Première épreuve CAPES externe 2000

François Sauvageot

2 mars 2001

Partie I

Question I.1.a Soit P un polynôme de degré m et de coefficient dominant a et n un entier naturel. Alors P^n est de degré mn et de coefficient dominant a^n. Par conséquent $(t^2-1)^n$ est un polynôme unitaire de degré $2n$. Si maintenant m est supérieur à n, $P^{(n)}$ est un polynôme de degré $m-n$ et de coefficient dominant $m(m-1)\ldots(m-n+1)a$. Il en résulte que L_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(2n)!/n!$.

Question I.1.b On introduit, dans un Ti-89, la commande `d((t^2-1)^n,t,n)` $\rightarrow$`L(n)`, puis on demande `L(1)`, `L(2)` et `L(3)`. On obtient

$$L_1 = 2t \qquad L_2 = 12t^2-4 \qquad \text{et} \qquad L-3 = 120t^3-72t\ .$$

Question I.1.c Puisque t^2-1 est pair, il en est de même pour n'importe laquelle de ses puissances. Comme la dérivation change la parité d'un polynôme (de degré au moins égal à 1), L_n a la même parité que n.

Question I.1.d Soit P et Q les polynômes $(t+1)^n$ et $(t-1)^n$. Comme 1 est racine de Q avec la multiplicité n (si n est nul, cela signifie que 1 n'est pas racine de Q), $Q^{(n)}$ ne s'annule pas en 1 alors que $Q^{(k)}$ s'y annule pour tout entier k strictement inférieur à n. De plus, comme Q est unitaire de degré n, $Q^{(n)}$ est le polynôme constant égal à $n!$. Il en résulte

$$L_n(1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^{(n-k)}(1) Q^{(k)}(1) = n!.P(1) = 2^n.n!\ .$$

D'après la question précédente on en déduit

$$L_n(-1) = (-1)^n L_n(1) = (-2)^n.n!\ .$$

Question I.2.a Tout d'abord l'application considérée est bien définie puisque le produit de deux fonctions continues sur $[-1;1]$ l'est et y est donc en particulier intégrable. Elle est symétrique par commutativité du produit entre fonctions numériques. Elle est également linéaire par rapport à la première variable par linéarité de l'intégrale.

Par ailleurs si f est une fonction continue sur $[-1;1]$, $\langle f, f\rangle$ est positif en tant qu'intégrale de la fonction positive f^2 et ne saurait être nul sans que f^2 ne le soit, par continuité de f^2, ce qui est équivalent au fait que f le soit.

L'application considérée est donc bien un produit scalaire.

Question I.2.b.1 On a en fait $f_n(t) = nt$ si $|t| < 1/n$ et $f_n(t) = sgn(t) = t/|t|$ si $1/n \le t \le 1$ et donc f_n continue sur $[-1;-1/n[$, $]-1/n;1/n[$ et $]1/n;1]$ puisqu'elle y coïncide avec des fonctions continues. Par imparité f_n est continue en $1/n$ si et seulement si elle l'est en $-1/n$. Or les fonctions $t \mapsto nt$ et $t \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbf{R}$ et ont même valeur en $1/n$, par conséquent f_n est continue en $1/n$ et, en conclusion, sur $[-1;1]$.

Question I.2.b.2 Soit m et n deux entiers avec $1 \le n \le m$. On a

$$\begin{aligned}
\langle f_m, f_n\rangle &= 2\int_0^1 |f_n(t)-f_m(t)|^2 dt = 2\left(\int_0^{1/m} (m-n)^2 t^2 dt + \int_{1/m}^{1/n} (1-nt)^2 dt\right) \\
&= 2\left(\frac{(1-n/m)^2}{3m} + \frac{(1-n/m)^3}{3n}\right) = \frac{2}{3n}\left(1-\frac{n}{m}\right)^2\left(\frac{n}{m}+1-\frac{n}{m}\right) \le \frac{2}{3n}\ .
\end{aligned}$$

Il en résulte $||f_n - f_m||_2 \leq \sqrt{2/3n}$.

Question I.2.b.3 L'application qui à f dans $C^0([-1;1])$ associe la fonction, définie sur $[-1;1]$, $g\ :\ t \mapsto -f(-t)$ est une isométrie. En effet g est continue et, par changement de variable affine dans l'intégrale, de même norme que f. C'est donc une application linéaire continue. Comme les f_n sont des vecteurs propres de cette isométrie, pour la valeur propre 1, il en est de même de leur limite, par continuité, i.e. f est impaire.

Soit maintenant t_0 un point de $]0;1]$ où f est distincte de 1. Par continuité de f en t_0, il existe donc un voisinage de t_0 dans $[-1;1]$ où $|f-1|$ est supérieure à $|1-f(t_0)|/2$. Soit h dans $\mathbf{R}_+^*$, inférieur strictement à t_0 tel que $[t_0-h;t_0+h]$ soit inclus dans le voisinage précédent et soit n supérieur à $1/(t_0-h)$, de sorte que f_n soit égale à 1 sur $[t_0-h;t_0+h]$. On a

$$||f_n - f||_2^2 \geq \int_{t_0-h}^{t_0+h} \frac{(1-f(t_0))^2}{4} dt = \frac{h(1-f(t_0))^2}{2}$$

et par conséquent $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne saurait converger vers f.

