CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

CAPESA

SESSION 2001

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Deuxième composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Problème 1

1. Notations et préliminaires.

- E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $L(E)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On notera id_E l'identité de E, 0_E le vecteur nul de E et $0_{L(E)}$ l'endomorphisme nul de E.

- v étant un endomorphisme non nul de E et k étant un entier naturel, on définit v^k par : $v^0 = id_E$ et $v^{k+1} = v^k \circ v$.

- Un endomorphisme v de E est nilpotent d'indice $m \in \mathbb{N}^*$ si $v^{m-1} \neq 0_{L(E)}$ et $v^m = 0_{L(E)}$.

- f étant un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel F, on désigne par $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de f.

- Si F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on notera dim(F) la dimension de F.

- u étant un endomorphisme de E, on désigne par φ_u l'application définie sur $L(E)$ par : $\forall v \in L(E),\ \varphi_u(v) = u \circ v - v \circ u$.

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_u, en particulier la diagonalisation de u *et de* φ_u.

1.1. Vérifier que, pour tout endomorphisme u de E, φ_u est un endomorphisme de $L(E)$.

1.2. Pour tout nombre complexe λ, déterminer $\varphi_{\lambda.id_E}$.

1.3. Montrer que, pour tout endomorphisme u de E, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_u)) \geq 2$.

2. Etude d'un exemple.

Dans cette partie, on suppose que $n=2$ et on désigne par $B=(e_1\,;e_2)$ une base de E.
Soit u l'endomorphisme de E tel que $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ soit la matrice de u relativement à la base B.

2.1. u est-il un endomorphisme diagonalisable ?

On considère M_1, M_2, M_3 et M_4 les matrices carrées à coefficients complexes d'ordre 2 définies par : $M_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $M_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $M_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et on désigne par θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 les endomorphismes de E dont les matrices relativement à la base B sont respectivement M_1, M_2, M_3 et M_4. Ainsi $C=(\theta_1\,;\theta_2\,;\theta_3\,;\theta_4)$ est une base de $L(E)$.

2.2. Déterminer la matrice Δ de φ_u relativement à la base C.

2.3. φ_u est-il diagonalisable ? Préciser les valeurs propres non nulles de φ_u et la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi_u)$.

2.4. Déterminer le sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de φ_u.

3. Etude du cas où u est diagonalisable.

Dans cette partie, on suppose que u est un endomorphisme diagonalisable de E. On désigne par $(\varepsilon_j)_{1\le j\le n}$ une base de E constituée de vecteurs propres de u. Pour tout $(i\,;j)\in[1\,;n]^2$, on définit l'endomorphisme $v_{i,j}$ de E par :

$$v_{i,j}(\varepsilon_i)=\varepsilon_j \text{ et } v_{i,j}(\varepsilon_k)=0_E \text{ si } k\neq i.$$

3.1. Prouver que $v_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_u.

3.2. En déduire que φ_u est diagonalisable.

3.3. Soient $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes et $V(\lambda_1),\cdots,V(\lambda_r)$ les sous-espaces propres associés de dimensions respectives $n_1,\cdots,n_r$.

3.3.1. Quelle relation vérifient $n, n_1,\cdots,n_r$?

3.3.2. Exprimer la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi_u)$ et le rang de φ_u en fonction de $n_1,\cdots,n_r$.

4. Etude du cas où φ_u est diagonalisable

On suppose maintenant que φ_u est diagonalisable.

4.1. Soit x un vecteur donné de E, non nul.

4.1.1. Montrer que : $\forall y \in E, \exists w \in L(E)$ tel que $y = w(x)$.

4.1.2. Montrer qu'il existe une base de E notée B(x) telle que : $B(x) = (v_k(x))_{1 \le k \le n}$ où $\forall k \in [1 ; n], v_k$ est un vecteur propre de φ_u.

4.2. Démontrer que u est diagonalisable.

4.3. Montrer que : $\varphi_u = 0_{L(E)} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u = \lambda . id_E$.

5. Une propriété des vecteurs propres de φ_u.

Dans cette partie, on suppose que φ_u admet une valeur propre non nulle $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et v désigne un vecteur propre, non nul, de φ_u associé à λ.

5.1.1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, v^k est un vecteur propre de φ_u et préciser la valeur propre associée.

5.1.2. En déduire que v est un endomorphisme nilpotent. Quel est l'indice maximal de v ?

5.2. Dans cette question, on suppose que v est nilpotent d'indice n.

5.2.1. Montrer que pour tout naturel k tel que : $1 \le k \le n-1$, $\dim(\mathrm{Ker}(v^k)) < \dim(\mathrm{Ker}(v^{k+1}))$.

5.2.2. Pour tout naturel k tel que $1 \le k \le n$, déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(v^k))$.

5.2.3. Démontrer que φ_u est diagonalisable.

Problème 2 : les nombres d'Euler

- n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 3. Soit $\Omega_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un ensemble de n nombres réels dont les indices sont choisis de telle sorte que $1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow x_k < x_{k+1}$.

