CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

SESSION 1995

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Deuxième composition

(Coefficient : 2,5 - Durée : 5 h)

NOTATIONS

Toutes les fonctions définies dans le texte sont à valeurs réelles.
Pour tout intervalle I de R , on désigne par :
C(I) l'algèbre des fonctions continues sur I ;
pour tout entier p élément de N*, $C^p(I)$ l'algèbre des fonctions p fois dérivables sur I;
$C^{\infty}(I)$ l'algèbre des fonctions indéfiniment dérivables sur I.

Pour tout entier naturel , $R_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à n, R[X] celui des polynômes à coefficients réels.

P étant un polynôme non nul de $R_n[X]$ de la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, on note deg(P) son degré et val(P) sa valuation , c'est-à-dire Min{ $i \in \{0,1,..,n\} / a_i \neq 0$}. Un polynôme non nul est dit unitaire si le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

Soit E un espace vectoriel réel; L(E) désigne l'algèbre des endomorphismes de E, Id l'application identité de E, et Ker(f) et Im(f) respectivement le noyau et l'image d'un élément f de L(E).

R(X) désigne le corps des fractions rationnelles à une indéterminée, à coefficients réels.

Pour x réel strictement positif , ln(x) désigne le logarithme népérien de x et $\log_a(x)$ le logarithme de base a de x, où a est un réel strictement positif différent de 1.

OBJET DU PROBLEME

Le but du problème est d'étudier l'ensemble des fonctions f continues

sur R^{+*} telles que : $\exists K \in R \quad \forall x \in R^{+*} \quad f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = K$

Pour K réel quelconque, on notera E_K l'équation fonctionnelle :

$\forall x \in R^{+*} \quad f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = K$

et S_K l'ensemble des solutions de E_K.

Les parties I., II. et III. sont <u>indépendantes.</u>

I. STRUCTURE DE S_0, S_K ET ETUDE DE CAS PARTICULIERS

1) a. Existe-t-il des fonctions constantes dans S_K ?
   b. Soit f élément de S_K. Quelle est la valeur de f(1) ?

2) Montrer que les fonctions $\log_a$ sont solutions d'une équation fonctionnelle E_K, où l'on déterminera K.

3) Montrer que la fonction définie sur R^{+*} par h(x) = Arctan x appartient à $S_{\pi/2}$.

4) a. Prouver que S_0 est un sous espace vectoriel de $C(R^{+*})$.
   b. Prouver que S_K est un sous espace affine de $C(R^{+*})$.

5) Démontrer que la solution générale de E_K s'obtient en ajoutant à la solution générale de E_0 une constante.

6)Soit $H_1=\left\{f \in C(R^{+*}) / \exists(a,b,c,d) \in R^4, c>0, d \geq 0, ad-bc \neq 0 \quad \text{et} \; \forall x \in R^{+*} f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\right\}$

a. Déterminer les éléments de $H_1 \cap S_0$.

b. En déduire que : $H_1 \cap S_K = \left\{f \in H_1 / \quad \exists \alpha \in R^* \; f(x)=\alpha\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{K}{2}\right\}$

7) On définit l'ensemble H_2:

$\left\{f \in C(R^{+*}) / \exists P_1 \in R_1[X], \exists P_2 \in R_2[X], \deg(P_1)=1, \deg(P_2)=2, \frac{P_2}{P_1} \text{irréductible} / \forall x>0 \; f(x)=\frac{P_2(x)}{P_1(x)}\right\}$

a. Déterminer la forme des éléments de $H_2 \cap S_0$.

b. Montrer qu'un élément quelconque de $H_2 \cap S_K$ peut s'écrire :

$$f(x)=\alpha \frac{(x-\rho)(x+1/\rho)}{x} \qquad \text{avec } \alpha \in R^* \text{ et } \rho \in R^{+*}$$

8) On pose, pour $n \in N^*$ et $x>0$: $\Phi_n(x)=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1}$

Montrer que, pour tout $x>0$, la suite $(\Phi_n(x))$ converge vers une limite notée $\Psi(x)$ et que Ψ appartient à S_0.