Il en résulte que f est égale à 1 sur $]0;1]$.

Mais une fonction impaire est nécessairement nulle en 0 et il en résulte que f ne peut être continue en 0, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Par conséquent la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ n'admet pas de limite dans l'espace $C^0([-1;1])$ muni de la norme $||\ ||_2$, bien qu'elle y soit de Cauchy. Ce dernier espace n'est donc par complet et donc n'est pas un espace de Hilbert.

Question I.3 Soit n un entier naturel et Q un polynôme. Notons P le polynôme $(t^2-1)^n$. La formule d'intégration par partie donne, pour tout entier naturel p

$$\langle P^{(p)}, Q\rangle = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \left[P^{(p-k)}(1)Q^{(k-1)}(1) - P^{(p-k)}(-1)Q^{(k-1)}(-1)\right] + (-1)^p \langle P, Q^{(p)} \ .$$

En particulier, si p est inférieur ou égal à n, comme -1 et $+1$ sont racines de P avec multiplicité n, il vient

$$\langle P^{(p)}, Q\rangle = (-1)^p \langle P, Q^{(p)} \ .$$

En particulier pour $p=n$ et $Q=L_m$ un polynôme de Legendre, on obtient

$$\langle L_n, L_m\rangle = (-1)^n \langle P, L_m^{(n)} \ ,$$

ce qui est la formule demandée.

Soit maintenant m et n deux entiers naturels distincts. Puisque L_m et L_n sont respectivement de degrés m et n, l'un des deux polynômes $L_m^{(n)}$ et $L_n^{(m)}$ est nul. Par conséquent les formules

$$\langle L_n, L_m\rangle = (-1)^n \langle P, L_m^{(n)}$$

et

$$\langle L_n, L_m\rangle = \langle L_m, L_n\rangle = (-1)^m \langle (t^2-1)^m, L_n^{(m)}$$

assurent que L_m et L_n sont orthogonaux. C'est-à-dire que $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale dans l'espace $C^0([-1;1])$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Question I.4.a Soit f une focntion dans $C^0([-1;1])$ et ε un réel strictement positif. Le théorème de Weierstraß-Stone assure l'existence d'un polynôme P tel que $\sup_{|t|\leq 1} |f(t)-P(t)| \leq \varepsilon$. En particulier

$$||f-P||_2 \leq \sqrt{2\varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon \ .$$

Soit maintenant n un entier naturel quelconque supérieur au degré de P; comme P appartient à F_n, par définition du projecteur π_n, on a

$$||f-\pi_n(f)||_2 \leq ||f-P||_2 \leq \sqrt{2}\varepsilon \ .$$

Il en résulte $\lim_{n\to+\infty} ||f-\pi_n(f)||_2 = 0$, i.e. la suite $(\pi_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers f au sens de la norme $||\ ||_2$.

Question I.4.b D'après la question I.3, la famille $(K_j)_{0\leq j\leq n}$ est une famille orthogonale et c'est donc une famille libre de vecteurs de F_n. Par cardinalité c'en est donc une base. C'est même une base orthonormale de F_n.

Question I.4.c Soit n et f comme dans l'énoncé et P le polynôme $\sum_{j=0}^n \langle f, K_j\rangle K_j$. On a, pour tout entier i entre 0 et n,

$$\langle f-P, K_i\rangle = \langle f, K_i\rangle - \langle P, K_i\rangle = 0$$

par orthonormalité de la base $(K_j)_{0\leq j\leq n}$ de F_n. Il en résulte que P est un vecteur de F_n tel que $f-P$ est orthogonal à F_n et donc que P est le projeté orthogonal de f sur F_n :

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^n \langle f, K_j\rangle K_j \ .$$

Par orthonormalité, il vient donc

$$||\pi_n(f)||_2^2 = \sum_{j=0}^n \langle f, K_j\rangle^2 \ .$$

Question I.4.d Soit f comme dans l'énoncé. D'après le théorème de Pythagore, pour tout entier naturel n, on a

$$||\pi_n(f)||_2^2 = ||f||_2^2 - ||f-\pi_n(f)||_2^2 \leq ||f||_2^2$$

et donc la question précédente permet de conclure que la série de terme général $\langle f, K_j\rangle^2$ est majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle est donc convergente.

Ce même théorème couplé au résultat de la question I.4.a montre que $||\pi_n(f)||_2^2$ tend vers $||f||_2^2$ lorsque n tend vers l'infini. Il en résulte, d'après la question précédente,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \langle f, K_j\rangle K_j = ||f||_2^2 \ .$$

En particulier $\langle f, K_n\rangle^2$ est le terme général d'une série convergente et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^1 f(t)K_n(t)dt = 0 \ .$$

Partie II

Question II.1.a Soit f et g comme dans l'énoncé. On a, par positivité de ω,

$$|fg\omega| = |f\sqrt{\omega}.g\sqrt{\omega}| \leq |f\sqrt{\omega}|^2 + |g\sqrt{\omega}|^2 = f^2\omega + g^2\omega \ .$$

Il en résulte que $fg\omega$ est absolument intégrable sur $]a,b[$ et donc a fortiori y est intégrable.

