

# Deuxième épreuve CAPES externe 2000

François Sauvageot

Premier février 2000

## Partie I

### Question I.1.a

Puisque les points  $A, B, C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires, ils engendrent l'espace affine et, par cardinalité, en sont donc un repère. Par conséquent leur nombre est effectivement 4, i.e. ils sont tous distincts.

L'ordre de  $\Sigma$  est  $4!$ , soit 24.

### Question I.1.b

$\tau^2$  et  $\sigma^3$  sont triviales,  $\tau\sigma$  est le 4-cycle  $(ABCD)$  et donc  $(\tau\sigma)^4$  est également triviale; les cinq autres éléments sont les conjugués de  $\tau$  par  $\sigma, \sigma^{-1}, \tau\sigma, \tau\sigma^2$  et  $(\tau\sigma)^2$  et on obtient immédiatement  $\sigma\tau\sigma^2 = (AC)$ ,  $\sigma^2\tau\sigma = (AD)$ ,  $\tau\sigma\tau\sigma^2\tau = (BC)$ ,  $\tau\sigma^2\tau\sigma\tau = (BD)$ ,  $\tau\sigma\tau\sigma^2\tau\sigma = (CD)$ .

### Question I.1.c

Comme  $\Sigma$  est engendré par les transpositions et que, d'après la question précédente, les transpositions sont engendrées par  $\tau$  et  $\sigma$ , ces deux derniers éléments engendrent  $\Sigma$ .

### Question I.1.d

D'après ce qui précède, il suffit de vérifier la propriété demandée pour  $\rho$  égal soit à  $\sigma$  soit à  $\tau$ . Pour  $\sigma$ , puisque le déterminant est alterné, on a

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \det(\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AB}) \quad \text{et donc} \quad \text{vol}(A, B, C, D) = \text{vol}(A, C, D, B).$$

Comme le déterminant est antisymétrique et que la relation de Chasle fournit  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$  et  $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$ , on obtient

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \det(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{BD}) = -\det(\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}) \quad \text{et donc} \quad \text{vol}(A, B, C, D) = \text{vol}(B, A, C, D).$$

L'assertion suit.

### Question I.1.e

Le tétraèdre étant l'enveloppe convexe des quatre points  $A, B, C$  et  $D$ , il ne dépend pas de l'ordre choisi pour écrire ces points. Par conséquent le volume de ce tétraèdre non plus et la propriété précédente s'en déduit.

### Question I.2

Il faut ici remarquer que  $A, B, C$  et  $D$  sont affinement indépendants, comme on l'a souligné en I.1.a, trois d'entre eux engendrent un unique plan et deux d'entre eux une unique droite. En particulier le plan  $(BCD)$  a bien un sens.

On applique la définition de  $V$  en choisissant l'ordre  $V = \text{vol}(B, A, C, D)$ . Comme  $\vec{BA} = \vec{BH}_A + \vec{H}_A\vec{A}$  et comme  $H_A$  est coplanaire à  $B, C$  et  $D$  (et donc  $\vec{BH}_A, \vec{BC}$  et  $\vec{BD}$  sont liés), il vient d'après les propriétés du déterminant,

$$V = \frac{1}{6} \left| \det(\vec{BH}_A, \vec{BC}, \vec{BD}) + \det(\vec{H}_A\vec{A}, \vec{BC}, \vec{BD}) \right| = \frac{1}{6} \left| \det(\vec{H}_A\vec{A}, \vec{BC}, \vec{BD}) \right|$$

et, puisque  $\overrightarrow{AH_A}$  est orthogonal au plan  $(BCD)$ , il vient

$$V = \frac{1}{6} AH_A \left| \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \right| = \frac{1}{3} AH_A \text{ aire}(B, C, D).$$

### Question I.3

Soit  $h$  l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $1 - \lambda$ . Elle envoie donc  $H_A$  sur  $L$  et, par conséquent, le plan  $(BCD)$  sur un plan parallèle passant par  $L$ , i.e.  $P$  puisque  $(BCD)$  et  $P$  sont perpendiculaires à  $(AH_A)$ . Comme  $A$  est fixe par  $h$ , les droites passant par  $A$  le sont aussi et, par conséquent, les droites  $(AB)$ ,  $(AC)$  et  $(AD)$  coupent le plan  $P$  en les images respectives de leurs points d'intersection avec le plan  $(BCD)$ , i.e.  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Ces points appartiennent donc aux segments  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[AD]$  et même il en résulte que  $S_B$ ,  $S_C$  et  $S_D$  sont barycentres de  $A$  affecté de la masse  $\lambda$  et de  $B$ ,  $C$  ou  $D$  avec la masse  $1 - \lambda$ .

#### Question I.3.a

On a donc  $\nu_1 = (1 - \lambda)^3 V$  et donc  $\lambda_1 = 1/2$ .

#### Question I.3.b

Il vient également  $\nu_2 = V - \nu_1$  et donc  $\lambda_2 = 1 - \sqrt{7}/2$ .

#### Question I.4.a

Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  ne sont pas coplanaires et donc non parallèles. Leurs directions engendrent donc un plan. Par conséquent il existe une unique direction de droite orthogonale aux directions de  $(AB)$  et  $(CD)$ . Soit  $\overrightarrow{d}$  cette direction.

Soit  $P_1$  et  $P_2$  les plans passant par  $A$  et  $C$  respectivement, de direction les plans vectoriels engendrés par  $\overrightarrow{d}$  et par, respectivement,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$ . Ces plans sont bien définis puisque  $\overrightarrow{d}$  étant orthogonale à ces deux vecteurs, ne sauraient les contenir.

En dimension 3, deux plans se coupent selon une droite ou sont parallèles ou confondus. Dans ce dernier cas leurs directions sont en particulier égales. Or l'intersection des directions de  $P_1$  et  $P_2$  est  $\overrightarrow{d}$ . Il en résulte que  $P_1$  et  $P_2$  se coupent selon une droite  $\Delta$  de direction  $\overrightarrow{d}$  orthogonale aux directions de  $(AB)$  et  $(CD)$ . Et en particulier  $\Delta$  n'est pas parallèle à ces deux droites. Mais comme elle appartient à  $P_1$  et  $P_2$ , elle leur est coplanaire et il en résulte qu'elle les coupe en d'unique points  $I$  et  $J$ . Les points  $I$  et  $J$  vérifient donc les hypothèses de l'énoncé.

Réciproquement si deux points  $I'$  et  $J'$  appartenant respectivement à  $(AB)$  et  $(CD)$  sont tels que  $(I'J')$  est perpendiculaire à  $(AB)$  et à  $(CD)$ , alors la direction de  $(I'J')$  est nécessairement  $\overrightarrow{d}$  et donc  $(ABJ')$  est le plan  $P_1$  et  $(CDI')$  est le plan  $P_2$ . Par conséquent  $(I'J')$  est la droite d'intersection de  $P_1$  et  $P_2$  et donc  $I = I'$  et  $J = J'$ , i.e. les points  $I$  et  $J$  ayant les propriétés de l'énoncé sont uniques.

#### Question I.4.b

Notons  $Q'$  le plan passant par  $J$  parallèle à  $Q$  ou encore le plan contenant  $(CD)$  et la parallèle à  $(AB)$  passant par  $J$ . Notons  $A'$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $Q'$ , de sorte que  $(AA')$  est parallèle à  $(IJ)$ . Comme  $(AB)$  est parallèle à  $Q'$ , elle est projetée sur  $Q'$  en une droite parallèle. Autrement dit si  $J$  (qui est le projeté de  $I$ , appartenant à  $(AB)$ ) est distinct de  $A'$ , la droite  $(JA')$  est parallèle à  $(AB)$ .

Soit maintenant  $h$  l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $1 - \mu$ . Soit  $M'$  l'image de  $A'$  par  $h$ . Si  $A = I$  (ce qui est la même chose que  $J = A'$ ) on a  $M' = M$  et donc  $h(Q') = Q$  puisque  $h(Q')$  est le plan parallèle à  $Q'$  passant par  $M'$ .

Si  $A$  et  $I$  sont distincts, fixons une orientation des droites parallèles  $(AA')$  et  $(IJ)$ . On a

$$\frac{\overline{AM'}}{\overline{AA'}} = 1 - \mu = \frac{\overline{IM}}{\overline{IJ}}$$

et donc, par la réciproque du théorème de Thalès, la droite  $(MM')$  est parallèle à la droite  $(JA')$  et donc à  $(AB)$ . En particulier  $M'$  appartient à  $Q$  puisque ce dernier contient la parallèle à  $(AB)$  passant par  $M$ . Il vient comme dans le cas précédent  $h(Q') = Q$ .

Il en résulte que  $Q$  coupe  $(AC)$  et  $(AD)$  en  $h(C)$  et  $h(D)$  et donc en des points des segments  $[AC]$  et  $[AD]$ . Notons qu'en particulier  $(U_{AC}U_{AD})$  est  $h((CD))$  et est donc une droite parallèle à  $(CD)$ .