II. TECHNIQUE DE PROLONGEMENT LIEN AVEC LES FONCTIONS IMPAIRES

A. Technique de prolongement :

1) Soit f une fonction définie sur $]0,1]$, continue; on pose : $K = 2f(1)$

Montrer que l'on peut prolonger f de façon unique en $\overline{f}$ sur R^{+*}, solution de E_K.

2) Avec les notations précédentes, prouver que:

$$f \in C^1(]0,1]) \quad \Rightarrow \quad \overline{f} \in C^1(R^{+*})$$

3) a. Soit $f \in C^2(]0,1])$

Démontrer l'équivalence : $\bar{f} \in C^2(R^{+*}) \quad \Leftrightarrow \quad f'(1) = -f''(1)$

b. On définit sur $]0,1]$ la fonction t : $x \to t(x) = \ln^2(x) - 2x$

Déterminer le prolongement $\bar{t}$ de t ; $\bar{t}$ est-elle élément de $C^\infty(R^{+*})$?

B. Lien avec les fonctions impaires :

Soit $\Im$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues et impaires de R dans R.

1) a. Soit $f \in S_0$ et $g \in \Im$. Que peut-on dire de $g \circ f$?

b. Montrer que la fonction définie sur R^{+*} par :

$\forall x > 0 \quad h(x) = \frac{K}{2} + K \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ appartient à S_K.

c. Montrer que h' appartient à S_K; existe-t-il d'autres éléments de $S_K \cap C^1(R^{+*})$ dont la dérivée appartient aussi à S_K ?

2) a. Montrer que : $\forall g \in \Im \quad g \circ \ln \in S_0$

b. On définit alors :

$$\varphi : \Im \to S_0$$
$$g \mapsto g \circ \ln$$

Prouver que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c. On donne : $a(x) = x^3$ et $b(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi^{-1}(b)$.

III. ETUDE D'UNE FAMILLE DE POLYNOMES

n est un entier naturel quelconque.

A tout polynôme P de $R_n[X]$ défini par $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, on associe le polynôme Q défini par

$Q(X) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} X^i$; Q est noté dans la suite $u_n(P)$.

1) a. Montrer que si P, de degré k ($0 \le k \le n$) est de la forme $\sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, on a :

$$u_n(P)(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^{n-i} = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

b. Expliquer pourquoi : $\deg(u_n(P)) = n - \mathrm{val}(P)$

$\mathrm{val}(u_n(P)) = n - \deg(P)$

2) Montrer que u_n est un isomorphisme d'espaces vectoriels involutif.

3) a. Justifier que u_n est diagonalisable dans R, donner ses valeurs propres et prouver :

$$R_n[X] = \mathrm{Ker}\,(u_n - Id) \oplus \mathrm{Ker}(u_n + Id)$$

b. Montrer que Ker $(u_n$-Id) et Ker$(u_n$+Id) contiennent chacun des polynômes de degré n, sauf Ker$(u_0$+Id).

Dans la suite, Γ_n est l'ensemble des polynômes de Ker $(u_n$-Id) de degré n et Λ_n celui des polynômes de Ker$(u_n$+Id) de degré n.

4) a. Si P est élément de Γ_n, que vaut val(P) ?

b. Montrer que tout polynôme de Γ_n avec n impair admet -1 pour racine.

c. Montrer que tout polynôme de Λ_n admet 1 pour racine., pour n strictement positif.

5) On définit par récurrence la suite de polynômes $(T_n)_{n \in N}$:

$T_0(X)=2$, $T_1(X)=X$ et $\forall n \in N \quad T_{n+2}(X) = XT_{n+1}(X) - T_n(X)$

a. Prouver que T_n est de degré n, à coefficients entiers.

b. Justifier que :

$$\forall k \in N \quad T_k\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^k + \frac{1}{X^k}$$

c. On définit Δ :

$$\begin{array}{ccc} R_n[X] & \to & R_n[X] \\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i & \mapsto & \sum_{i=0}^{n} \lambda_i T_i \end{array}$$

Prouver que Δ est un automorphisme de $R_n[X]$ et que :

$$\forall P \in R_n[X] \quad \Delta(P)\left(X + \frac{1}{X}\right) = P(X) + P\left(\frac{1}{X}\right)$$

6) a. Prouver l'équivalence : $P \in \Gamma_{2n} \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}_n[X], \deg(A) = n, P(X) = X^n A\left(X + \frac{1}{X}\right)$

b. Application : Rechercher dans C les racines de $X^4+4X^3+2X^2+4X+1$

IV. SOLUTIONS DE E_0 ET FRACTIONS RATIONNELLES

Les fractions introduites dans cette partie sont données par un représentant irréductible.

