

SESSION 1999

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Deuxième composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

PARTIE 0 : Préliminaires et notations.

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
 - $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
 - $\forall (n ; p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $M_{n,p}$ est le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{C}$, à n lignes et p colonnes.
 - $\forall (n ; p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\forall A \in M_{n,p}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, on désigne par :
 ${}^t A = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ où $b_{i,j} = a_{j,i}$, la matrice transposée de A ,
 $\overline{A} = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où $c_{i,j} = \overline{a_{i,j}}$ la matrice conjuguée de A ,
 $A^* = {}^t \overline{A}$ la matrice adjointe de A .
- On note $\text{Ker}(A) = \{U \in M_{p,1} / A \cdot U = 0\}$, le noyau de A
et $\text{Im}(A) = \{V \in M_{n,1} / \exists U \in M_{p,1} \text{ tel que } V = A \cdot U\}$, l'image de A .
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, M_n est le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n , à coefficients dans $\mathbb{C}$ et I_n désigne la matrice unité de M_n .
On identifiera M_1 avec $\mathbb{C}$: ainsi pour tout z complexe, $(z) = z$.

- Une matrice A de M_n est une matrice unitaire si et seulement si $A.A^* = A^*.A = I_n$.
- Une matrice A de M_n est une matrice hermitienne si et seulement si $A = A^*$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (U; V) \in (M_{n,1})^2$, on pose $(U/V)_n = U^*.V$ (1).

0.1. Vérifier que (1) définit un produit scalaire hermitien.

• $\forall U \in M_{n,1}$, on notera $\|U\|_n = [(U/U)_n]^{1/2}$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $(\cdot/\cdot)_n$. L'orthogonalité par rapport à ce produit scalaire sera notée $\perp_n$:

$$(U; V) \in (M_{n,1})^2, U \perp_n V \Leftrightarrow (U/V)_n = 0.$$

0.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{C}^n, \forall (y_1; \dots; y_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^2 \right)$$

0.3. Soit $(V; W) \in (M_{n,1})^2$. Montrer que :

- si $\forall U \in M_{n,1}, (U/V)_n = (U/W)_n$ alors $V = W$.
- si $\forall U \in M_{n,1}, (V/U)_n = (W/U)_n$ alors $V = W$.

0.4. Montrer que : $\forall A \in M_{n,p}, \forall U \in M_{p,1}, \forall V \in M_{n,1}, (A.U/V)_n = (U/A^*.V)_p$.

0.5. Soit $A \in M_{n,p}$. Montrer que :

$$M_{p,1} = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A^*) \text{ et } \text{Ker}(A) \perp_p \text{Im}(A^*)$$

$$M_{n,1} = \text{Ker}(A^*) \oplus \text{Im}(A) \text{ et } \text{Ker}(A^*) \perp_n \text{Im}(A)$$

0.6. Soit $A \in M_n$. On appelle trace de A la somme des éléments de la diagonale principale de A que l'on notera $\text{tr}(A)$. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ alors $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

0.6.1. Montrer que $\forall (A; B) \in (M_n)^2, \text{tr}(A.B) = \text{tr}(B.A)$ et en déduire que deux matrices semblables ont même trace.

0.6.2. Quelle relation existe-t-il entre la trace de A et ses valeurs propres ?

PARTIE I : Nombres singuliers d'une matrice

1.1. Dans cette question, $A \in M_{n,p}$.

1.1.1. Montrer que $A^*.A$ et $A.A^*$ sont des matrices diagonalisables.

1.1.2. Soient p un nombre complexe **non nul**, $A \in M_{n,p}$ et $B \in M_{p,n}$. Démontrer :
 p est valeur propre de $A.B$ si et seulement si p est valeur propre de $B.A$.

1.1.3. Montrer que toute valeur propre de $A^* \cdot A$ et de $A \cdot A^*$ est un nombre réel positif ou nul.

1.1.4. Montrer qu'il existe deux matrices B et C hermitiennes telles que: $A^* \cdot A = B^2$ et $A \cdot A^* = C^2$.

Définition : Si ρ est une valeur propre commune à $A^* \cdot A$ et $A \cdot A^*$ alors $\sqrt{\rho}$ est appelé nombre singulier de A .