Appliquons ce qui précède au quadruplet de points  $B, A, C$  et  $D$ . Les points  $I$  et  $J$  sont inchangés et le résultat que l'on vient de démontrer entraîne que  $Q$  coupe  $(BC)$  et  $(BD)$  en des points de  $[BC]$  et  $[BD]$ . De plus  $(U_{BC}U_{BD})$  est parallèle à  $(CD)$ .

Il résulte de ces considérations que  $(U_{AC}U_{AD})$  et  $(U_{BC}U_{BD})$  sont parallèles (en tant qu'homothétiques de  $(CD)$  par des homothéties de centre  $A$  ou  $B$  et de rapport  $1 - \mu$ ).

Appliquons finalement tout ce qui vient d'être démontré au quadruplet de points  $C, D, A$  et  $B$  pour le réel  $1 - \mu$ . Les points  $J$  et  $I$  sont échangés mais  $M$  est inchangé. Par conséquent  $(U_{AC}U_{BC})$  et  $(U_{AD}U_{BD})$  sont parallèles à  $(AB)$  (en tant qu'homothétiques de cette droites par des homothéties de centre  $C$  ou  $D$  et de rapport  $\mu$ ).

Ainsi  $(U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC})$  est un parallélogramme.

#### Question I.4.c

#### Question I.4.d

L'aire d'un parallélogramme  $(XYZT)$  est donnée par  $|\det(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XT})|$ . Comme  $U_{AC}U_{AD} = (1 - \mu) \overrightarrow{CD}$  et  $U_{AC}U_{BC} = \mu \overrightarrow{AB}$ , il vient

$$\text{aire}(U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}) = \mu(1 - \mu)W.$$

#### Question I.4.e

On introduit de nouveau le point  $A'$  et le plan  $Q'$  de la question I.4.b. On a  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{IJ}$ . De plus, comme  $A'$  appartient à  $Q'$ ,  $\overrightarrow{A'C}$  est combinaison linéaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$ .

On part de la formule  $V = \text{vol}(A, B, C, D)$  et on utilise  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}$ , les propriétés du déterminant permettent d'écrire

$$V = \frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right| = \frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) \right| = \frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{CD}) \right|$$

et donc, puisque  $\vec{AA'} = \vec{IJ}$  est orthogonal à  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  il vient

$$V = \frac{1}{6} IJ \left| \det(\vec{AB}, \vec{CD}) \right| = \frac{1}{6} IJ.W .$$

**Question I.4.f**

Soit  $(J; x, y, z)$  un repère orthonormé de l'espace tel que  $\vec{JI}$  dirige positivement l'axe  $(Jz)$ . Le plan  $(Jxy)$  est alors le plan  $Q'$  introduit en I.4.b. Le plan  $Q$  est le plan d'équation  $z = \mu IJ$ .

Pour un réel  $h$  quelconque, notons  $T_h$  l'intersection de  $T$  avec le plan d'équation  $z = h$ . De la sorte  $T_0$  est le segment  $[CD]$ ,  $T_{IJ}$  est le segment  $[AB]$ ,  $T_{\mu IJ}$  est le parallélogramme plein  $(U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC})$ .

Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\nu_3 = \int_0^{\mu IJ} \text{aire}(T_h) dh$$

soit

$$\nu_3 = \int_0^{\mu} IJ \cdot \text{aire}(T_{\lambda IJ}) d\lambda$$

et donc, d'après les questions I.4.d et I.4.f,

$$\nu_3 = \int_0^{\mu} IJ \cdot \lambda(1 - \lambda)W d\lambda = 6V \int_0^{\mu} \lambda(1 - \lambda) d\lambda = V(3\mu^2 - 2\mu^3)$$

et donc

$$\nu_3 = \frac{V}{8} \Leftrightarrow 2\mu^3 - 3\mu^2 + \frac{1}{8} = 0 .$$

Il en résulte que la fonction polynomiale  $f, x \mapsto 2x^3 - 3x^2$ , a la propriété recherchée. Si  $g$  est un autre telle fonction on a

$$\forall x \in ]0; 1[ \quad f(x) + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow g(x) + \frac{1}{8} = 0$$

et donc  $g + \frac{1}{8}$  a les mêmes racines que  $f + \frac{1}{8}$  dans  $]0; 1[$ . Si  $f + \frac{1}{8}$  avait trois racines dans  $]0; 1[$ , le degré de  $g$  imposerait que  $f + \frac{1}{8}$  et  $g + \frac{1}{8}$  soient proportionnels. Comme ils auraient même terme constant, ils seraient égaux, i.e.  $f = g$ . Mais voilà ce n'est pas le cas! **L'énoncé est donc idiot!**

En effet, une fois que l'existence et l'unicité de  $\mu_0$  sera acquise, tout polynôme de la forme  $-\frac{1}{8\mu_0 c}(x - \mu_0)(ax^2 + bx + c) - \frac{1}{8}$ , avec  $ax^2 + bx + c$  sans racine dans  $]0; 1[$ , convient. Ça fait pas mal de choix possibles. On voit ici tout l'importance de la notion de quantificateur, si mal maîtrisée.

Passons et étudions l'équation  $f + 1/8 = 0$ . Comme  $f$  est polynomiale, elle est indéfiniment dérivable sur  $\mathbf{R}$ , de dérivée  $x \mapsto 6x(x - 1)$ , strictement négative sur  $]0; 1[$ . Par conséquent  $f$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme entre  $]0; 1[$  et  $] - 1; 0[$  et, en particulier, prend une unique fois la valeur  $-1/8$  dans l'intervalle  $]0; 1[$ . Notons également que, comme  $f(1/2) = -1/2$ , on a  $\mu_0 < 1/2$ .

**Question I.4.g**

Pour  $x$  réel, on a

$$f(1 - x) = 2(1 - x)^3 - 3(1 - x)^2 = 2 - 6x + 6x^2 - 2x^3 - 3 + 6x - 3x^2 = -1 - f(x)$$

et donc

$$f(1 - \mu_0) + \frac{7}{8} = -f(\mu_0) - \frac{1}{8} = 0 .$$

On a déjà remarqué qu'échanger  $(A, B)$  et  $(C, D)$  revient à échanger  $\mu$  en  $1 - \mu$ . Comme cela revient de surcroît à échanger les deux demi-espaces délimités par  $Q$ , cela revient donc à changer  $\nu_3$  en  $V - \nu_3$ . Par conséquent changer  $\mu$  en  $1 - \mu$  revient à changer  $\nu_3/V$  en  $(1 - \nu_3/V)$  et donc  $f(1 - \mu) = -1 - f(\mu)$ .

**Question I.4.h**

**Remarques exaspérées :** L'énoncé est évidemment faux :  $h$  n'est pas définie en 0 et 1. De plus soit j'ai raté un argument, ce qui est toujours possible, soit ces questions sont incroyablement non détaillées, posées dans un ordre infaisable et surtout obscures quant à leur véracité. Comment traiter ces questions sans avoir reconnu ab initio qu'il s'agit de la méthode de Newton et se souvenir des arguments conduisant à la preuve de sa convergence? Le raisonnement est tout de même un poil plus fin que la méthode habituelle du point fixe, dite de Picard. De même il n'est nulle part fait remarquer que  $\mu_0$  est inférieur à  $1/2$  etc.

Vérifions (!) qu'on est en train d'étudier l'algorithme de Newton. En effet on a pour tout réel  $x$  distinct de 0 et 1, on a

$$\frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{16x^3 - 24x^2 + 1}{48x(x-1)} \quad \text{et donc} \quad x - \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{32x^3 - 24x^2 - 1}{48x(x-1)} = h(x).$$

La stratégie est la suivante : montrer que l'on a affaire à une suite récurrente attachée à une fonction ayant un unique point fixe dans un intervalle stable par cette fonction. On va donc commencer par voir si  $[\mu_0; u_0]$  est stable par  $h$  et pour cela il faut deux ingrédients : la croissance de  $h$  pour créer une suite récurrente monotone, le fait que  $u_1$  est inférieur à  $u_0$  pour qu'on ait bien une suite décroissante. Pour la croissance de  $h$ , l'argument est le calcul de la dérivée de  $h$  en fonction de  $g$  et des signes de  $g$  et  $g''$ . Mais attention on ne peut pas travailler, comme semble le suggérer l'énoncé, sur  $[0; 1/2]$ . Pour l'inégalité  $u_1 \leq u_0$ , elle résulte de  $h(x) - x = -g(x)/g'(x)$  et du signe de  $g$  et  $g'$  sur l'intervalle considéré. Néanmoins comme l'énoncé demande quelques lignes plus loin de calculer  $u_1$ , on utilisera juste son calcul pour en déduire l'inégalité voulue...

Bref, revenons à la question. En tant que fonction polynomiale  $g$  est indéfiniment dérivable, comme  $f$ , et qu'on a  $g' = f'$ . En particulier  $g'$  est négative sur  $[0; 1]$ . De plus  $g''$  est la fonction  $x \mapsto 6(2x - 1)$  et donc  $g''$  est négative sur  $] -\infty; 1/2]$ . Il en résulte que  $g$  et  $g'$  sont décroissantes sur  $[0; 1/2]$ .