Question II.1.b Remarquons que $(t^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de F.

Aussi, si F est inclus dans E, en particulier t^n l'est pour tout entier naturel n et donc $t\mapsto t^n\omega(t)$ est intégrable sur $]a,b[$.

Réciproquement si, pour tout entier naturel n, $t\mapsto t^n\omega(t)$ est intégrable sur $]a,b[$, alors $(t^n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à E et donc toute combinaison linéaire de ces éléments, i.e. F est inclus dans E.

Dans ce cas on a en particulier l'intégrabilité de ω sur $]a,b[$.

Supposons maintenant a et b réels. Si ω est intégrable sur $]a,b[$, pour tout entier naturel n et tout t dans $]a,b[$, on a

$$|t^n\omega(t)| \leq \max(|a|^n, |b|^n)\omega(t)$$

et donc $t \mapsto t^n\omega(t)$ est intégrable sur $]a,b[$. Par conséquent, dans ce cas de figure, F est inclus dans E si et seulement si ω est intégrable sur $]a,b[$.

Question II.1.c La suite $(t^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de F. Notons $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ son orthonormalisée de Gram-Schmidt. Soit n un entier naturel, P_n appartient à l'espace engendré par les t^k pour $0 \leq k \leq n$ et est donc de degré inférieur ou égal à n. S'il était de degré strictement inférieur à n, tous les polynômes P_k pour $0 \leq k \leq n$ seraient donc dans F_{n-1}. Mais ce dernier espace est de dimension n et ne peut donc contenir de famille libre de $n+1$ vecteurs, a fortiori de famille orthonormale de $n+1$ vecteurs. Par conséquent P_n est de degré n et donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convient.

Question II.2.a Par définition de Q_n, le polynôme P_nQ_n n'a que des racines de multiplicités paires dans $]a,b[$. Il y est donc de signe constant. Il en est donc de même de $P_nQ_n\omega$. Par conséquent $\langle P_n, Q_n\rangle_\omega$ n'est nul que si $P_nQ_n\omega$ est identiquement nul sur $]a,b[$. Par stricte positivité de ω, ceci n'est possible que si P_nQ_n est identiquement nul. Comme P_n et Q_n sont des polynômes non nuls, une telle éventualité est impossible et donc $\langle P_n, Q_n\rangle_\omega$ est non nul.

Question II.2.b Comme $(P_k)_{0\leq k\leq n-1}$ est une famille orthogonale d'éléments de F_{n-1}, c'en est une base. En particulier P_n est orthogonal à F_{n-1}. En particulier si Q_n est de degré strictement inférieur à n, il appartient à F_{n-1} et est donc orthogonal à P_n.

Question II.2.c Les deux questions précédentes montrent que Q_n est de degré au moins n et donc que P possède au moins n racines distinctes dans $]a,b[$ de multiplicité impaire. Comme il possède au plus n racines complexes, c'est donc qu'il possède exactement n racines distinctes dans $]a,b[$, qu'elles sont donc de multiplicité exactement 1 et forment l'ensemble de toutes les racines complexes de P, i.e. P est simplement scindé et ses racines appartiennent à $]a,b[$.

Question II.3.a Pour tout entier n la fonction $t \mapsto t^n\omega(t)$ est continue sur $[0;+\infty[$ et y est donc localement intégrable. Comme de plus on a

$$t^ne^{-t} = o(t^{-2})$$

au voisinage de l'infini, les fonctions $t \mapsto t^n\omega(t)$ sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$ et donc, d'après la question I.1.b, F est inclus dans E.

Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété H_n suivante

$$(H_n) \qquad \int_0^{+\infty} t^ne^{-t}dt = n!\ .$$

On a en effet

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{X\to+\infty}(1-e^{-X}) = 1 = 0!$$

et donc H_0 est vraie.

Soit maintenant n un entier naturel. On a

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}dt = \lim_{X\to+\infty}\left(-X^{n+1}e^{-X} + (n+1)\int_0^X t^ne^{-t}dt\right) = (n+1)\int_0^{+\infty} t^ne^{-t}dt$$

et donc la propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence elle est donc vraie pour tout entier naturel.

