Probabilités

22 novembre 2003

On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des clients. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la partie II. Dans la partie I on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

Préliminaires

On se donne, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, un nombre réel positif v_{ij} et on note, sous réserve de convergence,

$$A_i = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij} \qquad \text{et} \qquad B_j = \sum_{i=0}^{+\infty} v_{ij} \ .$$

Question P.1 On suppose que les séries définissant les nombres A_i sont convergentes et que la série de terme général A_i est convergente. Établir, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels,

$$\sum_{j=0}^{q} \left(\sum_{i=0}^{p} v_{ij} \right) = \sum_{i=0}^{p} \left(\sum_{j=0}^{q} v_{ij} \right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} A_i \ .$$

Question P.2 Quel résultat analogue peut-on obtenir en permutant les hypothèses portant sur les nombres A_i et B_j ? Quelle conclusion en tire-t-on ?

Partie I

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \exp(a(x-1)) \ .$$

On définit alors une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad u_{k+1} = f(u_k) \ .$$

Question I.1 Convergence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

Question I.1.a Établir par récurrence, pour tout nombre entier naturel k, les inégalités :

$$0 \leq u_k \leq 1 \qquad \text{et} \qquad u_k \leq u_{k+1} \ .$$

Question I.1.b En déduire la convergence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$, dont on notera $L(a)$ la limite.

Question I.2 Limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ lorsque $a < 1$.

Question I.2.a À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad 0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k) \ .$$

Question I.2.b En déduire la limite $L(a)$ de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ lorsque $0 < a < 1$.

Question I.3 Limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ lorsque $a = 1$.

Question I.3.a Montrer que la fonction $x \mapsto \exp(x-1)$ est strictement convexe sur $\mathbf{R}$.

Question I.3.b Déterminer la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1.

Question I.3.c En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ et la valeur de la limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ lorsque $a = 1$.

Question I.4 Limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ lorsque $a > 1$.

On suppose dans cette question $a > 1$.

Question I.4.a Démontrer que l'on a

$$0 \leq 1 - \frac{\ln(a)}{a} \leq 1 \ .$$

Question I.4.b Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ sur $\mathbf{R}$ en fonction de a.

Question I.4.c En déduire les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbf{R}$ a toujours deux solutions.

On note $r(a)$ la plus petite de ces solutions.

Question I.4.d Vérifier qu'on a $0 < r(a) < 1$.

Question I.4.e Établir

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad 0 \leq u_k \leq r(a) \ .$$

Question I.4.f En déduire la limite $L(a)$ de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$, lorsque $a > 1$.

Question I.5 Approximation de $r(a)$ lorsque $a > 1$.
On suppose encore $a > 1$ et on veut évaluer $r(a)$ défini en I.4.c. Pour cela, on majore la dérivée de f sur un segment contenant $r(a)$ et on en déduit un algorithme pour calculer une valeur approchée de $r(a)$.

Question I.5.a Étudier et représenter graphiquement sur $\mathbf{R}_+$ la fonction φ définie par $x \mapsto x\exp(-x)$.

Question I.5.b Comparer les images de a et de $ar(a)$ par φ.

Question I.5.c En déduire que la restriction de φ à $[0;1]$ réalise une bijection de $[0;1]$ sur $0;1/e]$, de bijection réciproque continue et strictement croissante. On notera ψ cette bijection réciproque.

Question I.5.d.1 Démontrer

$$r(a) = \frac{1}{a}\psi(a\exp(-a))$$

Question I.5.d.2 Déterminer la limite de $r(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Question I.5.e.1 Montrer qu'il existe un réel m dans $]0,1[$ tel que

$$\forall x \in [0, \frac{1}{a}] \qquad 0 < f'(x) \leq m\ .$$

Question I.5.e.2 En déduire

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad |u_k - r(a)| \leq m^k\ .$$

Question I.5.f.1 À l'aide de I.5.e, donner un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-2} près.

Question I.5.f.2 Calculer $L(2)$ et $L(4)$ à 10^{-2} près.

Question I.6 Allure de la courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$

Question I.6.a En remarquant qu'on a

$$\forall a \in]1;+\infty[\qquad a\exp(a(r(a)-1)) = r(a)$$

et en admettant que la fonction $a \mapsto L(a)$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, montrer que L est solution de l'équation différentielle

$$(ay-1)\frac{dy}{da} = y(1-y)$$

sur $]1,+\infty[$.

Question I.6.b En déduire le signe de L' et son sens de variation sur $]1,+\infty[$.

Question I.6.c Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$, sauf peut-être au point d'abscisse 1.

Partie II

Dans cette partie, on modélise le temps par une succession d'instants 0, 1, 2, 3, ..., n, ... et on considère un guichet auquel peut se présenter au plus un client dans l'intervalle de temps compris entre deux instants successifs $[n-1; n[$, pour n entier naturel strictement positif.

On suppose qu'un premier client est au guichet à l'instant 0 et, pour tout entier naturel strictement positif n, on désigne par B_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 si un client se présente au guichet entre les instants $n-1$ et n, et 0 sinon. Le client ainsi arrivé se place au bout de la file de personnes attendant devant le guichet.

Ces variables aléatoires B_1, B_2, ..., B_n, ... sont supposées indépendantes et prennent la valeur 1 avec la probabilité p, pour un certain nombre réel p fixé tel que $0 < p < 1$. On ne s'intéressera pas à l'espace probabilisé sur lequel sont définies ces variables aléatoires.