Puisque  $h$  est une fraction rationnelle, elle est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$  et on a

$$h' = 1 - \frac{g' - gg''}{(g')^2} = \frac{gg''}{(g')^2}.$$

En particulier, comme  $g$  est négative sur  $[\mu_0; 1[$  et  $g''$  est négative sur  $[0; 1/2]$  (par exemple parce que  $g'$  y est décroissante),  $h$  est croissante sur  $[\mu_0; 1/2]$ .

Sur un Ti-89 entrons la fonction  $h : (32x^3 - 24x^2 - 1) / (48x(x-1)) \rightarrow h(x)$ . Les commandes  $h(1/2)$  et  $h(1/4)$  permettent le calcul immédiat de  $u_1$  et  $u_2$ . On obtient  $u_1 = 1/4$ ,  $u_2 = 2/9$ . On a en particulier  $u_1 \leq u_0$  et  $u_1 = h(u_0) \geq h(\mu_0) = \mu_0$  par croissance de  $h$  sur  $[\mu_0; u_0]$ .

Montrons par récurrence sur l'entier naturel  $n$  la propriété  $H_n$  suivante :

$$(H_n) \quad \mu_0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_0.$$

Pour  $n = 0$ , c'est la propriété que l'on vient de noter.

Soit maintenant  $n$  un entier naturel quelconque pour lequel  $H_n$  est vraie. On a donc  $\mu_0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_0$ . Comme  $h$  est croissante sur  $[\mu_0; u_0]$ , il vient

$$\mu_0 = h(\mu_0) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq u_1 \leq u_0$$

et donc la propriété est héréditaire.

Le principe de récurrence permet donc d'affirmer que  $H_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  et donc  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite décroissante minorée par  $\mu_0$ . Elle est par conséquent convergente. Comme  $h$  est continue sur  $[\mu_0; u_0]$ , la limite de cette suite est un point fixe de  $h$ , i.e. un zéro de  $g$ , et c'est donc  $\mu_0$  puisque c'est l'unique zéro de  $g$  sur  $]0; 1[$  et par suite sur  $[\mu_0; u_0]$ .

On a

$$g(0.22) = 0.001096 > 0$$

et donc, par décroissance de  $g$  sur  $[0; 1/2]$ ,  $\mu_0 > 0.22$ . Il en résulte  $0.22 < \mu_0 \leq u_2 = 2/9$  et donc

$$-0.001 < \mu_0 - 0.221 \leq \frac{11}{9000} < 2.10^{-3}$$

et par suite  $|\mu_0 - 0.221| < 2.10^{-3}$  et 0.221 est une valeur approchée de  $\mu_0$  à  $2.10^{-3}$  près.

#### Question I.4.i

**Rappel :** comme on est en train d'appliquer la méthode Newton, on a besoin de minorer  $g'$  et de majorer  $g''$  sur l'intervalle d'étude. Ceci provient de la formule  $h' = gg''/(g')^2$  et de l'inégalité des accroissements finis. Cette même formule montre que  $h'$  s'annule en le zéro de  $g$  (c'est là le principal intérêt de la méthode de Newton) et donc que l'accroissement de  $h$  autour du point fixe est donné en terme de  $h''$ , d'après la formule de Taylor-Lagrange. C'est pourquoi on cherche ici à majorer directement  $h''$ .

Comme  $h$  est une fraction rationnelle, il faut impérativement (à moins de préférer la dériver à la machine, ce qui suppose que l'on saura en exploiter le résultat, quelque soit sa forme) à réduire (somme de sa partie entière et d'une fraction telle que le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur) afin de la dériver. Une option encore meilleure est de la décomposer en éléments simple. Certaines machines le font automatiquement. Ici les pôles sont simples et peu nombreux, on peut donc le faire à la main!

La décomposition de  $h$  en éléments simples donne

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \quad h(x) = \frac{4x+1}{6} + \frac{1}{48} \left( \frac{1}{x} + \frac{7}{x-1} \right)$$

et donc sa dérivée seconde est une somme à coefficients positifs de puissances cubiques inverses. C'est donc une fonction décroissante. On a plus précisément

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \quad h''(x) = \frac{1}{24} \left( \frac{1}{x^3} + \frac{7}{(x-1)^3} \right)$$

et donc

$$h''(0.2) = h''\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{24} \left( 5^3 - \frac{7.5^3}{4^3} \right) = \frac{(4^3 - 7)5^3}{4^3.24} = \frac{57.5^3}{3.2^9} = \frac{5^3.19}{2^9} = \frac{2375}{512} \simeq 4.63867.$$

On aurait également pu le programmer à la calculatrice : à partir de la fonction  $h$  déjà entrée, on entre  $d(h(x), x, 2) \rightarrow z(x)$  et enfin la commande  $z(1/5)$  fournit 2375/512 ou encore 4.63867...

On a donc bien  $h''(0.2) \leq 5$  et donc  $h''$  est inférieure à 5 sur  $[0.2; 1/2]$  et donc a fortiori sur  $[\mu_0; u_0]$ . On pourrait noter qu'en sus on a

$$h''(u_0) = h''\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

et donc  $h''$  est compris entre  $-2$  et  $5$  sur  $[\mu_0; u_0]$ . On ne s'en servira pas puisqu'on sait déjà que tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont supérieurs à  $\mu_0$ , par décroissance.

Remarquons qu'on a  $h'(\mu_0) = 0$  puisque  $g(\mu_0) = 0$ . La formule de Taylor-Lagrange permet donc d'écrire

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leq u_{n+1} - \mu_0 = h(u_n) - h(\mu_0) \leq \frac{(u_n - \mu_0)^2}{2} \sup_{\mu_0 \leq t \leq u_n} h''(t) \leq \frac{5}{2}(u_n - \mu_0)^2.$$

On obtient donc une meilleure inégalité que l'énoncé et une erreur est à redouter. D'ailleurs je ne vois pas comment faire aussi mal pour la fin de cette question.

En effet, on a  $0.22 < \mu_0 \leq u_2$  et donc  $0 \leq u_2 - \mu_0 < 2.10^{-2}/9$ . Il en résulte

$$0 \leq u_4 - \mu_0 < \frac{5}{2}(u_3 - \mu_0)^2 < \frac{5^3}{2^3}(u_2 - \mu_0)^4 < \frac{2.5^3}{9^4.10^8} = \frac{1}{2^3.9^4.10^5} < 10^{-9}$$

et donc  $u_4 \simeq 0.2210626508$  est une valeur approchée à  $10^{-9}$  de  $\mu_0$ . Même avec le facteur 5 au lieu de 5/2 on trouverait  $2.10^{-9}$ , ce qui est toujours bien mieux que  $10^{-7}$ . Je pense que le calcul proposé est fait remontant à  $u_1$  et avec le facteur 5, on obtient en effet

$$0 \leq u_4 - \mu_0 < 5^7(u_1 - \mu_0)^8 < 5^7(3.10^{-2})^8 = \frac{3^8}{2^7}10^{-9} \simeq 5,13.10^{-8} < 10^{-7}.$$

La dernière estimation résulte de la précédente puisque  $5.(10^{-7})^2 = 5.10^{-14} < 10^{-13}$ . Cela dit les inégalités que nous avons obtenues permettent de déduire

$$0 \leq u_5 - \mu_0 < \frac{1}{2^5 \cdot 9^8 \cdot 10^9} < 10^{-19} .$$

**N.B. :** vu la difficulté de ces deux dernières questions, les erreurs qu'elles contiennent et l'absence de guide clair dans la formulation, on est en droit de se demander à qui elles étaient destinées, si elles ont un tant soit peu servi ceux et celles qui y ont passé du temps et si, de fait, ne serait-ce qu'un(e) candidat(e) en a traité une partie significative correctement.

## Partie II

### Question II.A.1.a

On a

$$\begin{aligned} AB^2 &= (2\sqrt{2})^2 + 4^2 = 24 \\ AC^2 = AD^2 &= (\sqrt{2})^2 + (\pm\sqrt{6})^2 + 4^2 = 2 + 6 + 16 = 24 \\ BC^2 &= (2\sqrt{6})^2 = 24 \\ BD^2 = CD^2 &= (3\sqrt{2})^2 + (\pm\sqrt{6})^2 = 18 + 6 = 24 . \end{aligned}$$

et donc  $T$  est bien un tétraèdre régulier d'arête  $2\sqrt{6}$ .

Le plan  $(BCD)$  est le plan passant par  $(0, 0, -1)$  de direction  $(\vec{i}, \vec{j})$  et donc la projection orthogonale  $H_A$  de  $A$  sur  $(BCD)$  est  $(0, 0, -1)$  et on a  $AH_A = 4$ . Par ailleurs  $BCD$  est un triangle équilatéral de côté  $2\sqrt{6}$  et donc sa surface est  $\sqrt{3}BC^2/4 = 6\sqrt{3}$ .

La formule I.2 donne donc  $V = 4\sqrt{3}$ .

