CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

CAPESA

SESSION 2004

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Deuxième composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Dans tout le problème, a et b sont deux nombres réels tels que $0 < a < b$.

Dans la première partie, on étudie deux suites construites par récurrence à partir de a et b et convergeant vers un nombre appelé *moyenne arithmético-géométrique* de a et b. On obtient également une majoration permettant de contrôler la « vitesse de convergence » de ces suites. Enfin on étudie un exemple numérique.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de certaines intégrales impropres convergentes. On donne une expression de ces intégrales à l'aide de moyennes arithmético-géométriques appropriées. Cela permet un calcul approché efficace de ces intégrales.

Enfin, dans la troisième partie, on applique les résultats précédents à l'étude des intégrales impropres $\int_y^z \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$ où P est un polynôme du troisième degré à coefficients réels qui est strictement positif sur l'intervalle ouvert $]y,z[$ et où chacune des bornes y et z est soit une racine de P, soit $-\infty$, soit $+\infty$. Dans tous les cas où une telle intégrale existe, on en obtient soit la valeur explicite, soit une expression à l'aide d'une moyenne arithmético-géométrique.

A. Première partie

A.I. On définit par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels de la manière suivante :

$a_0 = a$; $b_0 = b$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

A.I.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 < b_n - a_n \leqslant \frac{b-a}{2^n}.$$

A.I.2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

A.I.3. Montrer que, quels que soient les entiers naturels p et q, on a $a_p < b_q$.

A.I.4. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et qu'elles ont la même limite.

Cette limite, qu'on notera $\mathrm{M}(a,b)$, est appelée *moyenne arithmético-géométrique* des nombres a et b.

A.I.5. Montrer que, pour tout réel t strictement positif, on a $\mathrm{M}(ta,tb) = t\,\mathrm{M}(a,b)$.

A.II. On pose $\rho = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $\lambda = \dfrac{b^2(b-a)}{(b+a)^3}$ et, pour tout entier n,

$$\rho_n = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{b_n^2(b_n-a_n)}{(b_n+a_n)^3}.$$

A.II.1. Donner une expression de ρ_{n+1}^2 en fonction de ρ_n.

A.II.2. Donner une expression de λ_n en fonction de ρ_n.

A.II.3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_{n+1} < \lambda_n^2$. En déduire que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \lambda_n \leqslant \lambda^{2^n}$$

A.II.4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'erreur relative commise en remplaçant $\mathrm{M}(a,b)$ par a_n (c'est-à-dire le nombre $\dfrac{\mathrm{M}(a,b)-a_n}{\mathrm{M}(a,b)}$) est majorée par $\dfrac{1-\rho_n^2}{1+\rho_n^2}$.

A.II.5. En déduire que cette erreur relative est majorée par $4\,\lambda^{2^n}$.

A.III. Déterminer une valeur approchée de $\mathrm{M}(50,200)$ à 10^{-6} près par défaut.

B. Deuxième partie

B.I.1. Des réels strictement positifs α et β étant fixés, justifier la convergence de l'intégrale impropre

$$\mathrm{I}(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}}.$$

B.I.2. Calculer $\mathrm{I}(\alpha,\alpha)$.

B.I.3. On pose

$$\mathrm{J}(\alpha,\beta)=\int_0^{\sqrt{\alpha\beta}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}}.$$

En faisant dans cette intégrale le changement de variable $x\mapsto\frac{\alpha\beta}{x}$, établir une relation entre $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$ et $\mathrm{J}(\alpha,\beta)$ [on justifiera l'utilisation du changement de variable].

B.II.1. En faisant, dans l'intégrale $\mathrm{I}(a_1,b_1)$, le changement de variable $x\mapsto\sqrt{x^2+ab}-x$, prouver que $\mathrm{I}(a_1,b_1)=\mathrm{I}(a,b)$.

B.II.2. Montrer que, quel que soit l'entier $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\frac{\pi}{2b_n}<\mathrm{I}(a,b)<\frac{\pi}{2a_n}.$$

B.II.3. En déduire une expression de $\mathrm{I}(a,b)$ en fonction de $\mathrm{M}(a,b)$.

