CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

SESSION 1996

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Deuxième composition

(Coefficient : 2,5 - Durée : 5 h)

- *Définitions, notations.*

p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
E est un espace vectoriel de dimension p sur le corps K.
On note $\mathcal{L}_K(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
I_E est l'endomorphisme identique de E.

Si f est un endomorphisme de E, on pose $f^0 = I_E$, et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $f^n = f o f^{n-1}$.

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on dira qu'un endomorphisme f de E vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$ si:

$$\begin{cases} \forall k \in \{1,2,\dots,n-1\}, f^k \neq I_E \\ f^n = I_E \end{cases}$$

Un endomorphisme f de E est dit *cyclique* s'il existe un entier naturel strictement positif n et une famille $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_n)$ de vecteurs de E tels que:

$$\begin{cases} (1) \ (\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_n) \text{ est une famille génératrice de E.} \\ (2) \ f(\vec{t}_1) = \vec{t}_2, f(\vec{t}_2) = \vec{t}_3, \ \dots \ , f(\vec{t}_{n-1}) = \vec{t}_n, f(\vec{t}_n) = \vec{t}_1. \\ (3) \ \vec{t}_k \text{ est distinct de } \vec{t}_1 \text{ pour tout } k \in \{2,3,\dots,n\} \end{cases}$$

Une famille $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_n)$ de vecteurs de E satisfaisant aux propriétés (1), (2), et (3) est appelé cycle pour f.

On se propose d'étudier les endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel réel E de dimension finie p.

I - Un exemple

E est ici l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels. $\mathcal{B}_0$ en est la base canonique ((1,0);(0,1)) et f est l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}_0$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -11 & -37 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

On pose $\vec{t}_1 = (7,-2)$, $\vec{t}_2 = f(\vec{t}_1)$ *et* $\vec{t}_3 = f(\vec{t}_2)$.

Déterminer $\vec{t}_2$ et $\vec{t}_3$; montrer que f est un endomorphisme cyclique de E et que $(\vec{t}_1,\vec{t}_2,\vec{t}_3)$ est un cycle pour f.

Montrer que f vérifie la propriété $\mathcal{P}_3$.

II - Etude du cas particulier p=2.

E est ici un espace vectoriel réel quelconque de dimension 2. Soient f un endomorphisme cyclique de E et $(\vec{t}_1,\vec{t}_2,...,\vec{t}_n)$ un cycle pour f.

1°) Montrer que n est supérieur ou égal à 2,que f est bijectif et que $\vec{t}_1,\vec{t}_2,...,\vec{t}_n$ sont 2 à 2 distincts.

2°) Montrer que $\vec{t}_1$ et $\vec{t}_2$ sont linéairement indépendants.

Montrer que f et I_E sont linéairement indépendants dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

3°) Montrer que f vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$.

En déduire que 2 cycles pour f ont le même cardinal. On dira désormais que f est cyclique d'ordre n.

4°) *a* - Montrer que la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{t}_1,\vec{t}_2)$ de E s'écrit sous la forme:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont 2 nombres réels.}$$

b - Montrer que $f^2 = aI_E + bf$.

c - Montrer que pour tout entier naturel k, il existe un couple unique (x_k, y_k) de réels tel que $f^k = x_k \mathrm{I_E} + y_k f$ et exprimer x_{k+1} et y_{k+1} en fonction de x_k, y_k, a et b.

d - Que valent x_n et y_n ?

e - Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$?

5°) On considère la fonction polynôme $P : z \mapsto z^2 - bz - a$ ou a et b sont les 2 réels de la question 4.

a - On suppose ici que P admet 2 zéros réels distincts α et β.
Exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de a et b.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$x_k = \frac{\beta\alpha^k - \alpha\beta^k}{\beta - \alpha} \quad \text{et} \quad y_k = \frac{\beta^k - \alpha^k}{\beta - \alpha}$$

Montrer $\alpha^n = \beta^n = 1$, puis que $a = 1$, $b = 0$ et $n = 2$.

b - Montrer que P ne peut pas admettre de zéro double.

c - On suppose maintenant que P n'a pas de zéro réel.

c1 - Montrer qu'il existe $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]0, \pi[$ tels que:
$a = -\rho^2$ et $b = 2\rho \cos\theta$.

c2 - Montrer que :

$$x_k = -\rho^k \, \frac{\sin\,(k-1)\theta}{\sin\,\theta} \quad \text{et} \quad y_k = \rho^{k-1} \, \frac{\sin\,k\theta}{\sin\,\theta}$$

c3 - Montrer qu'il existe $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tel que $\theta = \frac{r\pi}{n}$.
Montrer que r est pair ($r = 2s$) et que $\rho = 1$.
Comment s'écrivent alors a et b ?

c4 - On pose $\vec{e}_1 = \sin\theta . \vec{\imath}_2$ et $\vec{e}_2 = -\vec{\imath}_1 + \cos\theta . \vec{\imath}_2$ $\left(\theta = \frac{2s\pi}{n}\right)$.
Montrer que $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E.
Déterminer la matrice B de f relativement à $\mathcal{B}_1$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer B^k.
En déduire que s et n sont premiers entre eux.

6°) Donner un exemple d'endomorphisme cyclique d'ordre 12.

III - Complexifié d'un espace vectoriel réel.

E est un espace vectoriel réel de dimension p $(p \geq 2)$. $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_p)$ est une base de E.