### Question II.A.1.b

Soit  $p$  la projection vectorielle associée à la projection sur la droite  $(OM)$ . Comme  $O$  est fixe par cette dernière projection, par linéarité de la projection vectorielle, les formules données par l'énoncé sont équivalentes aux formules

$$p(\vec{e}_3) = \sin(\varphi) \vec{OM} \quad p(\vec{e}_1) = \cos(\varphi) \cos(\theta) \vec{OM} \quad p(\vec{e}_2) = \cos(\varphi) \sin(\theta) \vec{OM} .$$

Or, puisque  $\vec{OM}$  est unitaire, la projection  $p$  est donnée par la formule

$$\forall x \in \mathcal{E} \quad p(x) = \langle x, \vec{OM} \rangle \vec{OM}$$

et les formules cherchées résultent donc de la définition des coordonnées sphériques.

**Remarque :** la définition donnée par l'énoncé est correcte mais pas les explications. En effet il est impossible de parler d'angle orienté de vecteurs dans l'espace. Il faut se restreindre à un plan **et** avoir **orienté** le plan. Les angles  $\theta$  et  $\varphi$  sont donc mal définis. Il faudrait expliquer que l'on prend  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et  $(O, \vec{Om}, \vec{k})$  directs.

### Question II.A.1.c

On a

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2$$

et donc  $q$  est définie positive.

### Question II.A.2.a

Soit  $\Delta$  la parallèle à  $\Delta'$  passant par le centre de  $T$ , orientée dans le même sens que  $\Delta'$ . Notons  $A_1, B_1, C_1$  et  $D_1$  les projetés orthogonaux de  $A, B, C$  et  $D$  sur  $\Delta$ . On a

$$\vec{A'B'} = \vec{A_1B_1} \quad \vec{A'C'} = \vec{A_1C_1} \quad \text{et} \quad \vec{A'D'} = \vec{A_1D_1}$$

et, par conséquent,

$$\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1} \quad \overline{A'C'} = \overline{A_1C_1} \quad \text{et} \quad \overline{A'D'} = \overline{A_1D_1} .$$

Soit maintenant  $s$  l'unique application affine envoyant le repère affine  $(A, B, C, D)$  sur le repère

$$(0, 0, 3), (2\sqrt{2}, 0, -1), (-\sqrt{2}, -\sqrt{6}, -1), (-\sqrt{2}, \sqrt{6}, -1) .$$

Si  $xyzt$  est un tétraèdre régulier quelconque, ses faces sont des triangles équilatéraux et donc  $\overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{xz} = xy.xz/2$ . Par conséquent si  $X$  et  $Y$  sont deux sommets de  $T$  distincts de  $A$ , on a

$$s(A)\overrightarrow{s(X)} \cdot s(A)\overrightarrow{s(Y)} = \frac{s(A)s(X) \cdot s(A)s(Y)}{2} = 12 = \frac{24}{l^2} \frac{AX \cdot AY}{2} = \frac{24}{l^2} \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AY}$$

et donc  $s$  agit sur le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  comme une similitude de rapport  $2\sqrt{6}/l$ . Par linéarité  $s$  est donc une similitude.

En tant qu'application affine  $s$  préserve les barycentres et donc envoie le centre de  $T$  sur  $O$ . Par conséquent l'image de  $\Delta$  par  $s$  est une droite passant par  $O$ . Soit  $M$  un point de l'intersection de  $s(\Delta)$  avec la sphère de centre  $O$  et de rayon 1 ; on a donc  $s(\Delta) = (OM)$ . Quitte à changer  $M$  en son symétrique par rapport à  $O$ , on peut supposer que l'orientation sur  $(OM)$  donnée par l'image de l'orientation de  $\Delta$  par  $s$  et celle donnée par  $\overrightarrow{OM}$  coïncident.

Comme  $s$  est une similitude, elle préserve l'orthogonalité et envoie donc le projeté orthogonal d'un point sur  $\Delta$  sur le projeté orthogonal de l'image de ce point sur l'image de  $\Delta$ . Il en résulte que les points  $A', B', C'$  et  $D'$  admettent pour image les points désignés par les mêmes lettres dans la question précédente (pour plus de clarté nous noterons ces points  $A'', B'', C''$  et  $D''$ ). Les vecteurs formés par deux de ces points ont pour image des vecteurs correspondants et, par choix de l'orientation sur  $(OM)$ , il en résulte que les quantités  $\overline{A''B''}, \overline{A''C''}$  et  $\overline{A''D''}$  sont égales à  $2\sqrt{6}/l$  fois  $\overline{A'B'}, \overline{A'C'}$  et  $\overline{A'D'}$ .

On a

$$q_0(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'}) = \frac{l^2}{24} q_0(\overline{A''B''}, \overline{A''C''}, \overline{A''D''}) .$$

Comme cette dernière quantité ne dépend pas de  $M$ , on peut la calculer pour  $M = (0, 0, 1)$ . Les projetés  $A'', B'', C''$  et  $D''$  sont alors respectivement  $A'' = (0, 0, 3)$  et  $B'' = C'' = D'' = (0, 0, -1)$ . Il vient donc

$$q_0(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'}) = \frac{l^2}{24} q_0(4, 4, 4) = 2l^2$$

et donc la forme  $q = q_0/2$  répond à la question.

**N.B. :** changer de repère correspond à effectuer la transformation par la similitude. Comme il n'est pas si évident de construire un repère où les sommets de  $T$  ont pour coordonnées celles des sommets du tétraèdre de la question précédente, il me semble aussi clair de raisonner directement en terme de similitude.

### Question II.A.2.b.i

**Remarque :** l'énoncé commet une grave imprécision de notation en ne quantifiant pas la propriété annoncée. Il faut évidemment supposer que cette formule est valable indépendamment de  $\Delta'$ .

Quand on change d'orientation, les mesures algébriques sont changées en leurs opposées de sorte que le vecteur

$$(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$$

est changé en son opposé. La forme quadratique prend donc la même valeur dans les deux cas, i.e. l'orientation n'intervient pas dans le calcul de  $q(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$  et la formule  $l^2 = q(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$  a un sens indépendamment du choix de l'orientation sur  $\Delta$ .

### Question II.A.2.b.ii

Introduisons les coefficients de  $q$ . Soit donc  $(a, b, c, d, e, f)$  tels que

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \quad q(\alpha, \beta, \gamma) = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\alpha\beta + e\beta\gamma + f\gamma\alpha .$$



Soit  $\rho$  une isométrie de l'espace préservant  $T$ . Les projetés des sommets de  $T$  sur  $\Delta$  sont envoyés sur les projetés des images par  $\rho$  des sommets sur  $\rho(\Delta')$ . Comme  $\rho$  préserve les distances, elle préserve les mesures algébriques au signe près (et ce signe ne dépend en fait que de la droite sur laquelle sont mesurées ces mesures algébriques et non des points sur cette droite) et la question précédente permet donc de calculer la quantité  $q(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$  pour  $\rho(\Delta')$  à partir de la situation sur  $\Delta'$ .

Soit  $\rho$  une isométrie fixant  $A$  et un autre sommet, mais échangeant les deux autres sommets (symétrie plane par rapport au plan médiateur de ces deux derniers points). Les quantités  $(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$  sont donc préservées dans leur ensemble et deux d'entre elles sont permutées. Il en résulte que  $q$  est invariante si l'on permute d'une façon quelconque le triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  pour peu qu'il soit de la forme  $(\alpha, \beta, \gamma) = (\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$ . On en déduit (avec un peu de travail dont je doute qu'il ait été requis au CAPES voire même que le jury se soit rendu compte qu'il était nécessaire)  $a = b = c$  et  $d = e = f$ .

**Remarque :** on voit ici toute l'importance des quantificateurs. La forme quadratique est définie pour tout triplet de réels, mais on ne sait des propriétés que pour un certain nombre de ces triplets. Comme on a affaire à un polynôme on peut s'attendre à ce que cela suffise, mais attention ! comme on travaille avec plusieurs variables le fait que le nombre de triplets connus soit infini ne suffit pas à conclure. En effet un polynôme à plusieurs variables s'annule une infinité de fois.

Si maintenant on considère la symétrie par rapport au plan médiateur de  $[A; B]$ , de sorte que  $A$  et  $B$  sont échangés tandis que  $C$  et  $D$  sont fixés, les quantités  $(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$  pour  $\rho(\Delta')$  sont égales, en terme de quantités calculées sur  $\Delta'$ , à  $(\overline{B'A'}, \overline{B'C'}, \overline{B'D'})$  ou encore  $(-\overline{A'B'}, \overline{A'C'} - \overline{A'B'}, \overline{A'D'} - \overline{A'B'})$ , de sorte que  $q$  est invariante par la transformation  $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto -(\alpha, \alpha - \beta, \alpha - \gamma)$  et donc, pour tout triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de la forme  $(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$ ,

$$a(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + d(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = a(3\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma) + d(3\alpha^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + \beta\gamma)$$

ou encore

$$(2a + 3d)(\alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma) = 0$$

et donc (toujours avec un peu de travail)  $2a + 3d = 0$ . Il en résulte qu'il existe un réel  $k$  tel que

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \quad q(\alpha, \beta, \gamma) = k(3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)).$$

**N.B. :** il me semble plus judicieux de l'écrire sous la forme obtenue en II.A.1.c. En effet les quantités  $\alpha - \beta, \beta - \gamma$  et  $\gamma - \alpha$  représentent  $\overline{C'B'}, \overline{D'C'}$  et  $\overline{B'D'}$ . De la sorte le groupe symétrique sur les quatre sommets opère directement et on vient de trouver l'unique forme quadratique invariante sous ce groupe, à un scalaire près. D'ailleurs cette partie devrait être après la suivante de façon à rendre naturelle l'intervention des isométries du tétraèdre et surtout ces isométries devraient apparaître dans les questions posées...

