Toutes les parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre que l'on voudra. Il sera donné une grande importance aux questions de nature algorithmique. Par ailleurs il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Partie I – La méthode de dichotomie

Soit I un intervalle compact de $\mathbf{R}$ et f une fonction numérique de classe C^2 définie sur I.

Question I.1.a Soit a et b deux points de I avec $a < b$ et g une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. On suppose que

$$\left| g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| > \frac{b-a}{2} \sup_{a \leq t \leq b} |g'(t)| \,.$$

Montrer qu'alors g n'admet pas de zéro sur $[a, b]$.

Question I.1.b Soit a et b deux points de I avec $a < b$. On suppose que

$$\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| > \frac{b-a}{2} \sup_{a \leq t \leq b} |f''(t)| \,.$$

Montrer qu'alors f admet au plus un unique zéro sur $[a, b]$.

Question I.2.a Soit x un point de I tel que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe un intervalle I_x centré en x tel que la restriction de f à I_x admette x comme unique zéro.

Question I.2.b On suppose que f et f' n'ont pas de zéro commun sur I ; soit Z l'ensemble des zéros de f sur I. Montrer que Z est un ensemble fini.

Question I.3 On suppose dans toute cette question que f et f' n'ont pas de zéro commun.
Question I.3.a Soit $m_1 = \min_{x \in Z} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup_{t \in I} |f''(t)|$. Montrer que m_1 est un réel strictement positif et M_2 un réel positif.

Question I.3.b Soit z dans Z et t dans I ; montrer

$$M_2 |t - z| \leq \frac{m_1}{2} \Rightarrow |f'(t)| \geq \frac{m_1}{2} \,.$$

Question I.3.c Soit α et β des majorants respectifs de $|f'|$ et $|f''|$ sur I. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que, pour tout point t de I l'une au moins des deux conditions suivantes est vérifiées :

1. $|f(t)| > \alpha(b - a)2^{-n}$
2. $|f'(t)| > \beta(b - a)2^{-n}$

Question I.3.d Soit α, β et n vérifiant les propriétés de la question précédente. On note $(c_k)_{0 \leq k \leq 2^n}$ la subdivision de I de pas constant égal à $(b - a)2^{-n}$; montrer que f possède au plus un zéro dans chacun des intervalles $[c_k, c_{k+1}]$ (pour $0 \leq k < 2^n$).

Question I.3.e En déduire un algorithme permettant de trouver pour chaque zéro de f sur I un intervalle le contenant et sur lequel f ne s'annule qu'une seule fois.

Partie II – La méthode de J-L. Lagrange

Soit n un entier naturel strictement positif et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ un polynôme de degré n à coefficients réels, unitaire tel que a_0 soit non nul.

Question II.1 On suppose dans cette question que tous les coefficients de P (hormis le coefficient dominant) sont négatifs ou nuls : pour tout entier k comrpis entre 0 et $n-1$.
Question II.1.a Montrer que P admet une unique racine réelle positive. On la notera ρ.

Question II.1.b Montrer que ρ est inférieur à

$$1 + \sup_{0 \leq k < \deg P} |a_k|$$

et à

$$\max\left(1, \sum_{0 \leq k < \deg P} |a_k|\right) .$$

Question II.1.c Soit z une racine éventuellement complexe de P. Montrer que $P(|z|)$ est négatif.

Question II.1.d En déduire un majorant du module des racines de P.

Question II.2 On ne suppose plus rien sur les coefficients de P. Montrer que toutes les racines de P sont de module inférieur à

$$1 + \sup_{0 \leq k < \deg P} |a_k| \qquad \text{et à} \qquad \max\left(1, \sum_{0 \leq k < \deg P} |a_k|\right) .$$

Question II.3 On suppose dans cette question que P n'a que des racines simples (éventuellement complexes), i.e. P est premier avec son polynôme dérivé. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ ses racines.

Question II.3.a Soit Q le polynôme de $\mathbf{C}[X]$ défini par

$$Q(X) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(X - (x_i - x_j)^2\right) .$$

Montrer que Q est à coefficients réels.

Question II.3.b Soit R le polynôme réciproque de Q, c'est-à-dire le polynôme dont la fonction polynomiale associée vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \qquad R(x) = x^{\deg(Q)} Q\left(\frac{1}{x}\right) .$$

Soit δ est un majorant des racines de R; montrer que les racines réelles de P sont espacées d'au moins $\delta^{-1/2}$.

