SESSION 1997

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Première composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

I.1. Espace vectoriel.

On considère l' ensemble E des fonctions réelles f continues sur $]0,+\infty[$, telle que, $\int_0^{+\infty} \phi(t).f^2(t)dt$ existe, où ϕ est la fonction définie sur $]0,+\infty[$, par $\phi(t) = e^{-t}.t^{x-1}$ et x est un réel strictement positif fixé.

I.1.1. Montrer que la fonction réelle f, définie sur $]0,+\infty[$, par $f(x) = 1$, appartient à E.
I.1.2. Montrer que E est un espace vectoriel réel.

On pose, pour tout f_1, f_2 dans E : $(f_1, f_2) = \int_0^{+\infty} \phi(t).f_1(t).f_2(t)dt$.

I.1.3. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
I.1.4. Montrer que : $|(f_1, f_2)|^2 \leq (f_1, f_1)(f_2, f_2)$.

Soit f une fonction réelle définie sur $]0,+\infty[$, strictement positive, deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

I.1.5. Montrer que $\ln \circ f$ est une fonction convexe si et seulement si $\forall\ x > 0,\ f(x).f''(x) - f'^2(x) \geq 0$.

I.2.Propriété d'une Equation fonctionnelle.

On considère l'équation fonctionnelle : $f(x+1) - f(x) = a(x)$, où a est une fonction fixée définie sur $]0,+\infty[$, croissante sur $]0,+\infty[$, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x) = 0$.
Soient f et g deux fonctions décroissantes sur $]0,+\infty[$, vérifiant cette équation fonctionnelle.
On pose $h = f - g$.

I.2.1. Montrer que h est périodique.
I.2.2. Montrer que : pour tout $x \geq 1$, il existe un entier $n > 0$, tel que $|h(x) - h(n+1)| \leq -a(n)$ et que pour tout entier naturel p, $|h(x) - h(n+1)| \leq -a(n+p)$.
I.2.3. Montrer que h est constante sur $]0,+\infty[$.

Partie II : Résolution du problème fonctionnel P_1.

Soit le problème fonctionnel

$$P_1\begin{cases}\text{il existe une fonction numérique f, définie sur }]0,+\infty[\text{, vérifiant :}\\ \forall x>0,\ f(x+1)\ -\ f(x)\ =-\ln(x)\\ \text{f est concave}\\ f(1)=0\end{cases}$$

Sur $]0,+\infty[$, on définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ par :

$$u_1(x)=\ln(x) \text{ et } \forall n\geq 2,\ u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x-1}{n}\right)+(x-1)\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

II.1. Calcul et Propriétés de U.

II.1.1 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$; on notera U sa somme.

II.1.2. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n'' , $n\geq 1$ est uniformément convergente sur tout compact de $]0,+\infty[$

II.1.3. Montrer que la série de terme général u_n', $n\geq 1$, est convergente pour au moins un réel x, $x>0$.

II.1.4. Montrer que la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'$ est C^1 sur $]0,+\infty[$.

II.1.5. Montrer que U est C^2 sur $]0,+\infty[$.

II.1.6. Etablir que : $\forall\ x>0,\ U(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\dfrac{x\cdot(x+1)\cdots(x+n-1)}{n!n^{x-1}}$.

II.2. Résolution de P_1.

II.2.1. Montrer que U est une solution du problème fonctionnel P_1.

II.2.2. En déduire les solutions monotones de : $f(x+1)-f(x)=\dfrac{-1}{x}$, $x>0$

II.2.3. Montrer que U est la seule solution dérivable sur $]0,+\infty[$ du problème P_1.

Partie III: Résolution du Problème Fonctionnel P_2.

Soit le problème fonctionnel

$$P_2\begin{cases}\text{il existe une fonction numérique f, } f>0,\text{ définie sur }]0,+\infty[\text{, vérifiant :}\\ \forall x>0, f(x+1)=x\cdot f(x)\\ \ln\circ f \text{ est convexe}\\ f(1)=1\end{cases}$$

III.1. Propriétés de F.

On pose, pour tout x > 0, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1}dt$ et pour tout entier naturel n, strictement positif.

$F_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t}.t^{x-1}dt$

III.1.1. Montrer que, pour tout $n > 0$, F_n est continue sur $]0,+\infty[$

III.1.2. Montrer que la suite de fonctions $(F_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout compact de $]0,+\infty[$.

III.1.3. En déduire que F est continue sur $]0,+\infty[$.

On pose $\Phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\delta}{\delta x}(e^{-t} \cdot t^{x-1})dt$ où $\frac{\delta}{\delta x}$ désigne la fonction dérivée par rapport à x.

