CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

SESSION 1996

Concours : INTERNE ET EXTERNE
Section : Mathématiques

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Première composition : algèbre - analyse

(C. Interne : Coefficient : 3 - Durée : 5 h)

Première composition

(C. Externe : Coefficient : 2,5 - Durée : 5 h)

Dans tout le problème, a est un entier strictement positif fixé.
Le but est de décrire et de comparer des suites de rationnels convergeant vers $\sqrt{a^2+1}$.

Notation : on pose $r = \dfrac{\sqrt{a^2+1}-a}{a}$.

Questions préliminaires

P.1. a) Montrer que :

$$\frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} < \sqrt{a^2+1} - a < \frac{1}{2a}.$$

b) En déduire que a est l'entier le plus proche de $\sqrt{a^2+1}$, c'est-à-dire que, pour tout entier k appartenant à $\mathbb{N}$, distinct de a,

$$\left|\sqrt{a^2+1} - a\right| < \left|\sqrt{a^2+1} - k\right|.$$

P.2. Application numérique :
En déduire une valeur approchée décimale de $\sqrt{626}$ à 10^{-5} près par excès.

PARTIE I **Méthode de PADÉ**

I.A. Une suite définie par récurrence

On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$t_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2a}\left(1 + a^2 - t_n^2\right).$$

I.A.1. En supposant (uniquement pour cette question) que $a = 2$, donner une représentation graphique permettant d'obtenir successivement les quatre premiers termes de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.A.2. a) Montrer que, pour tout entier n, t_n est un rationnel appartenant à $\left[a\,;a+\frac{1}{2a}\right]$.

b) Montrer que, si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\sqrt{a^2+1}$.

On pose , pour tout entier naturel n : $e_n = \left|t_n - \sqrt{a^2+1}\right|$.

I.A.3. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad e_{n+1} = e_n\left(\frac{\sqrt{a^2+1}+t_n}{2a} - 1\right)$.

b) Démontrer que, pour tout entier n, on a les deux inégalités suivantes :

$$(*) \quad e_n \leqslant \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2a^2}\right)^n \qquad ; \qquad (**) \quad e_n \geqslant a\frac{r^{n+1}}{2^n}.$$

c) Prouver que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

I.A.4. a) Vérifier que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad e_{n+1} = re_n\left(1 + (-1)^{n+1}\frac{e_n}{2ar}\right).$$

b) En déduire l'existence d'un réel λ appartenant à $\left]0\,;\frac{1}{2a}e^{\frac{1}{2r(2a^2-1)}}\right[$ tel que :

$$e_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda r^n.$$

I.B. Construction géométrique des termes de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(Aucun dessin n'est exigé dans cette partie.)

Soit $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan et A le point de coordonnées $(a,0)$.

Pour t élément quelconque de $\left[a\,;a+\dfrac{1}{2a}\right]$, on désigne par M, O_1, O_2, les points de l'axe $(0,\vec{i})$ d'abscisses respectives t, $t+a$ et $t-a$. On construit le point L tel que $\overrightarrow{ML} = \vec{j}$.

I.B.1. Montrer que les cercles (C_1) de centre O_1 passant par A et (C_2) de centre O_2 passant par L sont sécants en deux points distincts.

On note P le projeté orthogonal de ces deux points sur l'axe des abscisses et N le symétrique de M par rapport à P.

I.B.2. Montrer que l'abscisse t' de N est :

$$t' = t + \frac{1}{2a}\left(1+a^2-t^2\right).$$

PARTIE II **Méthode des moyennes arithmético-harmoniques**

II.1. a) Montrer que les relations :

$u_0 = a,\ v_0 = a+\dfrac{1}{a}$ et, pour tout entier n, $\dfrac{2}{u_{n+1}}=\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$,

définissent deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels strictement positifs.

b) Prouver que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de monotonies contraires.

c) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0 < v_{n+1}-u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4a}\left(v_n-u_n\right)^2$.

d) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont la même limite.

e) Calculer $u_{n+1}v_{n+1}$ et en déduire la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.2. On pose, pour tout entier n : $d_n = v_n - \sqrt{a^2+1}$.

a) Prouver que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad d_{n+1}=\dfrac{d_n^2}{2v_n}$.

b) A l'aide d'une relation analogue pour $\delta_n = v_n+\sqrt{a^2+1}$, déterminer un équivalent de d_n, quand n tend vers $+\infty$ (on l'exprimera en fonction de $\rho = \dfrac{\sqrt{a^2+1}-a}{\sqrt{a^2+1}+a}$).

En déduire que les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sqrt{a^2+1}-u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

c) Prouver que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<\sqrt{a^2+1}-u_n<d_n$.