On appelle durée de service d'un client au guichet le temps passé par l'employé du guichet à le servir, une fois l'attente du client dans la file achevée. Plus précisément, si la durée du premier client, arrivé à l'instant 0, est égale à n, le guichet est libre pour le service du client suivant à partir de l'instant n. On admettra que les durées de services de chaque client sont des variables aléatoires.

Ces variables aléatoires, indiquant les durées de service au guichet des clients successifs, sont supposées indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ. On rappelle que si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on a

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad \mathbf{P}(X = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}\ .$$

On notera D la variable aléatoire donnant la durée de service du premier client.

On convient d'appeler première vague de clients l'ensemble de ceux arrivés au guichet pendant la durée de service du client initial, puis, de façon générale, on appelle $(k+1)^{\mathrm{e}}$ vague de clients l'ensemble de ceux arrivés pendant la durée de service des clients de la k^{e} vague. On désigne alors par N_k le nombre de clients de la k^{e} vague, étant entendu qu'on pose $N_k = 0$ s'il n'y a pas de client de k^{e} vague. Par convention on pose $N_0 = 1$. On admettra que les N_k sont des variables aléatoires.

Question II.1 Loi de la variable aléatoire N_1.

Question II.1.a Étant donné un nombre entier naturel n, déterminer la loi de la variable aléatoire N_1 conditionnellement à l'évènement $D = n$ et préciser la valeur de

$$\mathbf{P}(N_1 = k \mid D = n)$$

pour k entier naturel.

Question II.1.b En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, que N_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et l'espérance.

Question II.2 Probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève.
On pose

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad p_k = \mathbf{P}(N_k = 0)\ .$$

Question II.2.a.1 Démontrer que l'évènement

La file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini

(autrement dit : il n'y a plus personne au guichet au bout d'un temps fini) est la réunion des évènements $N_k = 0$ pour $k \geq 1$.

Question II.2.a.2 Démontrer que la suite d'évènements $(N_k = 0)_{k\geq 1}$ est croissante.

Question II.2.a.3 En déduire que la suite $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente vers une limite L vérifiant $L \leq 1$ et que la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini est égale à cette limite L.

Question II.2.b Justifier, pour tout couple (j, k) de nombres entiers naturels, les formules

$$\mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = 1) = \mathbf{P}(N_k = 0) \ \text{ et } \ \mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) = \mathbf{P}(N_k = 0)^j\ .$$

Question II.2.c.1 En déduire, pour k entier naturel, l'expression de p_{k+1} en fonction de p_k.

Question II.2.c.2 Préciser p_0 et, en utilisant les résultats de la partie I, donner la limite de la suite $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini. On discutera le résultat obtenu en fonction des valeurs de λp.

Question II.2.d Déterminer des valeurs exactes ou approchées à 10^{-2} près des probabilités pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini lorsque la durée moyenne de service d'un client au guichet est égale à 1, 2, 4 ou 8 tandis que la probabilité pour qu'un client se présente au guichet entre deux instants consécutifs données est égale à 0.5 d'abord, à 0.25 ensuite.

Question II.3 Calcul de l'espérance de la variable aléatoire N_k.
Soit k un entier naturel.

On convient d'appeler « espérance de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnellement à l'évènement $N_k = i$ », et de noter $\mathbf{E}(N_{k+1} \mid N_k = i)$ l'espérance de N_{k+1} lorsque la probabilité est la probabilité conditionnelle sachant l'évènement $N_k = i$ réalisé. Autrement dit on définit, si elle l'existe, l'espérance par la formule

$$(*) \qquad \mathbf{E}(N_{k+1} \mid N_k = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} j.\mathbf{P}(N_{k+1} = j \mid N_k = i)\ .$$

Question II.3.a.1 On suppose l'évènement $N_k = i$ réalisé. Déterminer alors la loi de la durée de service de ces i clients de la k^{e} vague en distinguant les cas $i = 0$ et $i \geq 1$.

Question II.3.a.2 En déduire la loi de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnellement à l'évènement $N_k = i$ et vérifier

$$\mathbf{E}(N_{k+1} \mid N_k = i) = i\lambda p \ .$$

Question II.3.b.1 On suppose que l'espérance $\mathbf{E}(N_k)$ existe. Établir

$$\mathbf{E}(N_k) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N_k = i)\mathbf{E}(N_{k+1} \mid N_k = i) \ .$$

Question II.3.b.2 Si X et Y désignent deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$, en utilisant les préliminaires, préciser sous quelles hypothèses il est licite d'écrire

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{i=0} \mathbf{P}(X = i)\mathbf{E}(Y \mid X = i) \ .$$

Question II.3.b.3 Établir l'existence de l'espérance $\mathbf{E}(N_{k+1})$ et donner son expression en fonction de λ, p et $\mathbf{E}(N_k)$.

Question II.3.c En déduire l'existence et l'expression de $\mathbf{E}(N_k)$.

Question II.3.d Déterminer l'espérance du nombre de clients qui se présentent au guichet jusqu'à ceux de la n^{e} vague incluse, où n est un entier naturel non nul.

Question II.3.e Discuter et interpréter la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$ et pour $\lambda p < 1$. Qu'obtient numériquement dans les cas étudiés en II.2.d ?