qu'on justifiera) valable pour tous réels a et b :

$$\left|\cos b - \cos a + (b-a)\sin a\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}.$$

2. Soit P une fonction polynôme à coefficients réels. Montrer que la fonction P est paire si et seulement si elle est combinaison linéaire de fonctions monômes de degrés pairs.

3. Soient P et Q deux fonctions polynômes à coefficients réels telles que :

$$\forall x, x \in \mathbb{R}, P(x)\cos x + Q(x)\sin x = 0.$$

Démontrer que P et Q sont nulles.

Partie A

Un algorithme n'utilisant que des opérations dites élémentaires

On se propose de définir deux suites de réels $(c_n)_{n\geq 1}$ et $(s_n)_{n\geq 1}$ en posant :

$$\begin{cases} c_1 = 0 \text{ et } s_1 = 4 \\ \forall n, n \geq 1, c_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{c_n}}{2} \text{ et } s_{n+1} = \dfrac{s_n}{c_{n+1}} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $\begin{cases} c_n = \cos^2 \dfrac{\pi}{2^n} \\ s_n = 4^n \sin^2 \dfrac{\pi}{2^n} \end{cases}$.

2. Déterminer la limite de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$.

3. a) Justifier l'assertion suivante : $\forall x, x > 0, \exists y, y \in]0;x[\,/\, \sin x = x - \dfrac{x^3}{6}\cos y$.

b) On sait que pour $x \geq 0, |\sin x| \leq x$. En déduire l'existence d'une constante rationnelle M telle que pour tout entier $n, n \geq 1, \left|s_n - \pi^2\right| \leq \dfrac{M}{4^n}$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

a) Donner le développement limité à l'ordre 6 de f en 0.

b) Démontrer que s_n admet le développement asymptotique suivant :

$$s_n = \pi^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^4}{4^n} + \frac{2}{45}\cdot\frac{\pi^6}{16^n} + o\left(\frac{1}{16^n}\right).$$

5. On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $t_n = \dfrac{-s_n + 4s_{n+1}}{3}$.

a) Déterminer la limite de la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ ainsi qu'un équivalent de $\left|t_n - \pi^2\right|$.

b) Justifier que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ converge plus vite vers sa limite que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$.

Partie B

π^2 en tant que somme de série ou comme intégrale

Dans toute cette partie, n désigne un entier strictement positif.

1. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose : $r_k = \cot^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}$. Prouver que ces nombres sont deux à deux distincts.

2. En utilisant la formule de Moivre, établir l'égalité suivante, valable pour tout réel a :

$$C_{2n+1}^1 \sin a \cdot \cos^{2n} a - C_{2n+1}^3 \sin^3 a \cdot \cos^{2n-2} a + \cdots + (-1)^n C_{2n+1}^{2n+1} \sin^{2n+1} a = \sin(2n+1)a.$$

3. a) A l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe une fonction polynôme à coefficients réels notée P_n que l'on explicitera, telle que pour tout réel a non multiple de π, on ait :

$$\frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1} a} = P_n\left(\cot^2 a\right).$$

b) Etablir l'unicité d'un tel polynôme P_n.

c) Déterminer les racines du polynôme P_n.

4. a) Calculer le nombre $S = \sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$.

b) En déduire la valeur de T, où $T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.

5. Après avoir encadré $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, retrouver le célèbre résultat dû à Euler : $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Calculer $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2}$.

7. Plaçons nous dans le cas particulier où $n = 2$.

a) Exprimer $\cot \frac{\pi}{5}$ puis $\cos \frac{\pi}{5}$ à l'aide de radicaux. En déduire que $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

b) Proposer une construction à la règle et au compas d'un décagone régulier.

8. a) g désignant toujours la fonction définie en PR(B), justifier l'existence de l'intégrale généralisée $K = \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$.

b) On pose, pour n entier strictement positif, $K_n = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x$. Calculer K_n après avoir justifié son existence.

c) Vérifier que pour tout x non nul, $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-kx} = \frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$; en déduire que :

$$K = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$

d) Montrer que $K = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie C

Irrationalité de π^2

1. On pose, pour tout réel x et pour tout entier naturel n $(n \geq 1)$,

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} \cdot \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \cos(xt)\mathrm{d}t.$$

a) Calculer f_n' sur $\mathbb{R}$ … en justifiant.

b) Donner un lien algébrique entre f_{n+1}, f_n et f_n'.

2. Calculer $f_1(x)$ pour tout réel x.

3. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n ($n \geq 1$), il existe un unique couple de fonctions polynômes (A_n, B_n) à coefficients entiers tel que :

① $\forall x, x \in \mathbb{R}, f_n(x) = A_n(x)\cos x + B_n(x)\sin x$,

② A_n est impaire et B_n est paire,

③ les degrés de A_n et de B_n sont inférieurs ou égaux à n.

4. Supposons que l'on puisse écrire $\frac{\pi^2}{4} = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls…

Montrer qu'alors, le nombre u_n défini par :

$$u_n = q^n \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{2n}}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 4n} \cdot \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{2n} \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) dt,$$

est un entier naturel non nul.

5. En considérant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, démontrer que π^2 est irrationnel.

Partie D

π^2 et les séries entières

Dans cette partie, on étudie la série entière $\sum 2 \frac{4^n (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$; en cas de convergence de cette série, on posera $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{4^n (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$. On notera enfin pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 \frac{4^n (n!)^2}{(2n+2)!}$.

1. Calculer le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ et donner le rayon de convergence de la série entière $\sum 2 \frac{4^n (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

2. a) Déterminer les constantes a et b telles que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Pour $n \geq 1$, on pose, $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et $w_n = n^{-\frac{5}{4}}$. Montrer que, pour n assez grand :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n}.$$

c) En déduire l'existence de deux constantes strictement positives c et d (qu'on ne cherchera pas à préciser) telles que, pour n assez grand :

$$c\, v_n \leq a_n \leq d\, w_n.$$

d) Que peut-on en déduire sur la convergence de la série $\sum a_n$?

3. Justifier avec soin que $\lim_{x \to 1} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4. Le but de cette question est d'expliciter la fonction F. On pose, $G(x)=(\operatorname{Arcsin} x)^2$, quand c'est possible…

a) Donner l'ensemble de définition de la fonction G. Sur quelle intervalle I, la fonction G est-elle dérivable et même de classe C^∞ ?

b) Vérifier que G est solution sur I de l'équation différentielle notée (L) :

$$\left(1-x^2\right)y''(x)-xy'(x)=2.$$

c) Calculer les nombres $F(0), F'(0), G(0), G'(0)$.

d) Démontrer que $\forall x, x\in I, F(x)=G(x)$.

5. a) Déterminer la somme de chacune des deux séries numériques $\sum \frac{a_n}{4^n}$ et $\sum a_n$.

b) On pose, pour tout entier n, $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{4^k}$ et $R'_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$. Prouver alors que :

① $\forall n, n\in\mathbb{N},\ 0\le R_n\le \frac{1}{3\cdot 4^n}$,

② pour n assez grand, $R'_n\ge \frac{c}{n+1}$ (c a été défini dans la question D 2.c)).

c) Commenter les résultats établis à la question 5.b).