B.III.1. En appliquant les résultats précédemment obtenus, déterminer une valeur approchée à 10^{-6} près de l'intégrale

$$\mathrm{J}_0=\int_0^{100}\frac{dx}{\sqrt{(x^2+2\,500)(x^2+40\,000)}}.$$

B.III.2. Dans cette question, on se propose de comparer l'efficacité de la méthode d'approximation précédente avec celle de la classique « méthode des rectangles », appliquée au calcul approché de l'intégrale J_0. On pose, pour chaque entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$s_n=\frac{100}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{100k}{n}\right)^2+2\,500\right]\left[\left(\frac{100k}{n}\right)^2+40\,000\right]}}$$

et

$$S_n=\frac{100}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{100k}{n}\right)^2+2\,500\right]\left[\left(\frac{100k}{n}\right)^2+40\,000\right]}}.$$

Déterminer une valeur de l'entier n telle que S_n soit une valeur approchée à 10^{-6} près par excès de J_0. (Le calcul de cette valeur n'est pas demandé.)

B.IV.1.i. Justifier l'existence de l'intégrale

$$\mathrm{K}(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+a^2)(x+b^2)}}.$$

B.IV.1.ii. Démontrer que $K(a,b) = \dfrac{\pi}{M(a,b)}$

B.IV.2.i. Justifier l'existence de l'intégrale

$$H(a,b) = \int_{-b^2}^{-a^2} \frac{dx}{\sqrt{x(x+a^2)(x+b^2)}}.$$

B.IV.2.ii. Démontrer que $H(a,b) = K(a,b)$.
[On pourra faire dans l'intégrale $H(a,b)$ le changement de variable $x \mapsto -\dfrac{x+b^2}{x+a^2}$.]

B.V. On considère deux réels s et p vérifiant $|s| < 2p$.

B.V.1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre

$$L(s,p) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^4 + sx^2 + p^2)}}.$$

B.V.2. En faisant dans cette intégrale le changement de variable $x \mapsto \dfrac{p - x^2}{2x}$, prouver l'égalité

$$L(s,p) = \frac{\pi}{2M\left(\frac{1}{2}\sqrt{s+2p}, \sqrt{p}\right)}.$$

[Il pourra être utile de prouver que, si on pose $u = \dfrac{p-x^2}{2x}$, on a

$$x^4 + p^2 = 2(2u^2 + p)\left(\sqrt{u^2+p} - u\right)^2.]$$

C. Troisième partie

On considère un polynôme P du troisième degré à coefficients réels.

C.I. Montrer qu'il existe des réels u, v et w (non nécessairement distincts) vérifiant $u \leqslant v \leqslant w$ et tels que, quel que soit le réel x, on ait

$$P(x) = 0 \text{ si et seulement si } [x = u \text{ ou } x = v \text{ ou } x = w].$$

C.II. On suppose que le polynôme P est unitaire, c'est-à-dire de la forme $X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, α, β et γ étant des réels quelconques.

C.II.1. On suppose que $u < v$ et $v = w$. Etudier la convergence de chacune des intégrales

$$\int_u^v \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} \quad \text{et} \quad \int_v^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}.$$

C.II.2. On suppose que $u = v$ et $v < w$. Montrer que l'intégrale

$$\int_w^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

est convergente et calculer sa valeur en fonction de u et w.

C.II.3. On suppose que $u = v = w$, et que P n'a aucune autre racine complexe. Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_u^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{P}(x)}}$$

C.II.4. On suppose que $u = v = w$, et que P a au moins une racine complexe non réelle. Montrer que l'intégrale

$$\int_u^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{P}(x)}}$$

a un sens et qu'elle peut s'exprimer à l'aide d'une moyenne arithmético-géométrique adéquate.

[On pourra faire dans l'intégrale le changement de variable $x \mapsto \sqrt{x-u}$.]

C.II.5. On suppose que $u < v < w$. Montrer que chacune des intégrales

$$\int_u^{v} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{P}(x)}} \quad \text{et} \quad \int_w^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{P}(x)}}$$

a un sens et peut s'exprimer à l'aide d'une moyenne arithmético-géométrique adéquate.

C.III. Reprendre l'étude de la question C.II. en supposant cette fois que P est un polynôme du troisième degré à coefficients réels quelconque (non nécessairement unitaire).

C.IV.1. Donner une expression de l'intégrale

$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}}$$

à l'aide d'une moyenne arithmético-géométrique.

C.IV.2. Déterminer une valeur approchée de A à 10^{-4} près.