Problème de révision

Préparation au CAPES 1998-99
Université Paris 7

Notations et rappels

Dans tout le problème $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels.

Une fonction est dite de classe C^2 si elle est deux fois différentiable en tout point de son domaine de définition et si sa dérivée seconde y est continue. Si $u \mapsto y(u)$ est une telle fonction on notera indifféremment $\dot{y}$, y' ou $\frac{dy}{du}$ la dérivée première de y et de même pour les dérivées d'ordre supérieur : $\ddot{y}$, y'', $\frac{d^2y}{dy^2}$ etc.

Si A et B sont deux points distincts du plan, on note (AB) l'unique droite passant par A et B .

Le but du problème est de donner une condition pour que, étant donné deux coniques, on puisse construire un polygone inscrit dans la première et circonscrit à la seconde. La première partie est analytique et porte sur le calcul différentiel et intégral avec notamment l'étude d'une équation différentielle (non linéaire) et des propriétés de la solution. Même si elle sert de base aux parties suivantes, il est possible de poursuivre le problème à condition d'admettre les résultats des questions I.6.g, I.6.h et I.7.b. La seconde partie est de la géométrie plane et résout la question dans le cas des cercles. La troisième partie traite le cas général en le ramenant au cas des cercles. Hormis le résultat II.2.c. la troisème partie est indépendante de la seconde et est en fait du domaine de la géométrie dans l'espace affine de dimension 3.

***

Partie I

Soit k un réel vérifiant $0 < k < 1$. On considère les équations différentielles

$$(E) \qquad \dot{y}^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$$

et

$$(E') \qquad \dot{y} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\ .$$

I.1 Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 tel que l'équation différentielle (E') admette une unique solution de classe C^1 sur I vérifiant $y(0) = 0$. Montrer que l'on peut supposer I centré en 0 et tel que y' ne s'annule pas sur I.

I.2 Montrer que, sur I choisi comme précédemment, il existe une unique solution de (E), de classe C^2 vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On pourra montrer que, pour toute solution y de (E) sur I, y' ne peut s'annuler sur I.

On notera $y(u) = sn(u;k)$ cette solution, ou encore $sn(u)$ quand aucune confusion n'est possible sur le paramètre k . Ce dernier sera appelé module de la fonction sn . On pose

$$dn(u;k) = dn(u) = \sqrt{1-k^2sn^2(u;k)} \qquad \text{et} \qquad cn(u;k) = cn(u) = \frac{\dot{sn}(u;k)}{dn(u;k)}\ .$$

I.3 Vérifier que sn est une fonction impaire et que cn et dn sont des fonctions paires. Vérifier également les propriétés suivantes, pour tout u dans I :

1. $sn^2(u) + cn^2(u) = 1$
2. $\dot{cn}(u) = -sn(u)dn(u)$
3. $\dot{dn}(u) = -k^2 sn(u)cn(u)$.

I.4 Soit w un réel fixé. On note s_1 et s_2 respectivement les fonctions $u \mapsto sn(u)$ et $u \mapsto sn(w-u)$ (définies respectivement sur I et sur $w - I = \{w - t \ / \ t \in I\}$).

I.4.a Calculer $\dot{s_2}^2$, $\ddot{s_1}$, $\ddot{s_2}$ et montrer que, quand toutes les quantités sont définies,

$$\frac{\ddot{s_1}s_2 - \ddot{s_2}s_1}{\dot{s_1}^2 s_2^2 - \dot{s_2}^2 s_1^2} = -2k^2 \frac{s_1 s_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} \ .$$

I.4.b En déduire, quand toutes les quantités sont définies,

$$d\log(\dot{s_1}s_2 - \dot{s_2}s - 1) = d\log(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)$$

puis que (pour tout point de $I \cap (w - I)$)

$$\frac{\dot{s_1}s_2 - \dot{s_2}s_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2}$$

ne dépend que de w .