- Un **zigzag** de Ω_n est une permutation $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$ des n nombres de Ω_n de sorte que les signes des quantités $x_{\sigma(k+1)} - x_{\sigma(k)}$ alternent en fonction de k :
si 1 < k < n, les signes de $x_{\sigma(k+1)} - x_{\sigma(k)}$ et de $x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k-1)}$ sont opposés.

- Un zigzag de Ω_n est appelé **de première espèce** lorsque $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)}$ et **de seconde espèce** lorsque $x_{\sigma(1)} > x_{\sigma(2)}$.

- Par exemple (4,3,5,1,2) est un zigzag de seconde espèce de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; par contre (2,5,1,3,4) n'est pas un zigzag.

- On note $E_n(\Omega_n)$ le nombre de zigzags de première espèce et $E'_n(\Omega_n)$ le nombre de zigzags de seconde espèce des nombres de Ω_n.

- Pour n = 2, on conviendra que $E_2(\Omega_2) = E'_2(\Omega_2) = 1$; (1,2) et (2,1) seront considérés comme des zigzags, respectivement de première et de seconde espèce de $\Omega_2 = \{1,2\}$.

- Pour n = 1, on conviendra que $E_1(\Omega_1) = E'_1(\Omega_1) = 1$; (1) sera considéré comme un zigzag de première espèce et comme un zigzag de seconde espèce de $\Omega_1 = \{1\}$.

- Pour x réel, on note [x] la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

1. Une formule de récurrence pour calculer les nombres d'Euler

1.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; démontrer que $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$ est un zigzag de première espèce de Ω_n si et seulement si $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ est un zigzag de première espèce de l'ensemble $I_n = \{1, 2, ..., n\}$.

1.1.2. En déduire que le nombre de zigzags de première espèce de Ω_n est égal au nombre de zigzags de première espèce de I_n.

On notera E_n cette valeur commune : $E_n = E_n(\Omega_n) = E_n(I_n)$ et on posera $E_0 = 1$; les nombres E_n ainsi définis sont appelés **nombres d'Euler.**

1.2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, E_n'(\Omega_n) = E_n$.

1.3. Par un recensement des zigzags correspondants, calculer E_3, E_4 et E_5.

1.4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ un zigzag de première espèce des nombres de I_{n+1} :

1.4.1. Si $a_i = 1$, montrer que i est impair, soit i = 2k+1.

1.4.2. Montrer que $(a_1, a_2, \dots, a_{2k})$ est un zigzag de première espèce si k > 0.

1.4.3. Montrer que $(a_{2k+2}, a_{2k+3}, \dots, a_{n+1})$ est un zigzag de seconde espèce si 2k < n.

1.4.4. En déduire la formule : $\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} E_{2k} E_{n-2k} \quad (1)$.

1.5.1. Par un raisonnement analogue sur la place du nombre n+1 dans un zigzag de première espèce de I_{n+1}, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2k+1} E_{2k+1} E_{n-1-2k} \quad (2)$$

1.5.2. Montrer que la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} E_0 = 1 \\ E_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, E_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k E_{n-k} \end{cases} \quad (3)$

2. Lien avec une équation différentielle

Une urne contient n, ($n \in \mathbb{N}^*$) boules numérotées de 1 à n. On effectue une suite de tirages sans remise des n boules. On note a_n la probabilité que la suite des n numéros obtenus soit un zigzag de première espèce de I_n.

2.1. Calculer a_n en fonction de E_n et de n. On pose $a_0 = 1$. Trouver une formule de récurrence permettant de calculer les nombres a_n.

2.2. Démontrer que $0 < a_n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2.3. Démontrer que le rayon de convergence R de la série entière de terme général $u_n = a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

On note S(x) la somme de cette série sur l'intervalle]-R,+R[.

2.4. Démontrer que S est solution de l'équation différentielle : $2y' = y^2 + 1$ sur l'intervalle]-R,+R[.

2.5. Calculer S(x) pour $x \in$]-R,+R[.

3. Développements en séries entières

3.1.1. Démontrer que $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos(x)}+\tan(x)$ pour $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, k entier relatif.

3.1.2. Donner, en utilisant les nombres d'Euler, les développements en séries entières des fonctions $x \mapsto \tan(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ sur l'intervalle]-R,+R[.

3.1.3. Quelle est la valeur de la dérivée d'ordre n en 0 de la fonction tan ?

3.1.4. Montrer que $1 \leq R \leq \frac{\pi}{2}$.

3.2. Trouver un développement limité d'ordre 5 de la fonction S au voisinage de 0.

3.3. Si l'urne de la deuxième partie contient 5 boules, quelle est la probabilité pour qu'une suite de tirages sans remise des 5 boules ne donne pas de zigzag ?

3.4. En utilisant des relations simples liant les fonctions tan, $\frac{1}{\cos}$, sin et cos, démontrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} E_{2k+1} = 1 \quad (4)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k} E_{2k} = 0 \quad (5)$$

3.5. A l'aide de ces formules, calculer E_6 et E_7.

3.6. En utilisant les nombres d'Euler, trouver les développements en séries entières des fonctions $\varphi : x \mapsto \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$ et $\psi : x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ sur]-R,+R[.