**Question II.A.2.b.iii**

Si on se donne une forme quadratique  $q'$  et des réels  $(x, y, z)$  il existe au plus un réel  $k$  tel que  $kq'(x, y, z) = l^2$ . Par conséquent la question précédente montre que  $q$  est unique. Or on l'a déjà calculée en II.A.2.a et donc  $k$  est égal à  $1/2$ .

**Remarque :** l'énoncé suggère une autre méthode, mais elle consiste à refaire un calcul déjà effectué. Explicitons tout de même ce qui était désiré. Prenons pour  $\Delta'$  la droite  $(AB)$ , de sorte que  $A' = A, B' = B$  et  $C' = D'$  est le milieu de  $[A; B]$  puisque  $C$  et  $D$  appartiennent au plan médiateur de  $[A; B]$ . Orientons  $\Delta'$  selon  $\overrightarrow{AB}$ . Il vient donc

$$l^2 = k \left( 3 \left( l^2 + \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} \right) - 2 \left( \frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{4} \right) \right) = 2kl^2$$

et, par conséquent,  $k = 1/2$ .

**Question II.A.2.c**

Ceci résulte de la remarque faite en II.A.2.b.ii. On a en effet

$$\begin{aligned} 2l^2 &= q_0(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'}) \\ &= A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + (\overline{A'B'} - \overline{A'C'})^2 + (\overline{A'C'} - \overline{A'D'})^2 + (\overline{A'D'} - \overline{A'B'})^2 \\ &= A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2 \end{aligned}$$

**Question II.B.1**

**Remarque :** la phrase d'indication n'a aucun sens. D'une part  $\Delta'$  a déjà été définie, d'autre part  $\Pi_1$  ne possède pas une unique droite orthogonale mais une infinité.

Soit donc deux droites orthogonales incluses dans  $\Pi_1$ , notées  $\Delta'_1$  et  $\Delta'_2$ . Notons  $p_1$ ,  $p'_1$  et  $p'_2$  les projections orthogonales sur  $\Pi_1$ ,  $\Delta'_1$  et  $\Delta'_2$  respectivement. On a donc  $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2}$ . Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore, il vient, pour tout couple  $(M, N)$  de points

$$p_1(M)p_1(N)^2 = p'_1(M)p'_1(N)^2 + p'_2(M)p'_2(N)^2$$

et donc la question II.A.2.c permet de conclure

$$\begin{aligned} A_1B_1^2 + A_1C_1^2 + A_1D_1^2 + B_1C_1^2 + B_1D_1^2 + C_1D_1^2 &= A'_1B_1'^2 + A'_1C_1'^2 + A'_1D_1'^2 + B'_1C_1'^2 + B'_1D_1'^2 + C'_1D_1'^2 \\ &\quad + A'_2B_2'^2 + A'_2C_2'^2 + A'_2D_2'^2 + B'_2C_2'^2 + B'_2D_2'^2 + C'_2D_2'^2 \\ &= 2l^2 + 2l^2 = 4l^2 . \end{aligned}$$

**Question II.B.2.a-b**

**Question II.B.3.a**

**Remarque :** d'une part cette question n'a rien à voir avec ce qui précède et a naturellement sa place dans la partie II.A puisqu'elle traite de projections sur une droite. D'autre part les questions qu'elle pose permettent de comprendre la géométrie de la construction inverse (i.e. reconstruire le tétraèdre à partir de ses projections) de sorte que les dessins de la question II.B.2 sont grandement facilités. Encore une erreur de construction de ce problème qui est, définitivement, à jeter à la poubelle.

Remarquons

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad q_0(x, y, z) = 2x^2 + (x - y - z)^2 + 2(y - z)^2 \geq 2x^2$$

et donc

$$l^2 = \frac{1}{2}q_0(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'}) \geq A'B'^2 .$$

Remarquons également

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2 \quad 3(u^2 + 2v^2) - 2(u - v)^2 = u^2 + 4uv + 4v^2 = (u + 2v)^2$$

et donc

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad 3(q_0(x, y, z) - 2x^2) = 3((x - y - z)^2 + 2(y - z)^2) = 2(x - 2y)^2 + (x + y - 3z)^2 .$$

En particulier

$$3(2l^2 - 2A'B'^2) \geq 2(\overline{A'B'} - 2\overline{A'C'})^2 = 2(\overline{C'B'} - \overline{A'C'})^2 = 2(\overline{A'C'} + \overline{B'C'})^2$$

et, en divisant par  $8l^2$  (ce qui est licite car  $l$  est non nul vu que deux au moins des quatres points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  sont distincts), on obtient

$$\frac{3}{4} \left( 1 - \frac{A'B'^2}{l^2} \right) \geq \frac{1}{l^2} \left( \frac{\overline{A'C'} + \overline{B'C'}}{2} \right)^2 .$$

**Question II.B.3.b**

Comme  $l$  est la longueur de l'arête de tout tétraèdre ayant la propriété de projection de l'énoncé et comme, ainsi qu'il a été démontré en II.A.2.a, deux tétraèdres sont toujours similaires, il en résulte que deux tétraèdres ayant la propriété de projection de l'énoncé sont en fait isométriques.

Notons  $T = ABCD$  et  $T_1 = A_1B_1C_1D_1$  deux tels tétraèdres et  $s$  l'isométrie envoyant l'un sur l'autre. Puisque  $A$  et  $A_1$  se projettent en  $A'$ , le vecteur  $\overrightarrow{A_1A}$  est perpendiculaire à  $\Delta'$ . Notons  $\tau$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{A_1A}$ , l'image de  $T_1$  se projette sur  $\Delta'$  comme  $T_1$  et  $T$  et il nous suffit donc de considérer les tétraèdres  $T_1$  tels que  $A_1 = A$ .

Comme  $B$  et  $B_1$  appartiennent à un même plan orthogonal à  $\Delta'$  et comme  $AB = AB_1 = l$ , il existe une rotation d'axe la parallèle à  $\Delta'$  passant par  $A$  envoyant  $B$  sur  $B_1$ . De plus cette rotation conservant les plans orthogonaux à  $\Delta'$ , l'image de  $T_1$  par celle-ci est un tétraèdre se projetant comme  $T$  et  $T_1$ . Ainsi on peut supposer  $B = B_1$ .

Notons que  $A$  et  $B$  sont distincts et donc la droite  $(AB)$  existe ainsi que le plan médiateur de  $[A; B]$ .

Les points  $C, D, C_1$  et  $D_1$  sont à la distance  $l$  de  $A$  et  $B$ , ils sont donc situés sur un cercle  $\Gamma$  dans le plan médiateur de  $A$  et  $B$ . Ils sont également situés sur des plans orthogonaux à  $\Delta'$  passant l'un par  $C'$  et l'autre par  $D'$ .

Si  $(AB)$  est parallèle à  $\Delta'$ , le plan médiateur de  $[A; B]$  est orthogonal à  $\Delta'$  et il en résulte que  $C'$  appartient au plan médiateur de  $[A; B]$ . Il existe alors une rotation d'axe  $(AB)$  envoyant  $C_1$  sur  $C$  et préservant les plans orthogonaux à  $\Delta'$ . De la sorte on peut supposer  $C = C_1$ .

Si, au contraire  $(AB)$  n'est pas parallèle à  $\Delta'$  le plan médiateur de  $[A; B]$  admet une unique direction  $\vec{d}$  de droites perpendiculaire à  $\Delta'$ . Comme une droite coupe le cercle  $\Gamma$  en au plus deux points, soit  $C$  et  $C_1$  sont confondus, soit ils sont alignés selon une droite de direction  $\vec{d}$ . Dans le second cas le plan médiateur de  $[C; C_1]$  contient donc une droite parallèle à  $\Delta'$ , ainsi que les points  $A$  et  $B$ . Par conséquent la symétrie par rapport à ce plan préserve les plans orthogonaux à  $\Delta'$  et envoie donc  $T_1$  sur un tétraèdre dont les trois premiers sommets coïncident avec  $A, B$  et  $C$ . On se ramène donc au cas où  $C_1 = C$ .