Question II.3.b On a

1. $G_0 = 1/||1||_\omega = 1$.
2. $\langle t, G_0\rangle = 1$,

   $$||t-G_0||_\omega^2 = \int_0^{+\infty}(t-1)^2e{-t} = 2! - 2.1! + 0! = 1$$

   et donc

   $$G_1 = \frac{t-G_0}{||t-G_0||_\omega} = t-1\ .$$

3. $\langle t^2, G_0\rangle_\omega = 2$, $\langle t^2, G_1\rangle_\omega = 3! - 2! = 4$ et

$$||t^2 - 4G_1 - 2G_0||_\omega^2 = \int_0^{+\infty}(t^2-4t+2)^2e^{-t}dt = \int_0^{+\infty}(t^4-8t^3+20t^2-16t+4)e^{-t} = 24 - 8.6 + 20.2 - 16 + 4 = 4$$

et donc

$$G_2 = \frac{t^2 - 4G_1 - 2G_0}{||t^2 - 4G_1 - 2G_0||_\omega} = \frac{t^2}{2} - 2t + 1\ .$$

Par conséquent les racines de G_2 sont $2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$.

Partie III

Question III.1.a L'application considérée est bien définie, symétrique par commutativité de la multiplication dans $\mathbf{R}_{q-1}[X]$, linéaire par rapport à la première variable par linéarité de la somme.

Si P est un polynôme dans $\mathbf{R}_{q-1}[X]$, $\langle P, P\rangle$ est positif en tant que somme de carrés et n'est nul que si P s'annule en tous les x_i pour $1 \leq i \leq q$. Comme un polynôme non nul ne saurait avoir plus de racines que son degré, $\langle P, P\rangle$ n'est nul que si P l'est. Par conséquent l'application considérée est définie positive et est donc un produit scalaire.

Soit i et j deux entiers distincts entre 1 et n. Puisque le polynôme $t - x_i$ divise l_j, x_i est une racine de l_j. Par ailleurs

$$l_j(x_j) = \prod_{\substack{1\leq i\leq q\\ i\neq j}} \frac{x_j - x_i}{x_j - x_i} = 1$$

et donc, pour tout polynôme P dans $\mathbf{R}_{q-1}[X]$, on a

$$\langle l_j, P\rangle = P(x_j)$$

et donc $(l_j)_{1\leq j\leq q}$ est une famille orthonormale dans $\mathbf{R}_{q-1}[X]$. Elle est en particulier libre et, par cardinalité, est donc une base de cet espace, i.e. c'est une base orthonormale de $\mathbf{R}_{q-1}[X]$.

Question III.1.b Pour tout P dans $\mathbf{R}_{q-1}[X]$, puisque $(l_j)_{1\leq j\leq q}$ est une base orthonormale, on a

$$P = \sum_{j=1}^{q}\langle l_j, P\rangle l_j = \sum_{j=1}^{q} P(x_j) l_j\ ,$$

i.e. les coordonnées de P sont $(P(x_j)_{1\leq j\leq q}$.

Question III.1.c D'après la question précédente, on a donc un isomorphisme entre $\mathbf{R}_{q-1}[X]$ et $\mathbf{R}^q$ donnée par l'application qui à un polynôme P associe ses coordonnées dans la base $(l_j)_{1\leq j\leq q}$, i.e. $P \mapsto (P(x_j))_{1\leq j\leq q}$. En particulier il existe un unique polynôme de $\mathbf{R}_{q-1}[X]$ tel que, pour tout entier i entre 1 et q, on ait $P(x_i) = y_i$, c'est le polynôme

$$P = \sum_{i=1}^{q} y_i l_i\ .$$

Soit maintenant Q un polynôme quelconque. On a

$$\begin{aligned}
\forall i \in [1;q] \quad Q(x_i) = y_i \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i\in[1;q] \quad \left(Q - \sum_{i=1}^{q} y_i l_i\right)(x_i) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \forall i\in[1;q] \quad (X - x_i) \mid \left(Q - \sum_{i=1}^{q} y_i l_i\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \prod_{1\leq i\leq q}(X - x_i) \mid \left(Q - \sum_{i=1}^{q} y_i l_i\right)
\end{aligned}$$

d'après le lemme d'Euclide.

Par conséquent les polynômes prenant les valeurs y_i en tous les x_i sont exactement les polynômes de la forme

$$\sum_{i=1}^{q} y_i l_i + R. \prod_{1\leq i\leq q} (X - x_i)$$

avec R un polynôme quelconque dans $\mathbf{R}[X]$.

Question III.1.d On a donc

$$\forall f \in C^0(I) \qquad \Lambda(f) = \sum_{j=1}^{q} f(x_j) l_j \ .$$

Soit maintenant f et g dans $C^0(I)$ et α et β des scalaires. On a

$$\Lambda(\alpha f + \beta g) = \sum_{j=1}^{q} (\alpha f(x_j) + \beta g(x_j)) l_j = \alpha\Lambda(f) + \beta\Lambda(g)$$

et donc Λ est linéaire. Sa restriction à $\mathbf{R}_{q-1}[X]$ est l'identité d'après III.1.b et donc Λ est en particulier surjective.