1.2. Etude d'un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les nombres singuliers de A et déterminer une base orthonormale de $M_{2,1}$ formée de vecteurs propres de $A^* \cdot A$ et une base orthonormale de $M_{3,1}$ formée de vecteurs propres de $A \cdot A^*$.

1.3. Soit A une matrice inversible de M_n . Montrer que si μ est un nombre singulier de A alors $\frac{1}{\mu}$ est un nombre singulier de A^{-1} .

1.4. Soit $A \in M_n$.

1.4.1. Montrer que $A^* \cdot A$ et $A \cdot A^*$ ont les mêmes valeurs propres.

1.4.2. Soient $\lambda_1 ; \dots ; \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 ; \dots ; \mu_n$ les nombres singuliers de A . Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \text{ et } \prod_{k=1}^n |\lambda_k| = \prod_{k=1}^n \mu_k.$$

1.5. Soient $A \in M_{n,p}$ et $\mu_1 ; \dots ; \mu_q$ les nombres singuliers **non nuls** de A . Montrer qu'il existe une base orthonormale $(X_1 ; \dots ; X_p)$ de $M_{p,1}$ et une base orthonormale $(Y_1 ; \dots ; Y_n)$ de $M_{n,1}$ telles que :

$$\forall k \in [1 ; q], A \cdot X_k = \mu_k Y_k \text{ et } A^* \cdot Y_k = \mu_k X_k,$$

$$\forall j \in [q+1 ; p], A \cdot X_j = 0 \text{ et } \forall i \in [q+1 ; n], A^* \cdot Y_i = 0$$

1.6. En déduire qu'il existe deux matrices unitaires $P \in M_n$ et $Q \in M_p$ telles que :

$$P \cdot A \cdot Q = D = (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ où } \alpha_{i,j} = \mu_i \text{ si } i = j \text{ et } 1 \leq i \leq q, \alpha_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

PARTIE II

Dans cette partie, $A \in M_{n,p}$ et on considère les équations d'inconnues respectives X et U :

$$(2) \quad A.X = Y, \quad X \in M_{p,1}, \quad Y \in M_{n,1}$$

$$(3) \quad A^*.U = 0, \quad U \in M_{n,1}$$

2.1. Soit $Y_0 \in M_{n,1}$. Montrer que l'équation $A.X = Y_0$ admet des solutions si et seulement si Y_0 est orthogonal à toute solution de (3).

2.2.1. Montrer que $\forall Y \in M_{n,1}$, l'équation d'inconnue $X \in M_{p,1}$, $A^*.A.X = A^*.Y$ admet des solutions.

2.2.2. Montrer que $\forall Z \in M_{p,1}, \forall (j; k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'équation d'inconnue $X \in M_{p,1}$, $(A^*.A)^j.X = (A^*.A)^k.Z$ admet des solutions.

2.3. Pseudo-solutions.

Soit $Y \in M_{n,1}$ donné. Pour tout $X \in M_{p,1}$, on pose $\Phi_Y(X) = \|A.X - Y\|_n^2$. On appelle pseudo-solution de l'équation (2) $A.X = Y$ tout $X_0 \in M_{p,1}$ tel que $\Phi_Y(X_0)$ soit minimal.

2.3.1. Montrer que toute solution de (2) est une pseudo-solution de (2).

2.3.2. Montrer que X_0 est pseudo-solution de (2) si et seulement si $A^*.A.X_0 = A^*.Y$.

2.3.3. Montrer que l'équation (2) admet une unique pseudo-solution orthogonale à $\text{Ker}(A)$.

2.3.4. Soit φ_A l'application définie sur $M_{n,1}$ par: $\forall Y \in M_{n,1}, \varphi_A(Y) = X_0$ où X_0 est la pseudo-solution de (2) orthogonale à $\text{Ker}(A)$. Montrer que φ_A est une application linéaire de $M_{n,1}$ dans $M_{p,1}$ et que $\text{Ker}(A^*) = \text{Ker}(\varphi_A)$ et $\text{Im}(A^*) = \text{Im}(\varphi_A)$.