Enfin il existe au plus deux points de  $\Gamma$  à une distance  $l$ . S'il n'y en a qu'un  $D = D_1$  et  $T = T_1$ . Sinon la symétrie par rapport au plan médiateur de  $[D; D_1]$  fixe  $A, B$  et  $C$  puisqu'ils appartiennent à ce plan et fixe également la direction de  $\Delta'$  puisque  $(DD_1)$  est orthogonale à  $\Delta'$ . Au final on s'est ramené au cas  $D = D_1$  et dans ce cas l'unique isométrie fixant  $A, B, C$  et  $D$  est l'identité.

Les réductions successives qu'on a faites ont toujours utilisé des isométries laissant globalement invariant tout plan perpendiculaire à  $\Delta'$ . Ce sont donc l'identité, les translations de vecteur orthogonal à  $\Delta'$ , les rotations d'axe parallèle à  $\Delta'$ , les symétries par rapport à un plan parallèle à  $\Delta'$  et les symétries glissées par rapport un tel plan et de vecteur de translation perpendiculaire à  $\Delta'$ .

Réciproquement de telles isométries transforment les points de l'espace en des points ayant même projection sur  $\Delta'$  et transforment donc un tétraèdre ayant la propriété de projection de l'énoncé en un autre.

Par conséquent  $T$  est unique à une isométrie préservant globalement les plans orthogonaux à  $\Delta'$  près. Ces isométries ont déjà été décrites en détail.

### Question II.B.3.c

Notons que les choix proposés sont évidemment nécessaires. S'ils sont possibles le tétraèdre  $T$  sera bien régulier. Il suffit donc de voir que chaque étape est possible.

La première est possible puisque le plan orthogonal à  $\Delta'$  passant par  $A'$  n'est pas vide.

Le plan orthogonal à  $\Delta'$  passant par  $B'$  n'est pas vide non plus. De plus la distance de  $A$  à ce plan est  $A'B'$  et est donc inférieure à  $l$  d'après II.B.3.a.i. Par conséquent la sphère de centre  $A$  et de rayon  $l$  coupe ce plan selon un cercle (éventuellement réduit à un point), i.e. le choix de  $B$  est possible.

Considérons maintenant l'ensemble  $\Gamma$  des points de l'espace ayant une distance à  $A$  et  $B$  égale à  $l$ . Ils sont donc dans le plan médiateur de  $[A; B]$ , de sorte que leur projection orthogonale sur la droite  $(AB)$  est le milieu  $I$  de  $[A; B]$ . Comme  $IA = IB = l/2$ , par le théorème de Pythagore,  $\Gamma$  est un cercle de centre  $I$  et de rayon  $\sqrt{l^2 - l^2/4} = \sqrt{3}l/2$ .

Il s'agit donc de savoir si la projection de ce cercle sur  $\Delta'$  contient  $C'$ . Considérons  $I'$  la projection de  $I$  sur  $\Delta'$  et  $\Delta$  la parallèle à  $\Delta'$  passant par  $I$ . Remarquons que la quantité  $(A'C' + B'C')/2$  n'est rien d'autre que  $I'C'$  puisque, la projection étant affine et préservant donc les milieux,  $I'$  est le milieu de  $A'$  et  $B'$ . L'inégalité II.B.3.a.ii se réécrit donc

$$I'C'^2 \leq \frac{3l^2}{4} \left( 1 - \frac{A'B'^2}{l^2} \right).$$

Comme  $\Delta$  et  $[A; B]$  sont sécantes en  $I$ , deux cas peuvent se produire. Soit  $\Delta$  et  $[A; B]$  sont confondues et alors le plan médiateur de  $[A; B]$  est orthogonal à  $\Delta'$  et donc  $\Gamma$  se projette en un unique point, à savoir  $I'$ . Néanmoins dans ce cas  $A'B' = AB = l$  et II.B.3.a.ii montre que  $C'$  est alors confondu avec  $I'$  ce qui montre que le choix de  $C$  est possible : un point quelconque de  $\Gamma$ . Remarquons que l'inégalité II.B.3.a.ii est encore vraie en changeant  $C'$  et  $D'$ , en appliquant ce résultat au quadruplet  $(A, B, D, C)$ . Il vient donc  $D' = I'$  et la dernière construction nécessite uniquement que l'on puisse trouver un point de  $\Gamma$  (qui se projètera donc sur  $I' = D'$ ) à une distance  $l$  de  $C$ . Comme le diamètre de  $\Gamma$  est  $\sqrt{3}l$  et est donc supérieur à  $l$ , un tel choix est possible.

Supposons maintenant que  $\Delta$  et  $[A; B]$  engendrent un plan  $\Pi$ . La projection du cercle  $\Gamma$  sur  $\Delta'$  est un segment centré en  $I'$  d'une demi-longueur  $l'$  qu'il nous faut montrer être supérieure à  $I'C'$ .

Notons  $\Delta_1$  la parallèle à  $\Delta$  et  $\Delta'$  qui passe par  $B$ . Si  $M$  et  $N$  sont des points de l'espace la distance entre leurs projetés respectifs sur  $\Delta'$ ,  $\Delta$  ou  $\Delta_1$  est la même puisque ces droites sont parallèles et que, par conséquent, la projection sur l'une de ces droites est obtenue à partir de la projection sur une autre par une translation de vecteur orthogonal à leur direction commune.

Le plan  $\Pi$  coupe le plan médiateur de  $[A; B]$  selon une droite passant par  $I$  qui est donc un diamètre de  $\Gamma$ . Soit  $M$  un des points d'intersection de cette droite avec  $\Gamma$ . Notons  $P$  la projection de  $M$  sur  $\Delta$ . Si  $IP$  est supérieur à  $I'C'$ , le plan orthogonal à  $\Delta'$  passant par  $C'$  coupe  $\Gamma$  et donc le choix de  $C$  est possible.

Notons  $A_1$  le projeté de  $A$  sur  $\Delta_1$  les triangles  $AA_1B$  et  $IPM$  sont semblables puisque leurs côtés sont deux à deux orthogonaux. Il en résulte

$$\frac{IP}{IM} = \frac{AA_1}{AB}.$$

Or  $M$  appartient à  $\Gamma$  et donc  $IM = \sqrt{3}l/2$ . De plus  $AA_1B$  est rectangle en  $A_1$  et le théorème de Pythagore montre

$$IP = \frac{IM}{AB} \sqrt{AB^2 - A_1B^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{l^2 - A'B'^2}$$

et donc, d'après II.B.3.a.ii,

$$IP^2 \geq I'C'^2.$$

Par conséquent le choix de  $C$  est possible.

Etant donné  $D'$  on peut trouver  $D$  dans le plan orthogonal à  $\Delta'$  passant par  $D'$  tel que  $AD = BD = l$ , en appliquant ce qui précède au quadruplet  $(A', B', D', C')$ . Le problème est donc de savoir si on peut imposer en sus  $CD = l$ . Raisonnons grâce au sens direct. Etant donné  $A, B$  et  $C$ , formant donc un triangle équilatéral, il existe exactement deux points  $D_1$  et  $D_2$  tels que  $(ABCD_1)$  et  $(ABCD_2)$  soient des tétraèdres réguliers. Leurs projections  $D'_1$  et  $D'_2$  sont deux points de  $\Delta'$  vérifiant, d'après II.A.2.c,

$$A'B'^2 + A'C'^2 + A'D_1'^2 + B'C'^2 + B'D_1'^2 + C'D_1'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 + A'D_2'^2 + B'C'^2 + B'D_2'^2 + C'D_2'^2 = 2l^2.$$

Or l'équation en  $D'$  (c'est-à-dire en  $\overline{A'D'}$ )

$$A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2 = 2l^2$$

est du second degré. Il existe donc au plus deux points de  $\Delta'$  vérifiant cette équation du second degré. Par conséquent si  $D'_1$  et  $D'_2$  sont distincts alors l'un d'eux est  $D'$  et on a montré que le choix de  $D$  est possible. Supposons donc que  $D'_1$  et  $D'_2$  soient confondus. La droite  $(D_1D_2)$ , qui n'est autre que la médiatrice de  $(A, B, C)$ , est alors perpendiculaire à  $\Delta'$ , ce qui impose que  $\Delta'$  soit parallèle au plan  $(A, B, C)$ . Mais alors  $(A, B, C)$  est le plan  $\Pi$  que l'on a introduit plus haut, de sorte que  $C$  est le point  $M$  précédent ou son symétrique par rapport à  $I$ . En tout cas on se retrouve donc dans le cas d'égalité de l'inégalité II.B.3.a.ii. Or on a vu

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad 3(q_0(x, y, z) - 2x^2) - 2(x - 2y)^2 = (x + y - 3z)^2$$

de sorte que, en appliquant ce résultat à  $x = \overline{A'B'}$ ,  $y = \overline{A'C'}$  et  $z = \overline{A'D'}$  dans le cas d'égalité, on obtient

$$\overline{A'B'} + \overline{A'C'} - 3\overline{A'D'} = 0$$

ou encore

$$\overline{D'A'} + \overline{D'B'} + \overline{D'C'} = 0$$

i.e.  $D'$  est l'isobarycentre de  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ . Ceci montre que dans ce cas l'équation en  $D'$  n'a en fait qu'une seule racine (i.e. on a affaire à une racine double) et donc  $D'_1$  et  $D'_2$  se projettent tous les deux sur cet unique  $D'$ , i.e.  $D_1$  et  $D_2$  conviennent.