Nous admettrons qu'il existe un unique espace vectoriel c(E) sur $\mathbb{C}$ tel que tout élément $\vec{u}$ de c(E) s'écrive de manière unique sous la forme $\vec{u}=\vec{x}+i\vec{y}$ ou $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont 2 éléments de E. c(E) est le complexifié de E.

1°) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de c(E).

2°) Soit f un endomorphisme de E. Pour tout $\vec{u}$ de c(E) tel que $\vec{u}=\vec{x}+i\vec{y}$ $((\vec{x},\vec{y}) \in E^2)$, on pose: $\tilde{f}(\vec{u})=f(\vec{x})+if(\vec{y})$.

Montrer que $\tilde{f}$ est un endomorphisme de c(E). On dira que $\tilde{f}$ est l'endomorphisme de c(E) associé à f.

Comparer les matrices de f et de $\tilde{f}$ relativement à $\mathcal{B}$.

3°) Soit λ une valeur propre de $\tilde{f}$.

a - Montrer que si λ est réelle, λ est une valeur propre de f.

b - Montrer que si λ n'est pas réelle, $\overline{\lambda}$ (nombre complexe conjugué de λ) est aussi valeur propre de $\tilde{f}$.

On note F_λ le sous espace propre de c(E) associé à la valeur propre λ. Montrer que F_λ et $F_{\overline{\lambda}}$ ont même dimension.

c - Soit $\vec{u}=\vec{x}+i\vec{y}$ $((\vec{x},\vec{y}) \in E^2)$ un vecteur propre associé à la valeur propre non réelle $\lambda=\alpha+i\beta$ $((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)$. On pose $\vec{v}=\vec{x}-i\vec{y}$.

Montrer que $\{\vec{u},\vec{v}\}$ et $\{\vec{x},\vec{y}\}$ engendrent le même sous espace vectoriel de c(E).

On note H le sous espace vectoriel de E engendré par $\{\vec{x},\vec{y}\}$. Montrer que H est stable par f. Montrer que $(\vec{x},\vec{y})$ est une base de H.

Soit h la restriction de f à H. Déterminer la matrice de h dans la base $(\vec{x},\vec{y})$ de H.

IV - Cas général.

E est un espace vectoriel réel de dimension $p \geq 2$.
f est un endomorphisme cyclique de E.
$(\vec{t}_1,\vec{t}_2,...,\vec{t}_n)$ est un cycle pour f.

6°) On suppose que p est pair (p=2q).

Montrer que si 1 est valeur propre de $\tilde{f}$, -1 est aussi valeur propre et n est pair.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ s'écrive sous l'une des deux formes suivantes:

a -

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & . & . \\ . & . & & & . & & . & . \\ . & . & & & & . & 0 & 0 \\ . & . & & & & & \cos\theta_{q-1} & \sin\theta_{q-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & -\sin\theta_{q-1} & \cos\theta_{q-1} \end{pmatrix}$$

avec pour tout $j \in \{1,2,...,q-1\}$, $\theta_j = \dfrac{2k_j\pi}{n}$, $k_j \in \{1,2,...,n-1\}$.

b -

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & . & . & . & . \\ . & . & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & & & . & . \\ . & . & & & . & & . & . \\ . & . & & & & . & 0 & 0 \\ . & . & . & & & & \cos\theta_q & \sin\theta_q \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -\sin\theta_q & \cos\theta_q \end{pmatrix}$$

avec pour tout $j \in \{1,2,...,q\}$, $\theta_j = \dfrac{2k_j\pi}{n}$, $k_j \in \{1,2,...,n-1\}$.

1°) Montrer que $n \geq p$

Montrer que $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, ..., \vec{t}_p)$ est une base de E.

2°) Montrer que f vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$.

3°) c(E) est le complexifié de E et $\tilde{f}$ est l'endomorphisme de c(E) associé à f.

a - Montrer que $\tilde{f}$ est cyclique et que $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, ..., \vec{t}_n)$ est un cycle pour $\tilde{f}$.

b - Montrer que $\tilde{f}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$.

c - Montrer que $\tilde{f}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines n-ièmes de 1.

4°) Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p)$ une base de c(E) formée de vecteurs propres de $\tilde{f}$ associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$.

Soient $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ les coordonnées de $\vec{t}_1$ dans cette base. quelles sont les coordonnées de $\vec{t}_2$, de $\vec{t}_3$,... de $\vec{t}_p$ dans cette même base?

En étudiant le rang de la famille $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, ..., \vec{t}_p)$, montrer que chaque sous espace propre est de dimension 1.

5°) On suppose dans cette question que p est impair (p=2q+1).

Montrer que $\tilde{f}$ n'admet qu'une seule valeur propre réelle $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ s'écrive sous la forme:

$$\begin{pmatrix}
\lambda & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\
0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & . & . & . & 0 & 0 \\
0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & . & & & . & . \\
. & . & . & & . & & . & . \\
. & . & . & & & . & 0 & 0 \\
. & . & . & & & & \cos\theta_q & \sin\theta_q \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & -\sin\theta_q & \cos\theta_q
\end{pmatrix}$$

avec pour tout $j \in \{1, 2, ..., q\}$, $\theta_j = \dfrac{2k_j\pi}{n}$, $k_j \in \{1, 2, ..., n-1\}$.