2.4. Application dans le plan euclidien

Soient E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère n points de E , $(P_k(x_k; y_k))_{1 \leq k \leq n}$, dont les abscisses ne sont pas toutes égales.

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et } X \in M_{2,1}$$

2.4.1. Démontrer que l'équation $A.X = Y$ possède une unique pseudo-solution notée

$$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, (a_0 ; b_0) \in \mathbb{R}^2.$$

2.4.2. Que représente la droite d'équation $y = a_0 x + b_0$?

PARTIE III : Normes matricielles

Soit $\| \cdot \|$ une norme définie sur M_n . Cette norme vérifie les propriétés (*) si et seulement si:

$$\forall (A ; B) \in (M_n)^2, \|A.B\| \leq \|A\| \|B\|$$

et

$$\forall U \in M_{n,1}, \forall A \in M_n, \|A.U\| \leq \|A\| \|U\|_n$$

Dans la suite de cette partie $A \in M_n$.

3.1. On pose $\|A\|_S = \sup \{ \|A.U\|_n \mid U \in M_{n,1} \text{ et } \|U\|_n \leq 1 \}$.

3.1.1. Montrer que $A \mapsto \|A\|_S$ définit une norme sur M_n vérifiant les propriétés (*).

3.1.2. Montrer que $\|A\|_S$ est égale au nombre singulier maximal de A . Calculer $\|I_n\|_S$.

3.2. On pose $\|A\|_E = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{j,k}|^2 \right)^{1/2}$, $A = (a_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$.

3.2.1. Montrer que $A \mapsto \|A\|_E$ définit une norme sur M_n vérifiant les propriétés (*).
Calculer $\|I_n\|_E$.

3.2.2. Soit $\mu_1 ; \dots ; \mu_n$ les nombres singuliers de A . Montrer que : $\|A\|_E^2 = \sum_{k=1}^n \mu_k^2$.
En déduire $\|A\|_S \leq \|A\|_E$.

PARTIE IV

Soit n un nombre entier naturel, supérieur ou égal à 2. On note $\| \cdot \|$ une norme sur M_n vérifiant les propriétés (*) et A est une matrice de M_n .

4.1. Montrer que $\|I_n\| \geq 1$.

4.2. Démontrer que toute valeur propre λ de A vérifie $|\lambda| \leq \|A\|$.

4.3. On suppose $\|A\| < 1$.

4.3.1. Montrer que $I_n + A$ est inversible.

4.3.2. p étant un entier naturel, calculer $(I_n + A) \cdot \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k A^k \right)$ et déduire que :

$$\left\| \sum_{k=0}^p (-1)^k A^k - (I_n + A)^{-1} \right\| \leq \frac{\|A\|^{p+1}}{1 - \|A\|}. \text{ Que peut-on en conclure ?}$$

4.4. Soient $\varepsilon_A \in M_n$ et A inversible. Montrer que :

$$\text{si } \|\varepsilon_A\| < \|A^{-1}\|^{-1} \text{ alors } A + \varepsilon_A \text{ est inversible et que : } \|(A + \varepsilon_A)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|\varepsilon_A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\varepsilon_A\|}.$$

4.5. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ deux matrices de M_n telles que :

$$\forall (i; j) \in [1; n]^2, |a_{i,j} - b_{i,j}| < 10^{-2}.$$

$$\text{Sachant que } A = \begin{pmatrix} 1,18 & -0,28 & -0,12 \\ 0,31 & 0,41 & 0,50 \\ 0,48 & 1,54 & 1,57 \end{pmatrix}, \text{ calculer } \det(A) \times A^{-1}.$$

La matrice B est-elle inversible ?