Bref (!) dans tous les cas on a pu trouver un tétraèdre  $T = (ABCD)$  qui se projette en  $(A', B', C', D')$  sur  $\Delta'$ , il y a donc une bijection entre les tétraèdres réguliers pris à isométrie conservant les plans perpendiculaires à  $\Delta'$  et les quadruplets de points  $(A', B', C', D')$ , dont au moins deux sont distincts, de  $\Delta'$ .

## Partie III

### Question III.1

On a déjà démontré en II.A.2.a qu'il existe une unique application affine envoyant un tétraèdre régulier sur un autre et que cette application affine est en fait une similitude. De plus c'est une isométrie si les deux tétraèdres ont même longueur d'arête. Par conséquent il existe une unique isométrie de l'espace permutant les sommets de  $T$  selon une permutation donnée.

Pour  $\rho$  dans  $\Sigma$ , la restriction de  $\psi(\rho)$  à  $(A, B, C, D)$  est  $\rho$  et donc si  $\rho$  et  $\sigma$  sont dans  $\Sigma$  on a

$$\forall M \in \{A, B, C, D\} \quad \psi(\rho) \circ \psi(\sigma)(M) = \psi(\rho)(\sigma(M)) = \rho \circ \sigma(M)$$

et donc  $\psi(\rho) \circ \psi(\sigma) = \psi(\rho \circ \sigma)$ , i.e.  $\psi$  est un homomorphisme du groupe  $\Sigma$  dans le groupe des isométries affines de l'espace.

Deux isométries ne saurait coïncider si elles ne coïncident pas sur le repère affine  $(A, B, C, D)$  et donc  $\psi$  est injective.

Notons par contre que la question de la surjectivité n'a pas de sens puisque l'énoncé n'a absolument pas précisé l'espace d'arrivée de  $\psi$ . Il semble implicite que ce soit le groupe des isométries affines de l'espace, mais ça va mieux en le disant.

Bref. La réponse attendue est :  $\psi$  n'est ni surjective ni bijective puisque  $\Sigma$  est fini et que ce n'est pas le cas du groupe des isométries affines de  $\mathcal{E}$ .

### Question III.2

Une application affine préserve les barycentres et donc aussi les enveloppes convexes. Par conséquent si  $u$  appartient à  $\Sigma'$ , il envoie  $T$  sur l'enveloppe convexe des images de  $(A, B, C, D)$  par  $u$ , i.e.  $u$  préserve globalement  $T$ .

Réciproquement une application affine  $u$  qui préserve  $T$  en préserve également les points extrémaux (puisque c'est une notion affine), i.e.  $u$  préserve globalement  $(A, B, C, D)$ . D'après la question précédente  $u$  appartient à  $\Sigma'$ .

### Question III.3.a

Puisque  $\psi(\tau)$  préserve les barycentres, elle fixe  $O$ . Par conséquent pour vérifier que  $L_\tau$  est la matrice donnée par l'énoncé, il suffit de vérifier que l'application linéaire associée à cette matrice échange les vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  et fixe les vecteurs  $\vec{OC}$  et  $\vec{OD}$ .

Or  $\vec{OA} = 3\vec{k}$  s'envoie sur  $2\sqrt{2}\vec{i} - \vec{k}$ , i.e.  $\vec{OB}$ . De même ce dernier vecteur s'envoie sur  $(2\sqrt{2}/3 - 2\sqrt{2}/3)\vec{i} + (8/3 + 1/3)\vec{k} = 3\vec{k}$ , i.e. sur  $\vec{OA}$ . De plus  $-\sqrt{2}\vec{i} \pm \vec{j} - \vec{k}$  s'envoie sur  $(-\sqrt{2}/3 - 2\sqrt{2}/3)\vec{i} \pm \vec{j} + (-4/3 + 1/3)\vec{k}$ , i.e. sur  $-\sqrt{2}\vec{i} \pm \vec{j} - \vec{k}$ .

Donc  $L_\tau$  est bien, par unicité, la matrice fournie par l'énoncé.

Comme  $T$  est régulier,  $C$  et  $D$  appartiennent au plan médiateur de  $[A; B]$  et donc la réflexion par rapport à ce plan échange  $A$  et  $B$  et fixe  $C$  et  $D$ ; c'est donc  $\psi(\tau)$ .

Ses valeurs propres sont donc 1 et  $-1$ . La multiplicité de 1 est 2 et le plan propre associé est le plan médiateur de  $[A; B]$ ; ce dernier admet pour base  $(\sqrt{2}\vec{i} + \vec{k}, \vec{j})$ . La multiplicité de  $-1$  est 1 et la droite propre associée est la droite dirigée par  $\vec{AB}$  ou encore  $\vec{i} - \sqrt{2}\vec{k}$ .

### Question III.3.b

La rotation d'axe orienté  $(O; \vec{k})$  et d'angle  $-2\pi/3$  fixe  $A$  et fixe tout triangle équilatéral dans un plan perpendiculaire à  $(O; \vec{k})$  et de centre sur cette droite. En particulier elle fixe globalement le triplet  $(B, C, D)$ . Par choix de l'angle, elle envoie  $B$  sur un point de coordonnée selon  $\vec{j}$  négative, i.e. sur  $C$ . Il en résulte que  $\psi(\rho)$  est une rotation d'axe  $(O; \vec{k})$ . Avec cette orientation c'est une rotation d'angle  $-2\pi/3$  et avec l'orientation contraire c'est une rotation d'angle  $2\pi/3$ . Il en résulte

$$L_\rho = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $L_\rho$  sont 1,  $e^{2i\pi/3}$  et  $e^{-2i\pi/3}$ , chacune avec la multiplicité 1. Les espaces propres associés sont les droites respectivement engendrées par  $\vec{k}$ ,  $\vec{i} + i\vec{j}$  et  $\vec{i} - i\vec{j}$ .

### Question III.3.c

**Remarque :** la question posée n'a aucun sens puisque l'énoncé ne précise pas d'orientation pour le plan médiateur de  $[M_{AC}; M_{BD}]$ .

L'isométrie  $\psi(\rho_3)$  préserve les barycentres et envoie donc le milieu de  $[A; C]$  sur le milieu de  $[\rho(A); \rho(C)]$ , i.e. le milieu de  $[B; D]$ . Comme on a  $(A + B + C + D)/4 = O$ , on a aussi  $(M_{AC} + M_{BD})/2 = O$ , i.e.  $M_{AC}$  et  $M_{BD}$  sont symétriques par rapport à  $O$ . Notons que  $M_{AC}$ ,  $O$  et  $M_{BD}$  sont distincts sinon  $(AC)$  et  $(BD)$  seraient coplanaires. Notons enfin que  $\psi(\rho_3)$  envoie également  $M_{BD}$  sur  $M_{AC}$ . Par conséquent un point équidistant de  $M_{AC}$  et  $M_{BD}$  est envoyé sur un point équidistant de leurs images, i.e. d'eux-mêmes : le plan médiateur de  $[M_{AC}; M_{BD}]$  est globalement fixe par  $\psi(\rho_3)$ . Notons  $\Pi$  ce plan.

Puisque le tétraèdre est régulier  $A$  et  $C$  appartiennent au plan médiateur de  $[B; D]$  et donc les droites  $(AC)$  et  $(BD)$  sont orthogonales. Comme  $M_{AC}$  et  $O$  sont équidistants de  $A$  et  $C$ , la droite  $(OM_{AC})$ , qui n'est autre que la droite  $(M_{AC}M_{BD})$ , est perpendiculaire à  $(AC)$  et en fait  $(M_{AC}M_{BD})$  est la perpendiculaire commune à  $(AC)$  et  $(BD)$ .

Notons  $A', B', C'$  et  $D'$  les projetés orthogonaux de  $A, B, C$  et  $D$  sur  $\Pi$ . On a  $\vec{OA'} = \vec{M_{AC}A}$  et donc l'image de ce vecteur est  $\vec{M_{BD}B}$ , i.e.  $\vec{OB'}$ . Par conséquent  $\psi(\rho_3)$  envoie  $A'$  sur  $B'$  et, plus généralement,  $\psi(\rho_3)$  permute circulairement les points  $(A'B'C'D')$ . L'unique application affine du plan  $\Pi$  qui a cette propriété est la rotation de centre  $O$  qui envoie  $A'$  sur  $B'$  et dont un angle peut être choisi de mesure  $\pi/2$  si on oriente  $\Pi$  selon  $(O; \vec{A'B'}, \vec{B'C'})$ .

Puisque  $\Pi$  et  $(M_{AC}M_{BD})$  sont stables par  $\psi(\rho_3)$ , leurs directions le sont par  $\psi(\rho_3)$ . Les calculs précédents montrent que  $\psi(\rho_3)$  y a respectivement les valeurs propres  $i$  et  $-i$ , et  $-1$ . Par conséquent  $L_{\rho_3}$  admet  $-1, i$  et  $-i$  comme valeurs propres et son polynôme caractéristique est  $(X^2 + 1)(X + 1) = X^3 + X^2 + X + 1$  (ce qui n'est guère étonnant puisque  $\rho_3^4 = Id$ , et donc  $L_{\rho_3}^4 = 1$ ).