Question II.3.c En déduire un algorithme permettant de trouver pour chaque racine réelle de P un intervalle le contenant et sur lequel P n'a qu'une racine.

Partie III - La méthode de Householder

Dans toute cette partie n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et E désigne l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E et $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v.
Question III.1.a Soit u et v deux vecteurs de E, à quelle condition existe-t-il une symétrie hyperplane échangeant u et v ?

Question III.1.b On suppose dans cette question seulement que n vaut 3. Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ un vecteur de E. On note, pour tout réel θ, u_θ le vecteur $\cos\theta e_2 + \sin\theta e_3$. Montrer que la symétrie par rapport au plan perpendiculaire à u_θ envoie u dans le plan (e_1, e_2) si et seulement si

$$\cos(2\theta)u_3 = \sin(2\theta)u_2 \; .$$

Question III.1.c Soit maintenant u et v deux vecteurs de E et P un plan contenant v. Montrer qu'il existe une symétrie hyperplane de E laissant fixe v et envoyant u dans P.

Question III.2.a Soit ϕ un endomorphisme de E, montrer qu'il existe une symétrie hyperplane σ telle que e_1 soit vecteur propre de $\sigma \circ \phi$.

Question III.2.b En déduire que toute matrice carrée d'ordre n peut s'écrire comme produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure à diagonale positive. À quelle condition cette décomposition est-elle unique ? Ceci fournit-il un algorithme de calcul des valeurs propres ?

Question III.3.a Soit maintenant ψ un endomorphisme symétrique de E. Montrer qu'il existe σ une symétrie hyperplane telle que

$$\sigma\psi\sigma = \sigma^{-1}\psi\sigma = {}^t\sigma\psi\sigma$$

est un endomorphisme symétrique de E envoyant e_1 dans le plan engendré par e_1 et e_2.

Question III.3.b En déduire qu'il existe un endomorphisme orthogonal ρ tel que ${}^t\rho\psi\rho$ admette une matrice tridiagonale dans la base canonique (i.e. dont tous les coefficients en dehors de la diagonale et de ceux immédiatement au-dessus ou au-dessous de la diagonale sont nuls).

Question III.3.c Algorithmiquement y a-t-il un choix meilleur que les autres pour obtenir ${}^t\rho\psi\rho$? Cette méthode permet-elle un calcul des valeurs propres de S ?

Question III.3.d Peut-on améliorer cette méthode pour diagonaliser S ?

Question III.4 On suppose dans cette question que S est une matrice symétrique tridiagonale et on note, pour tout entier i compris entre 1 et n, S_i la matrice carrée extraite de S obtenue en ne gardant que les i premières lignes et colonnes. On note P_i le polynôme caractéristique de S_i, $(a_1, \ldots, a_n)$ la diagonale de S et $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ la surdiagonale de S (ou la sous-diagonale puisque c'est la même chose) :

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} .$$

On suppose enfin qu'aucun des coefficients b_i, pour i entre 1 et $n-1$, n'est nul.

Question III.4.a On pose $P_0 = 1$. Montrer que, pour tout entier i entre 1 et $n-1$, on a

$$P_{i+1} = (a_{i+1} - X)P_i - b_i^2 P_{i-1} \ .$$

Question III.4.b Montrer que, pour tout entier i entre 1 et $n-1$, les polynômes P_{i+1} et P_i prennent des valeurs de signes contraires en toute racine de P_i.

Question III.4.c Étudier le comportement à l'infini des polynômes P_i (pour i entre 0 et n).

Question III.4.d En déduire que tous les polynômes P_i (pour i entre 1 et n) sont scindés à racines simples, notées $(\lambda_{i,j})_{1\leq j\leq i}$ avec $\lambda_{i,1} < \lambda_{i,2} < \ldots < \lambda_{i,i}$, et montrer que pour tout i entre 1 et $n-1$ et tout j entre 1 et i, on a

$$\lambda_{i+1,j} < \lambda_{i,j} < \lambda_{i+1,j+1} \ .$$

Question III.4.e Soit x un réel et $\omega(x)$ le nombre de changements de signes dans la suite $(P_0(x), \ldots, P_n(x))$ dans laquelle on a retiré les zéros, i.e.

$$\omega(x) = \text{Card}\ \{i \in [0; n-1] \mid \exists j \in [i+1; n] \quad P_i(x)P_j(x) < 0 \quad \text{et} \quad P_k(x) = 0 \text{ si } i < k < j\} \ .$$

Montrer que ω est constante sur tout intervalle ne contenant aucune valeur propre de S.