Prenons t dans I, on a

$$\begin{aligned} |\Lambda(f)(t)| &= \left|\sum_{j=1}^{q} f(x_j).l_j(t)\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{q} |f(x_j).l_j(t)| \\ &\leq \left(\max_{1\leq j\leq q} |f(x_j)|\right) \sum_{j=1}^{q} |l_j(t)| \ . \end{aligned}$$

Comme χ est somme de composées de fonctions continues sur $\mathbf{R}$, elle est continue sur $\mathbf{R}$ et donc a fortiori sur I. Il vient

$$||\Lambda(f)||_\infty \leq \left(\max_{1\leq j\leq q} |f(x_j)|\right) ||\chi||_\infty \leq ||f||_\infty.||\chi||_\infty \ .$$

Il en résulte que Λ est continue de norme inférieure à $||\chi||_\infty$.

Comme χ est continue, il existe un réel t_0 dans I tel sur $|\chi|$ atteigne son maximum en t_0.

Quitte à réindexer la famille, on peut supposer $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_q$. Soit I_0 l'intervalle $I\cap]-\infty; x_1]$, I_{q+1} l'intervalle $I \cap [x_q; +\infty[$ et pour tout entier j entre 1 et q, I_j l'intervalle $[x_j; x_{j+1}]$ Soit maintenant f une fonction affine sur chacun des intervalles I_k pour $0 \leq k \leq q+1$, constante sur I_0 et I_{q+1} et valant $+1$ ou -1 en tout x_j selon que $l_j(t_0)$ est strictement positif ou non. En particulier $f(x_j)l_j(t_0)$ est une quantité positive pour tout entier j entre 1 et q, $|f|$ atteint son maximum en tous les x_j et y vaut 1 et il vient

$$|\Lambda(f)(t_0)| = ||f||_\infty \chi(t_0) = ||f||_\infty ||\chi||_\infty$$

et donc $|||\Lambda||| \geq ||\chi||_\infty$.

Par conséquent Λ est une application linéaire surjective continue de norme $||\chi||_\infty$.

Question III.2 Soit ψ l'application de $\mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{R}^m$ qui à un polynôme P associe

$$\left(P(x_1), \ldots, P^{(\alpha_1)}(x_1), \ldots, P(x_q), \ldots, P^{(\alpha_q)}(x_q)\right) \ .$$

C'est une application linéaire par linéarité de la dérivation et de l'évaluation en un point. Soit P un élément de son noyau et de degré au plus $m-1$. Pour tout entier j entre 1 et q, x_j est racine de P avec une multiplicité au moins égale à $\alpha_j + 1$

et donc, par le lemme d'Euclide, $\prod_{1\leq j\leq q}(X-x_j)^{\alpha_j+1}$ divise P. Comme le degré de ce dernier polynôme est m, P ne peut donc être que le polynôme nul, i.e. ψ est injective de $\mathbf{R}_{m-1}[X]$ dans $\mathbf{R}^m$. Par dimension c'est donc un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels et l'existence et l'unicité du polynôme interpolateur d'Hermite de f en découle.

Question III.3.a Pour tout réel μ, $H+\mu p$ est un polynôme de degré au plus m puisque p est de degré m et H de degré au plus $m-1$. De plus, avec les notations de la question précédente, p est dans le noyau de ψ, aussi $H+\mu p$ est H_x si et seulement si $(H+\mu p)(x)=f(x)$, i.e., puisque x est distinct de x_1, …, x_q et n'est donc pas racine de p,

$$H+\mu p = H_x \Leftrightarrow \mu = \frac{f(x)-H(x)}{p(x)} \ .$$

Par conséquent $\mu=(f(x)-H(x))/p(x)$ est un réel tel que $H_x=H+\mu p$.

Question III.3.b Soit k un entier naturel non nul et P_k l'assertion suivante : pour tout intervalle J de $\mathbf{R}$, pour tout entier q entre 1 et k, pour tout q-uplet $(x_1,\ldots,x_q)$ d'éléments distincts de J, pour tout q-uplet d'entiers naturels $(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)$ tel que $(\alpha_1+1)+\ldots+(\alpha_q+1)=k+1$, pour toute fonction f de classe C^k sur J telle que

$$\forall j\in[1;q] \quad f(x_j)=\ldots=f^{(\alpha_j)}(x_j)=0$$

la dérivée d'ordre k de f s'annule sur J.

Pour k égal à 1, soit $q=1$ et alors $\alpha_1=1$ et donc f' s'annule en x_1, soit $q=2$ et alors $\alpha_1=\alpha_2=0$ et le théorème de Rolle montre que f' s'annule entre x_1 et x_2.

Soit maintenant k un entier strictement supérieur à 1 et des données comme dans l'énoncé de P_k. Si q vaut 1, α_1 vaut k et x_1 est un zéro de $f^{(k)}$. Sinon, d'après le théorème de Rolle, f' admet $q-1$ zéros, chacun se trouvant entre deux zéros consécutifs de f parmi x_1, …, x_q. Remarquons que f' admet également des zéros en les x_i pour lesquels α_i est strictement positif, et il en est de même des dérivées de f' jusqu'à l'ordre α_i-1, de sorte que la somme des multiplicités des zéros ainsi dénombrée vaut

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_q+(q-1)\times 1 = k$$

et, en supposant la validité de P_{k-1} et puisque f' est de classe C^{k-1} sur J, la dérivée d'ordre $k-1$ de f' admet donc un zéro sur J. Autrement dit la propriété P_k est héréditaire.

