CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE **C A P E S A**
SESSION 2004

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Première composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

1 Définitions et notations

Soit E un $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E.

Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est de rang fini si $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. La dimension de $f(E)$ est appelée rang de f et on la note $rg(f)$.

L'ensemble des endomorphismes de rang fini est noté $\mathcal{F}(E)$.

2 Exemples et Quelques propriétés des opérateurs de rang finis

1. Soit $E = C^\infty([0,1], \mathbb{R})$. On définit $f : E \to E$,$x \to f(x) = x'$ dérivée de x. Pour tout entier naturel $k, k \geq 1$, on note g_k l'élément de E défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $g_k(t) = e^{kt}$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel $k, k \geq 1$, le système $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ est libre.
   b) En déduire que $f \notin \mathcal{F}(E)$.

2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $B \in E, B \neq 0$, on rappelle que pour tout $A \in E$, il existe un couple unique $(Q, R) \in E^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(B)$. Le polynôme R (resp : Q) est appelé le reste (resp : le quotient) de la division euclidienne de A par B. On définit $f : E \to E$ qui à tout polynôme P associe $f(P)$ qui est le reste de la division euclidienne de P par B.
   a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
   b) Prouver enfin que $f \in \mathcal{F}(E)$.

3. Soit E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel.
   a) Montrer que $\mathcal{F}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.
   b) Soit $u \in \mathcal{F}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $u \circ v \in \mathcal{F}(E)$. et $v \circ u \in \mathcal{F}(E)$.
   c) Montrer que $id_E \in \mathcal{F}(E)$ si, et seulement si, $\dim(E) < +\infty$.
   d) Déduire de ce qui précède que $\mathcal{F}(E) = \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, $\dim(E) < +\infty$.

4. Soit $f \in \mathcal{F}(E)$, $rg(f) = n \geq 1$.
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ deux bases de $f(E)$. On note f_1 la restriction de f à $f(E)$. Soit A et A' les matrices de l'endomorphisme f_1 respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$,
a) Montrer que
$$A' = P^{-1}AP.$$
b) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$
$$\det(A - zI_n) = 0 \Longleftrightarrow \det(A' - zI_n) = 0.$$

3 Inversibilité de $id_E - f$

Ici $\mathbb{K}$ est un corps commutatif. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{F}(E)$ vérifiant
$$\ker(id_E - f) = \{0_E\}.$$
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de $f(E)$, on note f_1 la restriction de f à $f(E)$ et A la matrice de f_1 dans la base $\mathcal{B}$. On notera $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ le terme général de la matrice A.

1. Montrer que $(id_E - f)_{/f(E)}$ est injective et en déduire que $I_n - A$ est inversible.
2. Soit $y \in E$. Justifier l'existence de n éléments $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de $\mathbb{K}$ tels que
$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$
et montrer qu'il existe un n- uplet unique $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$
$$\beta_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = \alpha_i.$$
3. Montrer que l'équation d'inconnue $u \in E$
$$(id_E - f)(u) = y$$
admet pour unique solution x définie par
$$x = y + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$
Qu'en déduit-on pour $id_E - f$?

4 Résolution d'une équation intégrale

Ici E désigne l'ensemble des fonctions numériques, continues sur $[0, 1]$. Soit y une fonction donnée de E, on se propose de déterminer toutes les fonctions $x \in E$ vérifiant pour tout $t \in [0, 1]$
$$x(t) - \int_0^1 (t - s)x(s)ds = y(t). \tag{1}$$

1. Soit f l'application de E dans E qui à tout fonction $x \in E$ associe la fonction $f(x)$ de E définie pour tout $t \in [0,1]$ par

$$f(x)(t) = \int_0^1 (t-s)x(s)ds.$$

a) Montrer que f est un opérateur de rang fini dont une base B de $f(E)$ est constituée des fonctions e_1 et e_2 définies pour tout $t \in [0,1]$ respectivement par $e_1(t) = 1$ et $e_2(t) = t$. On note f_1 la restriction de f à $f(E)$.
b) Montrer que $\ker(id_E - f) = \{0_E\}$.