I.4.c Montrer que, quand u, v et $u+v$ appartiennent à I ,

$$sn(u+v) = \frac{sn(u)cn(v)dn(v) + sn(v)cn(u)dn(u)}{1 - k^2 sn^2(u) sn^2(v)} \ .$$

On admettra que cette formule permet d'étendre les fonctions sn, cn et dn en des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ entier et que sn est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
On admettra également la formule d'addition suivante pour cn (que l'on peut obtenir de la même façon que pour sn) :

$$cn(u+v) = \frac{cn(u)cn(v) - sn(u)sn(v)dn(u)dn(v)}{1 - k^2 sn^2(u) sn^2(v)} \ .$$

I.4.d Interpréter ces deux formules d'addition quand k tend vers 0.

I.5 Vérifier que $cn(u)cn(u+v) + dn(v)sn(u)sn(u+v) = cn(v)$ pour tout couple de réels (u, v) .

I.6 On pose $K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$.

I.6.a Montrer que K est bien défini.

I.6.b Montrer que sn' s'annule en au moins un point de $\mathbb{R}_+$ et que K est son plus petit zéro strictement positif.

I.6.c Calculer $sn(K)$ et $cn(K)$.

I.6.d Montrer que $sn(u+K) = \dfrac{\dot{sn}(u)}{1 - k^2 sn^2(u)}$ et en déduire que c'est une fonction impaire de u.

I.6.e Montrer que $\dot{sn}(u+K) = -\dfrac{(1-k^2)sn(u)}{1 - k^2 sn^2(u)}$.

I.6.f Montrer que sn est $4K$-périodique et dresser un tableau de variation de sn sur $[0, 4K]$.

I.6.g Montrer que, pour tout ϕ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique u dans $[0, 4K[$, noté $u = am_k(\phi)$, tel que $(\sin\phi, \cos\phi) = (sn(u;k), cn(u;k))$.

I.6.h Montrer que, pour tout α et β dans $[0, 1[$

$$(\exists u \in \mathbb{R} \text{ tel que } (\alpha, \beta) = (cn(u;k), dn(u;k))) \Leftrightarrow \left(k^2 = \frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2}\right) .$$

I.7 On se donne trois réels α, β et γ.

I.7.a A quelle condition l'équation, en u, $\alpha cn(u) + \beta sn(u) = \gamma$ a-t-elle au moins une solution ? Dans ce cas quelles sont-elles ?

I.7.b En déduire que, pour tout u, v, w dans $\mathbb{R}$,

$$(cn(u)cn(w) + dn(v)sn(u)sn(w) = cn(v)) \Leftrightarrow (w \equiv u \pm v \ [4K]) .$$

***

Partie II

Soit a, r et R des réels positifs et C, C' deux cercles du plan réel euclidien dont des équations cartésiennes sont $x^2 + y^2 = R^2$ et $(x + a)^2 + y^2 = r^2$ respectivement. On suppose $0 \leq a \leq R - r$, i.e. que C' est « contenu » dans C. On note P_ϕ le point de C de coordonnées $(R\cos 2\phi, R\sin 2\phi)$. **Jusqu'à la question** $II.2.b$**, on suppose** a **non nul.**

II.1 Soit $P = P_\phi$ et Q deux points de C distincts et tels que (PQ) est tangente à C' .

II.1.a Montrer que $Q = P_{\phi'}$ avec ϕ' tel que

$$\cos\phi\cos\phi' + \frac{R-a}{R+a}\sin\phi\sin\phi' = \frac{r}{R+a} .$$

II.1.b En déduire qu'il existe k et K , que l'on précisera, et u tels que

$$am_k(\phi') \equiv am_k(\phi) \pm u \ [4K] .$$

II.2 Soit $P = P_{\phi_0}$ un point de C . On construit des points $(P_{\phi_i})_{1\leq i\leq n}$ de sorte que $(P_{\phi_i}P_{\phi_{i+1}})$ soit tangente à C' pour tout $0 \leq i \leq n$ et $P_{\phi_{i+1}}$ distinct de P_{ϕ_i} et $P_{\phi_{i-1}}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

II.2.a Montrer qu'il existe k, K et u tels que, pour tout $0 \leq i \leq n-1$

$$am_k(\phi_{i+1}) \equiv am_k(\phi_i) + u \ [4K] .$$

II.2.b Que se passe-t-il si a est nul ?