Question III.4.f Montrer que

$$\lim_{x\to y, x>y} \omega(x) - \lim_{x\to y, x<y} \omega(x)$$

est nul si y n'est pas valeur propre de S et vaut 1 sinon. En déduire un algorithme pour isoler les valeurs propres de S.

Question III.4.g Que se passe-t-il lorsque l'on ne fait plus l'hypothèse que les coefficients b_i ne sont pas nuls ?

Partie IV – Les formules de Gerolamo Cardano et Ludovico Ferrari

Question IV.1 Soit $P(X) = X^3 + 3aX^2 + 3bX + c$ un polynôme de de degré 3 à coefficients réels.

Question IV.1.a Montrer qu'il existe u et v dans $\mathbf{C}$ tels que

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \qquad P(X) = \lambda(X+u)^3 + \mu(X+v)^3$$

si et seulement si $(1, a, b, c)$ sont les quatre premiers termes d'une suite qui est combinaison linéaire des suites $(u^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Question IV.1.b Soit U et V deux nombres complexes distincts. Montrer que $(1, a, b, c)$ sont les quatre premiers termes d'une suite qui est combinaison linéaire des suites $(U^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(V^n)_{n\in\mathbf{N}}$ si et seulement si

$$b - (U+V)a + UV = 0 \qquad \text{et} \qquad c - (U+V)b + UVa = 0 \ .$$

Question IV.1.c On suppose $b = a^2$. Résoudre directement l'équation $P(X) = 0$.

Question IV.1.d On suppose que b est distinct de a^2. Montrer que si P est premier avec son polynôme dérivé (i.e. P n'a que des racines simples), on peut trouver λ, μ, u et v vérifiant les propriétés de la question IV.1.a et résoudre l'équation $P(X) = 0$.

Question IV.1.e Résoudre l'équation $P(X) = 0$ dans les autres cas.

Question IV.1.f Donner des formules exactes pour les solutions $X^3 + 2X - 1 = 0$.

Question IV.2 On se donne maintenant un polynôme de degré 4 de la forme

$$P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c = 0$$

avec a, b et c non nuls.

Question IV.2.a Montrer que les racines de l'équation $P(X) = 0$ sont les abscisses (x, y) des points du $\mathbf{C}$-plan vectoriel $\mathbf{C}^2$ qui sont dans l'intersection de la parabole C_0 d'équation $Y = X^2$ et d'une conique C_1 que l'on précisera.

Question IV.2.b On note P_0 et P_1 les deux polynômes de deux variables X et Y, à coefficients complexes, unitaires en Y définissant les coniques C_0 et C_1 respectivement. Pour t complexe, on note P_t le polynôme $(1-t)P_0 + tP_1$ et C_t la courbe de $\mathbf{C}^2$ d'équation $P_t(x, y) = 0$. Montrer que C_t est une conique, éventuellement dégénérée, et que, pour t non nul, $C_t \cap C_0 = C_1 \cap C_0$.

Question IV.2.c Montrer qu'une conique donnée par une équation

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

est dégénérée si et seulement si la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ est singulière.

Question IV.2.d En déduire que l'on peut trouver l'équation d'une conique dégénérée Γ telle que $\Gamma \cap C_0 = C_1 \cap C_0$ en résolvant une équation de degré au plus 3.

Question IV.2.e Montrer que l'on peut déterminer si Γ est réunion de deux droites parallèles ou confondues en connaissant une équation la définissant.

Question IV.2.f On suppose que Γ est la réunion de deux droites non parallèles. Montrer que l'on peut trouver son centre (i.e. le point de concours des deux droites la formant) en résolvant un système linéaire et que, finalement, on peut trouver des équations de ces deux droites en résolvant des équations de degré au plus 2.

Question IV.2.g Montrer enfin que l'on peut toujours déterminer l'intersection de Γ et C_0 en résolvant des équations de degré au plus 2.

Question IV.2.h Résoudre l'équation

$$X^4 - X^2 - X + \frac{1}{4} = 0 \,.$$