On note : $L = \left\{Q \in \mathbb{R}(X) / Q(X) = Q\left(\frac{1}{X}\right)\right\}$

$M = \left\{Q \in \mathbb{R}(X) / Q(X) = -Q\left(\frac{1}{X}\right)\right\}$

1) a. Prouver que L et M sont des sous espaces vectoriels de R(X).

b. L et M sont-ils des sous-corps de R(X) ?

c. Démontrer : $\mathbb{R}(X) = L \oplus M$

2) Soit $Q = \frac{A}{B}$ un élément de L.

a. Prouver que : $Q(X) = \dfrac{A(X) + A\left(\frac{1}{X}\right)}{B(X) + B\left(\frac{1}{X}\right)}$

b. Utiliser III.5) pour en déduire : $\exists W \in \mathbb{R}(X) \quad Q(X) = W\left(X + \frac{1}{X}\right)$

3) <u>Ecriture d'un élément de L à l'aide de polynômes</u> :
(les notations du 2) sont conservées)

a. On suppose que <u>W est un polynôme</u> :

Prouver qu'il existe P élément de R[X] tel que : $Q(X) = P(X) + P\left(\frac{1}{X}\right)$

b. On suppose que <u>W n'est pas un polynôme</u> :
En introduisant la partie entière de W, montrer , à l'aide de la partie III, qu'il existe un polynôme P et(C,D), élément de $\Gamma_{2p} \times \Gamma_{2n}$ avec $0 \le p < n$ tels que :

$$Q(X) = P(X) + P\left(\frac{1}{X}\right) + X^{n-p}\frac{C}{D}$$

c. Cette écriture est-elle unique ?

4) a. Soit Q élément de R(X). Prouver que : $Q \in M \Leftrightarrow \exists Q_1 \in L \,/\, Q(X) = \left(X - \frac{1}{X}\right) Q_1(X)$

b. En déduire l'expression générale d'une fonction fraction rationnelle, élément de S_0.

5) Soit $\hat{S}_0$ l'ensemble des solutions de $\ddot{E}_0$, à dérivée fraction rationnelle définie sur R^{+*} et L' le sous espace vectoriel de L formé des fractions sans pôle sur R^{+*}.

a. Soit $f \in \hat{S}_0$. Montrer que : $\forall x > 0 \quad x f'(x) = \frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

b. On définit ainsi d: $\begin{array}{ccc} \hat{S}_0 & \rightarrow & L' \\ f & \mapsto & Xf'(X) \end{array}$

Prouver que d est une bijection et exprimer $d^{-1}(Q)$ à l'aide d'une intégrale, pour $Q \in L'$.

c. Comment peut-on écrire la dérivée d'un élément de $\hat{S}_0$?

6) <u>Application</u> :

On donne : $Q = \frac{aX}{B}, Q \in L'$ avec $a \neq 0$, B unitaire élément de Γ_2, et on pose $f = d^{-1}(Q)$.

a. Montrer que B est de la forme : $B = X^2 + 2\lambda X + 1$, $\lambda \in]-1, +\infty[$

b. On suppose : $\lambda \in]-1,1[$

On note : $\mu = \sqrt{1-\lambda^2}$

Montrer que : $\forall x > 0 \quad f(x) = k_1 \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{x+\lambda}{\mu}\right) + k_2$, k_1 et k_2 réels tels que $f(1)=0$.

c. On suppose : $\lambda=1$

Montrer que : $\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{a}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

d. On suppose : $\lambda \in]1, +\infty[$

Montrer que : $\forall x > 0 \quad f(x) = k \ln\left(\frac{x+\theta}{\theta x + 1}\right)$, $k \in R^*$ et $\theta \in R^{+*}$.