2. a) Montrer que les coordonnées β_1 et β_2 de $f(y)$ dans la base B sont :

$$\beta_1 = -\int_0^1 sy(s)ds \text{ et } \beta_2 = \int_0^1 y(s)ds.$$

b) Déterminer la matrice A de f_1 dans la base B, montrer que $I_2 - A$ est inversible et calculer $(I_2 - A)^{-1}$.
c) En déduire l'expression de la solution x de l'équation (1) en fonction de y.
d) Donner l'expression de x pour $y(t) = t^2$.

5 Valeurs propres d'un opérateur de rang fini

1. On suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{F}(E)$, 0 est une valeur propre de f.

2. On pose $rg(f) = n \geq 1$, soit $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de $f(E)$ et A la matrice de l'endomorphisme f_1, restriction de f à $f(E)$ dans la base B.
a) En utilisant la question **1)** partie **2** montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est valeur propre de f alors

$$I_n - \frac{1}{\lambda}A \text{ non inversible.}$$

En déduire que si λ est une valeur propre non nulle de f alors

$$\det(A - \lambda I_n) = 0. \tag{2}$$

b) Montrer que pour tout nombre ρ non nul tel que $\frac{1}{\rho}$ n'est pas une valeur propre de f, $id_E - \rho f$ est inversible. En déduire que les valeurs propres non nulles λ de f sont exactement les racines non nulles de l'équation (2).

3. On considère à nouveau l'opérateur de rang fini f défini dans la partie **4**.
a) Déterminer les valeurs propres de f.
b) Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction x_n pour tout $t \in [0,1]$ par :

$$x_n(t) = \cos(2n\pi t).$$

Montrer que pour tout entier n non nul, le système $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est un système libre de $\ker(f)$. Qu'en déduit-on pour le sous-espace propre associé à la valeur propre 0?

Désormais E est un espace préhilbertien complexe de dimension infinie. Le produit scalaire de deux vecteurs x, y de E sera noté (x, y). On dira qu'un endomorphisme f de E est hermitien si pour tout $x, y \in E$

$$(f(x), y) = (x, f(y)).$$

Dans la suite f est un endomorphisme hermitien, de rang fini $n > 0$. On notera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de f qui sont distinctes deux à deux. Pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, on notera E_{λ_i} le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.

4. a) Montrer que toute valeur propre de f est réelle.
   b) Montrer que pour tout $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}, i \neq j$ on a $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$.

5. Justifier que

$$E = f(E) \oplus f(E)^{\perp}.$$

   a) Montrer que $f(E)^{\perp}$ est stable par f .
   b) Soit $t \in f(E)^{\perp}$. Calculer $(f(t), f(t))$ et en déduire que $f(E)^{\perp} \subset \ker(f)$.
   c) Soit $t \in \ker(f)$. Pour tout $u \in E$, calculer $(t, f(u))$ et en déduire que $f(E)^{\perp} = \ker(f)$, puis que

$$E = f(E) \oplus \ker(f).$$

   Qu'en déduit-on pour la dimension de $\ker(f)$?

6. Soit g la restriction de f à $f(E)$. Montrer que les valeurs propres de g sont exactement $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ et en déduire que

$$f(E) = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}.$$

   En déduire l'existence de n réels non nuls, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ et d'une base orthonormée $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ de $f(E)$ vérifiant pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f(\varepsilon_i) = \mu_i \varepsilon_i$.

6 Alternative de Fredholm pour un opérateur de rang fini

Soit f un opérateur hermitien, de rang fini $n > 0$, défini sur un espace préhilbertien complexe E. On se propose de résoudre l'équation d'inconnue $x \in E$

$$x - \rho f(x) = y \tag{3}$$

où ρ est un nombre réel non nul donné et y un vecteur donné de E.

On notera $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ les n valeurs propres réelles non nulles de f et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base orthonormée de $f(E)$ formée de vecteurs propres de f vérifiant pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f(\varepsilon_i) = \mu_i \varepsilon_i$, dont l'existence a été établie dans la partie précédente.

