SESSION 1997

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

# DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

## Deuxième composition

*(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)*

***L'usage de la calculatrice est autorisé.***

### Introduction.

La première partie du problème a pour objet d'étudier l'opérateur $\Delta$. défini sur l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, par $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$.

La seconde partie est une application à la détermination d'un polynôme connaissant ses valeurs en n+1 points.

Dans la troisième partie, on étudie la suite des polynômes $B_n$ vérifiant, pour tout entier n strictement positif, la relation $\Delta B_n = nX^{n-1}$. Les résultats obtenus conduiront au calcul de la somme de quelques séries.

La dernière partie met en oeuvre une transformation sur les séries entières, qui permet notamment d'accélérer la convergence.

### Notation :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $E_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n .

On rappelle que le degré du polynôme nul est $-\infty$ .

$$E_n = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \; ; \; d^\circ(P) \leq n \right\}$$

$\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $E_n$ : $\mathcal{B} = \left(e_k\right)_{0 \leq k \leq n}$ où $e_k = X^k$.

Pour tout polynôme P appartenant à $E_n$, on note $\Delta P$ le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; : \; \Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$$

# I

I-1) Soit $(e'_k)_{0 \leq k \leq n}$ la famille de polynômes définie par

$$\begin{cases} e'_0 = 1 \\ e'_k = X(X-1)\dots(X-k+1) \qquad \text{pour } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Montrer que cette famille est une base de $E_n$.

On note $B'$ cette base .

I-2) Soit $P(x) = -7x^4 + 3x^2 - x + 2$ . Déterminer $\Delta P(x)$.

I-3) Montrer que $\Delta : P \mapsto \Delta P$ est une application linéaire.

I-4) Soit P un polynôme de degré $k > 0$, montrer que $\Delta P$ est de degré $k - 1$.

I-5)

a) Montrer que, pour qu'un polynôme P appartienne à $\operatorname{Ker} \Delta$, il faut et il suffit que P soit constant.

b) Soit R le polynôme défini par $R(x) = 14x^3 + 21x^2 + 11x + 5/2$. Déterminer un polynôme Q tel que $\Delta Q = R$ et $Q(0) = -7$.

c) Montrer que Q est l'unique polynôme ayant ces propriétés.

I-6) Déterminer $\operatorname{Im} \Delta$ .

I-7) Exprimer le polynôme $\Delta e'_k$ dans la base $B'$, pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$ .
En déduire la matrice $M_\Delta$ de $\Delta$ dans la base $B'$.

I-8) Application. On suppose que $n = 4$

Exprimer le polynôme $X^3$ dans la base $B'$.
Déterminer, par leurs coordonnées dans la base $B'$, les polynômes Q tels que $\Delta Q = X^3$.

II

**Détermination d' un polynôme P de degré inférieur ou égal à n, connaissant ses valeurs en 0 , 1 , 2 , . . . et n.**

On définit, par récurrence sur l'entier $k \geq 0$ , l'opérateur $\Delta^k$ en posant

$\Delta^0 = Id_{E_n}$ et pour tout $k \geq 1$ ; $\Delta^{k+1} = \Delta^k \circ \Delta$

Soit $( A_0, A_1, \ldots, A_n )$ les coordonnées de P dans la base $B'$.

II-1) Exprimer $\Delta^k e'_j$ dans la base $B'$. On distinguera les deux cas suivants :
$0 \leq k \leq j$ et $k > j$.

II-2) Montrer que $(\Delta^k P)(0) = k!\, A_k$ pour tout k vérifiant $0 \leq k \leq n$.

II-3) Application : On cherche un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4 tel que :

$$P(0) = 7 \quad P(1) = 87 \quad P(2) = -143 \quad P(3) = -2453 \quad P(4) = -9897$$

3-1) Montrer que si un tel polynôme P existe, il est unique.

3-2) Calculer $\Delta^i P(0)$ pour $0 \leq i \leq 4$. On pourra utiliser la table suivante, dite des différences finies :

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta^0 P(x)$ | | | | | |
| $\Delta P(x)$ | | | | | |
| $\Delta^2 P(x)$ | | | | | |
| $\Delta^3 P(x)$ | | | | | |
| $\Delta^4 P(x)$ | | | | | |

3-3) Déterminer le polynôme P par ses coordonnées dans la base $B'$.