Le principe de récurrence assure donc que P_k est vraie pour tout entier naturel non nul. On l'applique pour $k=m$ avec comme données J_x, $q+1$, $(x_1,\ldots,x_q,x)$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_q,0)$ et Φ.

Il en résulte que $\Phi^{(m)}$ s'annule sur J_x.

Question III.3.c Comme H est de degré $m-1$ au plus, sa dérivée d'ordre m est nulle. Quant à p c'est un polynôme unitaire de degré m et donc sa dérivée d'ordre m est constante égale à $m!$. Par conséquent $\Phi^{(m)}$ est égale à $f^{(m)}-\mu m!$ et donc $\mu=f^{(m)}(\xi)/m!$.

En reportant dans l'expression obtenue en III.3.a, on a donc

$$\frac{f(x)-H(x)}{p(x)}=\mu=\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

ou encore

$$f(x)-H(x)=\frac{p(x)}{m!}f^{(m)}(\xi) \ .$$

Question III.3.d Si x est l'un des x_i, c'est un zéro de f, H et p et donc la formule précédente s'écrit $0=0$, ce qui est vrai.

Partie IV

Question IV.1.a On utilise la question III.1.c pour $q=n$, $x_i=r_i$ et $y_i=Q(r_i)$ pour tout entier i entre 1 et n, et en remarquant que P_n est un multiple non nul de $\prod_{1\leq j\leq n}(X-r_i)$. Ainsi la réponse fournie à cette question montre que Q est de la forme $\sum_{1\leq i\leq n}Q(r_i)l_i+S(X)\prod_{1\leq i\leq n}(X-r_i)$ avec S dans $\mathbf{R}[X]$, soit encore

$$Q=RP_n+\sum_{1\leq i\leq n}Q(r_i)l_i$$

pour R dans $\mathbf{R}[X]$. Comme Q est de degré au plus $2n-1$ et les l_i de degré $n-1$, RP_n est de degré au plus $2n-1$. Comme P est de degré n, R est donc de degré au plus $n-1$, comme il était demandé.

Question IV.1.b Puisque R est de degré au plus $n-1$, il est combinaison linéaire des polynômes P_k pour k entier entre 0 et $n-1$. Par conséquent il est orthogonal à P_n (dans E). Posons $\lambda_j = \langle l_j, 1\rangle_\omega$ pour tout entier j entre 1 et q, on a

$$\int_a^b Q(t)\omega(t)dt = \langle Q, 1\rangle_\omega = \langle R, P_n\rangle_\omega + \sum_{j=1}^n Q(r_j)\langle l_j, 1\rangle_\omega = \sum_{j=1}^n \lambda_j Q(r_j) .$$

Question IV.1.c Supposons la formule (1) de la question précédente vraie pour un certain n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et pour tout Q dans $\mathbf{R}_{2n-1}[X]$. Soit i un entier entre 1 et n. En prenant $Q = l_i$, on obtient

$$\langle l_i, 1\rangle_\omega = \lambda_i$$

et en prenant $Q = l_i^2$ (ce qui est licite puisque l_i est de degré $n-1$ et donc l_i^2 est de degré inférieur à $2n-1$), on obtient également

$$||l_i||_\omega^2 = \lambda_i .$$

Il en résulte que les λ_i, pour i entier entre 1 et n, trouvés à la question précédente sont les seuls à vérifier la propriété précédente et qu'ils sont strictement positifs, en tant que norme d'éléments non nuls de E.

Question IV.1.d Pour $Q = P_n$ la relation (1) s'écrirait

$$||P_n||_\omega^2 = 0$$

puisque les r_i sont les racines de P_n. Par conséquent, puisque P_n est non nul, la relation (1) n'est pas vraie pour tout polynôme de $\mathbf{R}_{2n}[X]$.

Question IV.2.a Avec les notations de la question III.3, on a $p = (P_n/a_n)^2$ et l'assertion est juste une reformulation du résultat de la question III.3.d puisque $m = 2n$ dans ce contexte et J_x est inclus dans $]a;b[$ d'après II.2.c.

Question IV.2.b En tant que quotient de fonctions continues, k est continue partout où elle est définie, i.e. k est continue sur $]a;b[$ sauf en $r_1, \ldots, r_n$.

Soit j un entier entre 1 et n. Au voisinage de r_j, la formule de Taylor montre que $f-H$ est égale à $(f-H)''(r_j)(t-r_j)^2/2 + o((t-r_j)^2)$ tandis que P_n est équivalente à $(t-r_j)P_n'(r_j)$, puisque r_j est racine simple de P_n. Par conséquent k s'écrit

$$k(t) = (2n)!a_n^2 \frac{(f-H)''(r_j)}{2P_n'(r_j)^2} + o(1) ,$$

i.e. k est prolongeable par continuité en r_j et donc, finalement, k est prolongeable par continuité sur $]a,b[$.

