CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

CAPESA

SESSION 2002

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Première composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Les nombres de Bernoulli

PARTIE -I-

* On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

* (C) est la courbe d'équation $y = f(x)$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- 1-1- Démontrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1-2- Donner le tableau de variation de f.

1-3- Etudier les branches infinies de (C) et préciser les équations des asymptotes quand elles existent.

1-4- Tracer la courbe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité est égale à 2 cm.

2- 2-1- Démontrer que f a un développement limité d'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0.

2-2- Trouver ce développement limité pour $n = 4$.

3- 3-1- Démontrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner ce développement.

3-2- En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'elle admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ sur $\mathbb{R}$ quel que soit l'entier naturel n.

3-3- Calculer $f^{(k)}(0)$ pour $0 \leq k \leq 4$.

4- On appelle nombres de Bernoulli, les nombres $B_k = f^{(k)}(0)$ où k est un entier naturel.

4-1- Démontrer que les nombres B_k sont des nombres rationnels.

4-2- Démontrer que, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $B_{2p+1} = 0$.

5- 5-1- En remarquant que $(e^x - 1)\,f(x) = x$ et en dérivant $(n+1)$ fois membre à membre cette égalité, démontrer que B_n vérifie : $\begin{cases} B_0 = 1 \\ n \geq 1 \Rightarrow B_n = \dfrac{-1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} C_{n+1}^{k}\, B_k \end{cases}$

5-2- En utilisant ce résultat, calculer B_6.

6- 6-1- En posant $z = \dfrac{1}{y}$, résoudre l'équation différentielle

$$(E) : xy' + (x-1)y + y^2 = 0.$$

6-2- Vérifier en particulier que f est solution de (E).

7- 7-1- Soit g la fonction définie par $g(x) = xf'(x) + (x-1)f(x) + f^2(x)$; en calculant $g^{(n)}(0)$, trouver une autre relation de récurrence liant les nombres B_n.

7-2- Montrer que les nombres $b_n = \dfrac{B_{2n}}{(2n)!}$ vérifient : $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = \dfrac{1}{12} \\ n \geq 2 \Rightarrow b_n = \dfrac{-1}{2n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} b_k b_{n-k} \end{cases}$

7-3- En déduire la valeur du nombre de Bernoulli B_8.
N.B. On résumera les résultats trouvés dans un tableau de la forme :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_n										

8- En utilisant la formule (7-2) démontrer que B_{2n} est du signe de $(-1)^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

PARTIE -II-

1- Pour $t \in \mathbb{R}$, on note f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f_t(0) = 1 \\ x \neq 0 \Rightarrow f_t(x) = \dfrac{x\,e^{tx}}{e^x - 1} \end{cases}$

1-1- Démontrer que f_t est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1-2- Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $f_t^{(n)}(0)$ est une fonction polynomiale de t qu'on notera $P_n(t)$. Montrer que $P_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, B_k\, t^{n-k}$. Vérifier ainsi que $P_n(0) = B_n$.

2- 2-1- Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(t+1) - P_n(t) = nt^{n-1}$.

2-2- Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $P_n(0) = P_n(1)$.

2-3- Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P_n'(t) = nP_{n-1}(t)$.

2-4- Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,dt = 0$.

PARTIE -III-

* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $S_k(n) = \sum_{p=1}^{p=n} p^k$. Le but de cette partie est de calculer cette somme sous la forme d'une fonction polynomiale de n.

1- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_n(x) = x \sum_{p=0}^{p=n-1} e^{px}$.

1-1- Développer h_n en série entière sur $\mathbb{R}$.
1-2- Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f_n(x)$.
1-3- En déduire un autre développement en série entière de h_n, avec les nombres B_j.

2- 2-1- Démontrer la formule $S_k(n) = n^k + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{j=k} C_{k+1}^j \, B_j \, n^{k+1-j}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

2-2- Calculer $S_4(n) = \sum_{p=1}^{p=n} p^4$ et $S_5(n) = \sum_{p=1}^{p=n} p^5$.

2-3- On vérifiera que $S_4(n)$ et $S_5(n)$ sont des fonctions polynomiales de n. Trouver les racines réelles de ces deux fonctions polynomiales.

PARTIE -IV-

* On admettra le résultat suivant : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{|B_{2k}| \ (2\pi)^{2k}}{2\ (2k)!}$.

* Pour une démonstration de ce résultat, on pourrait se référer à la deuxième épreuve du concours externe du CAPESA de 1997.

1- Démontrer que lorsque k tend vers $+\infty$, $B_{2k} \sim \frac{2\ (-1)^{k-1}\ (2k)!}{(2\pi)^{2k}}$.

2- 2-1- Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général

$u_n(x) = \frac{B_n}{n!} x^n$.

2-2- Démontrer que la somme de cette série est égale à $f(x)$ sur l'intervalle de convergence $]-R,+R[$.

3- Développer en série entière la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = x \coth(x)$ si $x \neq 0$ et $f_2(0) = 1$. (coth est la fonction cotangente hyperbolique). Préciser en particulier le rayon de convergence de la série obtenue.

4- Développer en série entière la fonction f_3 définie sur $]-\pi,+\pi[$ par $f_3(x) = x\text{cotan}(x)$ si $x \neq 0$ et $f_3(0) = 1$.

PARTIE -V-

1- Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose $u_n(p) = \int_0^{+\infty} e^{-nt}\, t^p\, dt$.

1-1- Démontrer que cette intégrale est convergente.
1-2- Trouver une relation de récurrence liant $u_n(p+1)$ et $u_n(p)$.
1-3- Calculer $u_n(p)$ en fonction de n et de p.

2- Pour $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ on note $I_n(k) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2k-1}\, e^{-nt}}{e^t - 1}\, dt$. Démontrer que cette intégrale est convergente. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $I_n(k)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3- Pour $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose $s_n(k) = \sum_{p=1}^{p=n} u_p(2k-1)$.

3-1- Calculer $s_n(k)$ en fonction de $I_n(k)$ et de $I_0(k)$.

3-2- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2k-1}}{e^t - 1}\, dt$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

3-3- Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1}\, dt$.