3-4) Généralisation : écrire un algorithme de calcul des coordonnées du polynôme Q de degré inférieur où égal à n dans la base $B'$, connaissant Q(i) pour i variant de 0 à n.

## III

## Polynômes de Bernoulli

III-1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n$ unique tel que :

$$\begin{cases} \Delta B_n = n X^{n-1} \\ \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$.
Déterminer $B_1$ et $B_2$.

III-2) On pose $B_0 = 1$.
Pour $n \geq 1$, on pose $K_n = B'_n - n B_{n-1}$ où $B'_n$ désigne le polynôme dérivé de $B_n$.
Montrer que $K_n$ est constant; en déduire que $B'_n = n B_{n-1}$.

Calculer les polynômes $B_3$ et $B_4$.

III-3) Montrer que pour tous entiers $m \geq 1$ et $p \geq 1$, $\sum_{i=0}^{m-1} i^{p-1} = \frac{1}{p}(B_p(m) - B_p(0))$.

En déduire en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

III-4) Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, on a :

$$\int_0^1 B_m(x)\, e^{-2\pi inx}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -\dfrac{m!}{(2\pi in)^m} & \text{si } n \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

III-5) Pour $m \geq 2$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $Q_m$ $2\pi$- périodique telle que, pour tout x de $[\,0\,,\,2\pi[$,

$$Q_m(x) = B_m\left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

5-1) Montrer que, pour $m > 2$, $Q_m$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Etudier la dérivabilité de $Q_2$.

5-2) Montrer que $\int_0^{2\pi} Q_m(x)\, e^{-inx}\, dx = 2\pi \int_0^1 B_m(x)\, e^{-2\pi inx}\, dx$ .

5-3) En déduire que pour tout x de [0 , 1] ,

$$B_m(x) = -\frac{m!}{(2\pi i)^m} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{e^{2\pi inx}}{n^m} + \frac{e^{-2\pi inx}}{(-n)^m} \right).$$

III-6) Application: calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

## IV

## Transformation d'EULER- ABEL

On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R = 1.

Pour tout x de ]-1 , 1[ , on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose : $\delta^0 a_n = a_n$ , $\delta a_n = a_{n+1} - a_n$ ,
et pour tout entier $p \geq 0$ , $\delta^{p+1} a_n = \delta\delta^p a_n$

IV-1)

1-1) Justifier que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta a_n x^n$ est convergente sur l'intervalle ]-1 ; 1 [

1-2) Montrer que pour tout $x \in$ ]-1 ; 1 [, $f(x) = \dfrac{a_0}{1-x} + \dfrac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta a_n x^n$ .

Cette transformation de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ s'appelle transformation d'Euler-Abel.

1-3) Montrer que pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $x \in$ ]-1 ; 1 [ on a :

$$f(x) = \left( \sum_{k=0}^{p-1} \delta^k a_0 \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \right) + \left( \frac{x}{1-x} \right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^p a_n x^n .$$

IV-2) Applications.

2-1) Somme d'une série.

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} (2n^3 - 3n + 5)\ x^n$$

et pour $|x| < R$, calculer la somme de cette série.

2-2) Accélération de la convergence d'une série.

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2n+3}{n+1}\ x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série.

b) On note g(x) la somme de cette série lorsqu'elle existe.

Pour $|x| < R$, on pose $g(x) = \left( \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+3}{n+1}\ x^n \right) + R_N \quad (N > 0)$.

c) Montrer que pour $-1 < x < 0$, $|R_N|$ est majoré par $\dfrac{2N+3}{N+1}\ |x|^N$.

d) En appliquant deux fois la transformation d'Euler-Abel à la série définissant g(x), calculer g(-1/3) à $10^{-4}$ près.

e) Combien de termes de la série avez-vous calculés ?

f) Combien en auriez-vous calculés pour avoir la même précision, sans cette transformation?