1. *On suppose que $\frac{1}{\rho}$ n'est pas une valeur propre de f.*
   a) Montrer que l'équation (3) admet une unique solution. On notera x_0 cette solution.
   b) Montrer qu'il existe un unique n -uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$x_0 = y + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i.$$

   En déduire que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(f(x_0), \varepsilon_k) = (f(y), \varepsilon_k) + \mu_k \alpha_k$$

   puis que

$$\alpha_k = (x_0, \varepsilon_k) - (y, \varepsilon_k).$$

c) En écrivant que x_0 vérifie l'équation (3) montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(x_0, \varepsilon_k) = \frac{1}{1 - \rho\mu_k}(y, \varepsilon_k).$$

d) On pose $\gamma = \frac{1}{\rho}$. Déduire de ce qui précède que

$$x_0 = y + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k (y, \varepsilon_k)\varepsilon_k}{\gamma - \mu_k}.$$

2. *On note* $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ *les* p ($p \le n$) *valeurs propres non nulles de* f qui sont distinctes deux à deux.
On suppose maintenant qu'il existe $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ *tel que* $\rho = \frac{1}{\lambda_k}$.
a) Justifier pour tout $x \in E, y \in E$

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{p} x'_i + x'' \\ y = \sum_{i=1}^{p} y'_i + y'' \end{cases}$$

avec pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ x'_i et $y'_i \in E_{\lambda_i}$ et $x'', y'' \in \ker(f)$.
b) En déduire x vérifie (3) si, et seulement si,

$$\text{pour tout } i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad x'_i(1 - \rho\lambda_i) = y'_i \text{ et } x'' = y''.$$

c) Conclure de ce qui précède que si (3) admet une solution, alors nécessairement $y \in E^{\perp}_{\lambda_k}$.
d) *On suppose que la condition* $y \in E^{\perp}_{\lambda_k}$ *est remplie.*
d1) Montrer que l'équation (3) possède une unique solution $x'_0 \in E^{\perp}_{\lambda_k}$ et que

$$x'_0 = y'' + \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{p} \frac{1}{1 - \rho\lambda_i} y'_i.$$

d2) En déduire que toute solution x de (3) s'écrit

$$x = x'_0 + x'$$

avec $x' \in E_{\lambda_k}$.

7 Un exemple d'application

On pourra utiliser la formule de Fubini : pour toute fonction h continue sur $[0,1] \times [0,1]$,à valeurs dans C, on a

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 h(s,t)dt \right) ds = \int_0^1 \left(\int_0^1 h(s,t)ds \right) dt.$$

Ici E désigne l'ensemble des fonctions à valeurs dans C, continues sur $[0,1]$. On munit E du produit scalaire défini pour tout $u, v \in E$ par

$$(u, v) = \int_0^1 u(t)\overline{v(t)}dt.$$

Etant donné ρ un réel non nul et $y : t \to t^2$, on se propose de déterminer toutes les fonctions $x \in E$ vérifiant pour tout $t \in [0,1]$

$$x(t) - \rho \int_0^1 (t+s)x(s)ds = t^2. \tag{4}$$

On désigne par f l'application de E dans E qui à tout fonction $x \in E$ associe la fonction $f(x)$ de E définie pour tout $t \in [0,1]$ par

$$f(x)(t) = \int_0^1 (t+s)x(s)ds.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E, hermitien, de rang fini et montrer qu'il admet pour valeurs propres non nulles

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Montrer que les fonctions $x_1 : s \to 1 + \sqrt{3}s$ et $x_2 : s \to 1 - \sqrt{3}s$ constituent une base orthogonale de vecteurs propres de $f(E)$.

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 s^2 x_1(s)ds \text{ et } \int_0^1 s^2 x_2(s)ds$$

et en déduire que si $\rho = \frac{1}{\lambda_1}$ ou $\rho = \frac{1}{\lambda_2}$ l'équation (4) n'a pas de solution.

3. On suppose que $\rho \neq \frac{1}{\lambda_1}$ et $\rho \neq \frac{1}{\lambda_2}$.
a) Montrer que (4) admet une solution unique x_0 et qu'il existe une unique couple $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $s \in [0,1]$

$$x_0(s) = a + bs + s^2.$$

b) En écrivant que x_0 est solution de (4) montrer que a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} (1-\frac{\rho}{2})a - \frac{\rho}{3}b = \frac{\rho}{4} \\ -\rho a + (1-\frac{\rho}{2})b = \frac{\rho}{3} \end{cases}$$

4. Résoudre le système précédent et conclure que pour tout $s \in [0,1]$

$$x_0(s) = \frac{1}{6}\frac{\rho(\rho-18)}{\rho^2+12\rho-12} - \frac{\rho(\rho+4)}{\rho^2+12\rho-12}s + s^2.$$