Question IV.2.c On a $kP_n^2 = (2n)!a_n^2(f-H)$ et donc, puisque f appartient à E et H à F et donc à E, kP_n^2 appartient à E, ce qui est l'assertion demandée.

Question IV.2.d Remarquons que β est une quantité finie. Par conséquent si l'infimum de k sur $]a,b[$ est $-\infty$, on a $\inf_{x\in]a;b[} k(x) < \beta$. Sinon notons m cet infimum. La fontion $(k-m)P_n^2\omega$ est alors une fonction continue et positive sur $]a;b[$. Comme $P_n^2\omega$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points (les racines de P_n), $(k-m)P_n^2\omega$ n'est identiquement nulle que si $k-m$ s'annule en tout point de $]a,b[$, sauf peut-être un nombre fini. Par continuité ceci n'est possible que si $k-m$ est nulle identiquement, i.e. k est constante.

Pour les mêmes raisons si le supremum de k sur $]a,b[$ est $+\infty$, il est strictement supérieur à β et sinon, en le notant M, la fonction $(M-k)P_n^2\omega$ est continue et positive sur $]a;b[$ et n'y est identiquement nulle que si k est constante.

Par conséquent si k n'est pas constante

$$\inf_{x\in]a;b[} k(x) < \beta < \sup_{x\in]a;b[} k(x) .$$

Question IV.2.e Par continuité de k et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de $]a;b[$ par k est un intervalle et, en particulier, c'est un intervalle contenant $]\inf_{x\in]a;b[} k(x);\sup_{x\in]a;b[} k(x)[$. L'existence de ζ dans $]a;b[$ vérifiant $k(\zeta)=\beta$ résulte donc de la question précédente.

Question IV.2.f Par définition de k, on a $f = H + kP_n^2/(a_n^2(2n)!)$ et donc, en utilisant IV.1.b, la définition de H, celle de β et la question précédente,

$$\langle f,1\rangle_\omega = \langle H,1\rangle_\omega + \frac{1}{(2n)!a_n^2}\langle kP_n^2,1\rangle_\omega = \sum_{k=1}^n \lambda_k H(r_k) + \frac{1}{(2n)!a_n^2}\beta||P_n||_\omega^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(r_k) + \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!a_n^2}||P_n||_\omega^2 \ .$$

Question IV.3.a En appliquant le résultat de la question III.1.b au polynôme 1, on obtient

$$1 = \sum_{k=1}^n l_{n,k}$$

et en appliquant la formule du IV.1.b à $Q=1$ on a

$$\int_a^b \omega(t)dt = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} \ .$$

Question IV.3.b Soit g une fonction continue sur $[a;b]$, on a

$$E_n(g) \leq \int_a^b |g(t)|\omega(t)dt + \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k}|g(r_{n,k})| \leq ||g||_\infty \left(\int_a^b \omega(t)dt + \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k}\right) = 2||g||_\infty \int_a^b \omega(t)dt \ .$$

L'assertion en découle en applicant ce fait $g = f-p$ puisque $||f-p||_\infty \leq \varepsilon$:

$$E_n(f-p) \leq 2||f-p||_\infty \int_a^b \omega(t)dt \leq 2\varepsilon \int_a^b \omega(t)dt \ .$$

Notons d'une part que, d'après IV.1.b, si $2n$ est strictement supérieur au degré de p, alors $E_n(p)=0$ et, d'autre part, $E_n(f) \leq E_n(f-p)+E_n(p)$ d'après l'inégalité triangulaire.

Supposons n strictement supérieur à ν. Il est donc supérieur ou égal à $(deg(p)+1)/2$ et donc $2n$ est strictement supérieur au degré de p.

Par conséquent la question précédente montre

$$E_n(f) \leq E_n(f-p)+E_n(p) = E_n(f-p) \leq 2\varepsilon \int_a^b \omega(t)dt \ .$$

Question IV.3.c Comme $\int_a^b \omega(t)dt$ est une quantité finie (positive) et $E_n(f)$ une suite à termes positifs, la question précédente montre qu'elle tend vers 0, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)\omega(t)dt - \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} f(r_{n,k})\right) = 0 \ .$$

Question IV.4.a Remarquons que la fonction ψ est prolongeable par continuité en 0, puisqu'elle y est développable en série entière. Par conséquent la fonction $t \mapsto t^m\psi(t)e^{-xt}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ en tant que produit de telles fonctions. Elle y est en particulier localement intégrable. Comme c'est un $o(t^{-2})$ en $+\infty$ par comparaison des croissances et le fait que $\sin$ est bornée sur $\mathbf{R}$, elle est également intégrable au voisinage de $+\infty$, i.e. c'est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. Elle est même en fait absolument intégrable sur cet intervalle.