II.2.c Montrer que la condition $P_{\phi_n} = P_{\phi_0}$ est indépendante de ϕ_0 .

II.2.d En déduire la condition sur R, r et a pour qu'il existe un triangle inscrit dans C et circonscrit à C' .

II.2.e Même question que précédemment pour un quadrangle.

***

Partie III

On considère, dans l'espace euclidien $E=\mathbb{R}^3$, un plan affine P défini par une équation $\phi(x)=1$ où ϕ est une forme linéaire non nulle sur E et une conique de P définie par les équations

$$\Gamma \;:\; Q(x)=0 \qquad \& \qquad \phi(x)=1$$

où Q est une forme quadratique non dégénérée sur E.

III.1 Soit q un point de P et u un vecteur non nul de l'espace vectoriel direction de P (i.e. $\phi(q)=1$ et $\phi(u)=0$). On note $L_{q,u}$ la droite affine (incluse dans P) qui passe par q et qui admet u comme vecteur directeur. On note $P_{q,u}$ le plan perpendiculaire à $L_{q,u}$ passant par q. On se donne un point p de E en dehors de P et sur le cercle de centre q et de rayon $||u||$ tracé dans $P_{q,u}$. On peut résumer les propriétés de p ainsi : $p-q\perp u$, $||p-q||=||u||$ et $\phi(p)\neq 1$. On note enfin $\Pi_{p,q,u}$ le plan affine contenant p et $L_{q,u}$.

III.1.a Soit y_0 un point de E n'appartenant pas à $\Pi_{p,q,u}$. On se donne λ et μ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $y_0+\lambda(p-q)+\mu u$ appartient au cône de sommet p et de base Γ si et seulement si

$$Q\left(\mu u-\lambda q+y_0+\frac{\phi(y_0)-1}{1-\phi(p)}p\right)=0\;.$$

III.1.b A quelles conditions sur q et u existe-t-il un plan parallèle à $\Pi_{p,q,u}$ tel que la section du cône de sommet p et de base Γ par ce plan soit un cercle ?

III.2 Soit Γ' une seconde conique dans le plan P, ne rencontrant pas la première, définie par les équations

$$\Gamma' \;:\; Q'(x)=0 \qquad \& \qquad \phi(x)=1$$

où Q' est une forme quadratique non dégénérée sur E. Soit S et S' les matrices symétriques 3 par 3 à coefficients réels associées dans la base canonique de E aux formes quadratiques Q et Q' respectivement. On admettra pour l'instant qu'il existe un vecteur complexe, non réel, $Z=X+iY$ (et donc $X,Y\in E$) tel que ${}^tZSZ={}^tZS'Z=0$ (les produits sont effectués en tant que matrices à coefficients complexes) et $\phi(X)=1$ et $\phi(Y)=0$. Cela veut dire que Z est un point d'intersection imaginaire des coniques Γ et Γ'.

Montrer qu'on peut trouver q dans P, u dans $\vec{P}$ non nul, p en dehors de P et un plan Π parallèle à $\Pi_{p,q,u}$ tels que la projection de sommet p de P sur Π (i.e. l'image d'un point x de P est l'intersection de la droite (px) avec Π) envoie Γ et Γ' sur deux cercles.

III.3 Montrer que la conclusion de la question $II.2.c$ reste valide si on remplace C et C' par deux coniques Γ et Γ' (avec Γ' « incluse » dans Γ) et que l'on fait la construction de $II.2$.

III.4 Montrer l'existence de Z, défini en $III.2$.