II.3. Etudier la limite quand n tend vers $+\infty$ du rapport $\frac{d_n}{e_n}$, à l'aide de I.A.4.b).

II.4. a) Vérifier que : $e_0 < d_0 \ (= r\sqrt{a^2+1})$ et $e_1 = d_1$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{d_{n+1}}{d_n} \leqslant \frac{r}{2}$, et pour tout n $\geqslant 2$, $d_n < e_n$.

PARTIE III **Méthode des fractions continues**

III.A. Etude d'une famille de polynômes

On note $(C(\mathbb{R}),+,\times)$ l'anneau des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On pose :

$$E = \{f \in C(\mathbb{R})\ ;\ (\exists (A,B) \in (\mathbb{Z}[X])^2)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x) = A(x) + (\sqrt{x^2+1})B(x)\}.$$

III.A.1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, si $\sqrt{n}$ appartient à $\mathbb{Q}$, alors $\sqrt{n}$ appartient à $\mathbb{N}$.

En déduire que $\sqrt{a^2+1}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que, quels que soient les éléments A et B de $\mathbb{Z}[X]$, on a :

$$[\forall x \in \mathbb{R}\ \ A(x) + (\sqrt{x^2+1})B(x) = 0] \Rightarrow [\forall x \in \mathbb{R}\ \ A(x) = B(x) = 0].$$

On définit, pour tout entier n, et pour tout réel x :

$$\varphi_n(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^n.$$

III.A.2. a) Montrer que les fonctions φ_n appartiennent à E et qu'il existe, de façon unique, deux suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ \ \varphi_n(x) = P_n(x) + (\sqrt{x^2+1})Q_n(x).$$

On exprimera P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

b) Montrer que, pour tout entier n et pour tout réel x, on a :

$$P_{n+2}(x) = 2x\,P_{n+1}(x) + P_n(x)\ ;$$
$$Q_{n+2}(x) = 2x\,Q_{n+1}(x) + Q_n(x).$$

c) En déduire que P_n et Q_n sont à coefficients entiers naturels ; calculer, pour chacun d'eux, le degré, ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

d) Distinguer les cas « n pair » et « n impair » pour montrer que les polynômes P_n et Q_n sont pairs ou impairs, et déterminer leurs racines.

III.A.3. a) Montrer que, pour tout réel x et pour tout entier naturel n, on a les relations :

① $\quad \mathrm{P}_n(x)-(\sqrt{x^2+1})\mathrm{Q}_n(x) = \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^n$;

② $\quad \mathrm{P}'_n(x) = n\,\mathrm{Q}_n(x)$;

③ $\quad \left(x^2+1\right)\mathrm{Q}'_n(x)+x\,\mathrm{Q}_n(x) = n\,\mathrm{P}_n(x)$.

b) En déduire que P_n est solution de l'équation différentielle :

$$\left(x^2+1\right)y''+xy'-n^2y=0.$$

III.B. <u>Suites associées</u>

III.B.1. a) Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de rationnels telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad c_n=\frac{\mathrm{P}_n(a)}{\mathrm{Q}_n(a)}.$$

b) Prouver que la fraction précédente est irréductible, pour tout $n>0$.

c) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.

III.B.2. a) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\sqrt{a^2+1}$.

b) Montrer que, si on pose $\varepsilon_n=\left|c_n-\sqrt{a^2+1}\right|$, on a ($\rho$ étant défini en II.2.b)) :

$$\varepsilon_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{a^2+1}\;\rho^n$$

c) Etudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{\varepsilon_n}{e_n}$. ($e_n$ a été défini en I.A.2.)

d) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \varepsilon_{n+1}=\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{a+c_n}\varepsilon_n$.

En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\leqslant\frac{r}{2}$ et $\varepsilon_{n+1}\leqslant e_n$

III.B.3. a) Exprimer P_{2k} et Q_{2k} en fonction de P_k et Q_k ; en déduire que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^* \quad c_{2k}=\frac{1}{2}\left(c_k+\frac{a^2+1}{c_k}\right).$$

b) Conclure que : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad c_{2^n}=v_n$.

Quel résultat de la partie II retrouve-t-on ?

III.B.4. On pose, pour tout entier n : $w_n=c_{3^n}$.

a) En s'inspirant de III.B.3.a), déterminer une relation entre w_{n+1} et w_n.

b) Donner une majoration de $\left|w_n-\sqrt{a^2+1}\right|$.

c) Application numérique : déterminer un entier n tel que w_n soit une valeur approchée à 10^{-7} près de $\sqrt{10}$.