III.1.4. Montrer que Φ est définie sur $]0,+\infty[$.

III.1.5. Montrer que, pour tout $n > 0$, F_n est dérivable sur $]0,+\infty[$.

III.1.6. Montrer que, sur tout compact de $]0,+\infty[$, la suite des fonctions dérivées $(F')_{n\geq 1}$ converge uniformément vers Φ.

III.1.7. En déduire que F est C^1 sur $]0,+\infty[$. On admettra que F est également C^2, et que F″ s'obtient par dérivation sous le signe intégral.

III.2. Résolution du Problème P_2.

III.2.1. Montrer que, pour tout x > 0, F(x+1) = x.F(x) et F(1) = 1.

III.2.2. Montrer que $\ln \circ F$ est convexe. (on pourra utiliser I.1.4 et I.1.5).

III.3. Etude de F.

III.3.1. Etudier le sens de variation de F'.

III.3.2. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]1,2[$, vérifiant $F'(\alpha) = 0$

III.3.3. En déduire le sens de variation de F.

III.3.4. Montrer que $F(x) \sim \frac{1}{x}$, lorsque x tend vers 0.

III.3.5. En déduire la limite de F lorsque x tend vers 0.

III.3.6. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

III.3.7. Donner l'allure de la courbe représentative de F, dans un plan muni d'un repère orthogonal.

Partie IV : Equivalence.

IV.1. Montrer l'équivalence des problèmes fonctionnels P_1 et P_2.

IV.2. Montrer que $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{x-1}.n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$

Partie V : Une autre intégrale pour F.

Le but de cette partie est de démontrer que : pour tout $x > 0$, $F(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n .t^{x-1}dt$ (R)

V. 1. Convergence d'une suite.

On pose, pour tout entier naturel n, $n > 0$, et tout $t \in [0, n]$, $v_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n - e^{-t}$.

V.1.1. Etudier les variations des fonctions v_n, $n \geq 1$. Dans le cas $n > 1$, on sera amené à étudier sur $[0, n[$ la fonction auxiliaire $h_n(t) = \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)+\frac{t}{n-1}$.

V.1.2. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, et tout t de $[0, n]$: $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

V.1.3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un réel $\alpha_n \in [1,n]$ tel que $\sup_{t\in[0\,;\,n]} |v_n(t)| = \frac{\alpha_n . e^{-\alpha_n}}{n}$.

V.1.4. En déduire que, pour tout réel $A > 0$, la suite de fonctions $(v_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $[0, A]$.

V.2. Convergence de la suite d'intégrales.

On se donne, dans les trois questions suivantes, un réel arbitraire $\varepsilon > 0$ et x est un réel strictement positif fixé.

V.2.1. Montrer qu'il existe alors un réel $A > 0$ vérifiant : $\int_A^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}dt < \varepsilon$.

Soit n_0 un entier naturel strictement supérieur à A.

V.2.2. Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq \int_A^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n .t^{x-1}dt \leq \varepsilon$.

V.2.3. Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, $\left|\int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}dt - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n .t^{x-1}dt\right| \leq 2.\varepsilon + \frac{K}{n}.\int_0^A t^{x-1}dt$ où K est un réel à préciser.

V.2.4. En déduire la relation (R).

V.3. Calcul de l'intégrale de la relation (R).

V.3.1. Montrer que : $\forall x > 0$, $F(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x.\int_0^1 (1-t)^n.t^{x-1}dt$

V.3.2. Calculer $\int_0^1 (1-t)^n.t^{x-1}dt$ en fonction de n et de x.

V.3.3. En déduire une nouvelle expression de F.

Partie VI : Applications.

VI.1.Densité de probabilité.

Soit n un entier naturel strictement positif et S_n une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$S_n(t) = \begin{cases} A(n).\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{t}{2}} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$$ où A est fonction de n.

VI.1.1 Montrer que, S_n est une densité de probabilité si et seulement si $A(n) = \dfrac{1}{2.F\left(\frac{n}{2}\right)}$.

Soit X une variable aléatoire continue de densité S_n.(n fixé, n > 0)

VI.1.2. Calculer son espérance et sa variance.

Soit U une variable aléatoire normale centrée réduite.

VI.1.3. Déteminer la loi de la variable aléatoire U^2 en exprimant sa densité en fonction de S_n, où n est un entier à préciser.

VI.I.4. Montrer que : $F(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

n est un entier naturel strictement positif.

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes,définies sur le même espace, de même loi normale centrée réduite.

Posons : $Z = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

VI.1.5. Calculer l'espérance et la variance de Z.