Question IV.4.b Soit t un réel. La formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$, $x \mapsto e^{-xt}$, montre que, pour tout réel h, il existe θ dans $]0;1[$ tel que

$$e^{-(x+h)t} = e^{-xt} - hte^{-xt} + \frac{h^2}{2}t^2e^{-(x+\theta h)t}\ .$$

Si maintenant h est inférieur à $x/2$, on a de plus $x+\theta h > x/2$ et donc, si t est de surcroît positif, $-(x+\theta h)t < -xt/2$ et il en résulte

$$\forall t \in \mathbf{R}_+ \quad \forall h \in \mathbf{R} \qquad 0 < |h| \leq \frac{x}{2} \Rightarrow \left|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}\right| \leq \frac{h^2}{2}t^2e^{-xt/2}\ .$$

Soit donc t et h deux réels vérifiant $t > 0$ et $0 < |h| \leq x/2$, on a

$$\left|\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h}\psi(t) + te^{-xt}\psi(t)\right| \leq \frac{|h|}{2}t^2|\psi(t)|e^{-xt/2}$$

et donc, pour tout réel strictement positif X, on a, par intégration,

$$\int_0^X \left|\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h}\psi(t) + te^{-xt}\psi(t)\right| dt \leq \frac{|h|}{2}\int_0^X t^2|\psi(t)|e^{-xt/2}$$

et, a fortiori, par absolue intégrabilité de $t \mapsto t^2\psi(t)e^{-xt}$,

$$\left|\int_0^X \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h}\psi(t) + te^{-xt}\psi(t)dt\right| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|\psi(t)|e^{-xt/2}\ .$$

Puisque Ψ est définie en x et $x+h$ et puisque $t \mapsto te^{-xt}\psi(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$, il en résulte

$$\left|\frac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} + \int_0^{+\infty} te^{-xt}\psi(t)dt\right| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|\psi(t)|e^{-xt/2}$$

et donc

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} + \int_0^{+\infty} te^{-xt}\psi(t)dt\right) = 0$$

i.e. Ψ est dérivable en x et on a

$$\Psi'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-xt}\psi(t)dt\ .$$

Question IV.4.c Soit x un réel strictement positif. On a

$$\Psi'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt\ .$$

Or, pour tout réel positif X, on a, par intégrations par parties successives,

$$-\int_0^X \sin(t)e^{-xt}dt = \cos(X)e^{-xX} - 1 + x\sin(X)e^{-xX} + x^2\int_0^X \sin(t)e^{-xt}dt$$

et donc, en faisant tendre X vers $+\infty$,

$$\Psi'(x) = -1 - x^2\Psi'(x)$$

soit

$$\Psi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\ .$$

Question IV.4.d Soit x un réel strictement positif ; on a, puisque sin est majorée par l'identité sur $\mathbf{R}_+$,

$$|\Psi(x)| \leq \sup_{t>0} |\psi(t)| \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \leq \frac{1}{x}$$

et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \Psi(x) = 0 \, .$$

Question IV.4.e Soit x un réel strictement positif, il résulte des deux questions précédentes que Ψ' est une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc

$$\Psi(x) = \lim_{X \to +\infty} (\Psi(x) - \Psi(X)) = \lim_{X \to +\infty} \int_x^X -\Psi'(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \, .$$

En particulier

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-t} dt = \Psi(1) = \frac{\pi}{4} \, .$$

Question IV.4.f D'après la question II.3.b, on a, par exemple, $r_1 = 2 - \sqrt{2}$ et $r_2 = 2 + \sqrt{2}$ et donc $l_1(t) = (2 + \sqrt{2} - t)/2\sqrt{2}$. Il résulte des questions IV.1.c et IV.3.a

$$\lambda_1 = \int_0^{+\infty} l_1(t) e^{-t} dt = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt - \lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \, .$$

Afin de minimiser les erreurs de calcul, il est préférable d'écrire

$$\lambda_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

et on obtient donc, sur un Ti-89,

$$\lambda_1 \simeq 0.853553390593 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 \simeq 0.146446609407 \, .$$

On a également

$$\psi(r_1) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \sin(2-\sqrt{2}) \qquad \text{et} \qquad \psi(r_2) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \sin(2+\sqrt{2}) \, ,$$

soit, toujours sur un Ti-89,

$$\psi(r_1) \simeq 0.943782304509 \qquad \text{et} \qquad \psi(r_2) \simeq -0.078863395149 \, .$$

On en déduit

$$\frac{\pi}{4} \simeq \lambda_1 \psi(r_1) + \lambda_2 \psi(r_2) = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \sin(2-\sqrt{2}) + \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \sin(2+\sqrt{2}) \simeq 0.794019309170 \, .$$

Sur un Ti-89, on a

$$\frac{\pi}{4} \simeq 0.785398163397$$

et on peut donc penser qu'on a obtenu une précision de 10^{-2}.

Il est à noter que la question IV.2.f ne donne rien puisque $\psi^{(4)}$ n'est pas bornée sur $\mathbf{R}_+^*$. Cela dit la précision obtenue, qui n'est guère excellente, n'est pas une surprise puisqu'on calcule une intégrale oscillante.

La valeur trouvée pour $n = 1$ est $\sin(1)$, i.e. 0.84 ce qui donne une précision de l'ordre de 10^{-1}.