Puisque  $\rho_3 = \tau\sigma$ , d'après I.1.b, on a  $\psi(\rho_3) = \psi(\tau)\psi(\sigma)$  et donc  $L_{\rho_3} = L_\tau L_\sigma$ .

Il vient

$$L_{\rho_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Et le polynôme caractéristique de  $L_{\rho_3}$  est donc (mais vraiment, à quoi sert cette question ? une machine sait le faire et on l'a déjà obtenu différemment ...) :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} X + \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & X + \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & X + \frac{1}{3} \end{vmatrix} &= \left(X + \frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} X + \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & X + \frac{1}{2} \end{vmatrix} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & X + \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} \\ &= \left(X + \frac{1}{3}\right) \left(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}X\right) \\ &= \left(X + \frac{1}{3}\right) \left(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}X\right) \\ &= X^3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)X^2 + \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\right)X + \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \\ &= X^3 + X^2 + X + 1. \end{aligned}$$

Non ? Si, si. Amusant, non ?

#### Question III.3.d

On a  $\rho_4 = \rho_3^2$  et donc  $\psi(\rho_4)$  est le retournement d'axe  $(M_{AC}M_{BD})$ . Ses valeurs propres sont donc 1 et  $-1$ , avec les multiplicités respectives 1 et 2. Ainsi le polynôme caractéristique de  $L_{\rho_4}$  est  $(X-1)(X+1)^2$  ou encore  $X^3 + X^2 - X - 1$ .

#### Question III.4

Il serait logique de refuser de faire cette question pour ne la traiter qu'après III.5.c. Il serait également agréable de souligner qu'elle facilite grandement la compréhension de III.5.d. En effet les points de  $\Omega$  tels que le segment  $[O; M]$  coupe une face du tétraèdre donnée, disons  $(A, B, C)$ , sont les points compris entre les trois grands cercles passant par  $(AB)$ ,  $(AC)$  et  $(BC)$  et donc, dans le plan  $(\theta, \phi)$ , ce sont les points compris entre les courbes correspondantes. De sorte que le plan est compartimenté en quatre fenêtres correspondant aux quatre faces de  $T$ .

Notons que deux cercles se coupent en au plus deux points. Comme ces cercles sont de centre  $O$ , ils sont symétriques par rapport à  $O$  et donc leurs deux points d'intersection éventuels sont symétriques par rapport à  $O$ . Notons que deux plans passant par  $O$  se coupant en une droite passant par  $O$ , l'intersection de deux grands cercles est l'intersection de la sphère avec la droite intersection des plans de ces cercles et, ainsi, deux grands cercles sont toujours sécants en exactement deux points.

Notons que tout sommet du tétraèdre est point triple puisqu'il appartient aux grands cercles passant par lui-même et l'un des trois autres sommets. Il en est donc de même de son symétrique par rapport à  $O$  (symétrique que l'on nommera antipode par la suite).

Si deux grands cercles correspondent à deux couples de sommets ayant un point en commun, ce sommet commun est l'un des points d'intersection des cercles et donc l'autre est son antipode.

Si maintenant deux grands cercles correspondent à deux couples de sommets sans point commun, ils ne peuvent se couper en des sommets du tétraèdre car sinon trois sommets seraient sur un grand cercle, seraient donc coplanaires avec  $O$  et donc, puisque  $O$  est le centre de  $T$ , les quatre sommets seraient coplanaires, ce qui n'est pas. Ainsi ces deux cercles ne se coupent ni sur un sommet ni sur un de leurs antipodes. Ces deux points d'intersection ne peuvent appartenir à un autre grand cercle passant par deux sommets, sinon ce troisième grand cercle aurait au moins un sommet en commun avec l'un des deux précédents grands cercles et le couperait donc selon ce sommet et son antipode, et ne saurait donc avoir un troisième point d'intersection.



Ainsi il y a huit points triples (les sommets de  $T$  et leurs antipodes, qui sont distincts deux à deux) et six points simples (les intersections des grands cercles passant par  $(AB)$  et  $(CD)$ , par  $(AC)$  et  $(BD)$  et par  $(AD)$  et  $(BC)$ ).

Les plans  $(OAB)$  et  $(OCD)$  admettent pour équation  $y = 0$  et  $x - \sqrt{2}z = 0$ . Ainsi l'intersection de ces deux plans avec la sphère circonscrite à  $T$  (i.e. la sphère de centre  $O$  et de rayon 3) sont les points  $(3, \arctan(\sqrt{2}/2), 0)$  et  $(3, -\arctan(\sqrt{2}/2), \pi)$ .

Les autres points s'obtiennent par application de  $\sigma$  et  $\sigma^2$ , i.e. en ajoutant  $-2\pi/3$  ou  $2\pi/3$  à  $\theta$ . Pour résumer cela les points simples ont pour coordonnées sphériques :

$$\left( 3, (-1)^k \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{k\pi}{3} \right)$$

pour  $k$  variant entre 0 et 5.

### Question III.5.a

Le plan  $(OCD)$  ayant pour équation  $x - \sqrt{2}z = 0$ , son intersection avec  $\Omega$  est un point vérifiant  $\cos\phi \cos\theta - \sqrt{2}\sin\phi = 0$  ou encore  $\sqrt{2}\tan\phi - \cos\theta = 0$  (la division par  $\cos\phi$  étant licite puisque si ce dernier était nul, l'équation imposerait la nullité de  $\sin\phi$  et cela est impossible puisque l'un des deux au moins n'est pas nul).

### Question III.5.b

Pour le grand cercle passant par  $(AB)$  on trouve  $\sin(\theta) = 0$  et donc, par application de  $\sigma$ , les relations pour les grands cercles passant par  $(AC)$  et  $(AD)$  ont pour équations respectives  $\sin(\theta + 2\pi/3) = 0$  et  $\sin(\theta - 2\pi/3) = 0$ .

Pour le grand cercle passant par  $(CD)$  on a trouvé  $\sqrt{2}\tan\phi = \cos\theta$  et donc, par application de  $\sigma$ , les relations pour les grands cercles passant par  $(DB)$  et  $(BC)$  sont  $\sqrt{2}\tan\phi = \cos(\theta + 2\pi/3)$  et  $\sqrt{2}\tan\phi = \cos(\theta - 2\pi/3)$ .

### Question III.5.c

### Question III.5.d

Considérons le plan  $(BCD)$ . Il admet  $z = -1$  comme équation et donc les points de ce plan à une distance  $r$  de  $O$  (avec  $r \geq 1$ ) sont les points de coordonnées  $(\sqrt{r^2 - 1}\cos\theta, \sqrt{r^2 - 1}\sin\theta, -1)$  pour un  $\theta$  réel quelconque. Comme il est à une distance  $r$  de  $O$ , les coordonnées sphériques de ce point sont  $(r, \arcsin(-1/r), \theta)$ . De sorte qu'un point  $M$  tel que  $N$  appartienne au plan  $(BCD)$  admet pour coordonnées sphériques  $(3, \arcsin(-1/F(M)), \theta)$ . Néanmoins le point  $N$  n'est pas nécessairement intérieur au triangle  $(BCD)$ . Pour cela il faut qu'il soit dans la fenêtre correspondant à  $(BCD)$  i.e. entre les trois courbes représentant les trois grands cercles  $(BC)$ ,  $(CD)$  et  $(BD)$ .

Notons que la distance de  $O$  à une arête de  $T$  ne dépend pas de l'arête. Comme la droite  $(CD)$  admet pour équation  $z + 1 = x + \sqrt{2} = 0$ , la distance de  $O$  à une arête est la distance de  $O$  à  $(-\sqrt{2}, 0, -1)$ , i.e.  $\sqrt{3}$ . Ainsi pour  $1 \leq F(M) \leq \sqrt{3}$  il n'y a pas de restriction à apporter à l'équation  $\phi = \arcsin(-1/F(M))$ , mais pour  $\sqrt{3} < F(M) \leq 3$  il faudra tronquer cette équation avec les équations des grands cercles  $(BC)$ ,  $(CD)$  et  $(BD)$ , i.e. rajouter les inéquations

$$\sqrt{2} \tan \phi \leq \cos \theta \quad \sqrt{2} \tan \phi \leq \cos(\theta + 2\pi/3) \quad \text{et} \quad \sqrt{2} \tan \phi \leq \cos(\theta - 2\pi/3) .$$

Enfin, pour  $F(M)$  strictement supérieur à 3, il n'y a aucun point  $M$  répondant au critère.

Pour obtenir la portion de courbe correspondante à  $(ACD)$ , il suffit d'échanger le rôle de  $A$  et  $B$ , i.e. d'appliquer  $\psi(\tau)$ . On trouve la courbe générale  $F(M)(2\sqrt{2} \cos \phi \cos \theta - \sin \phi) + 3 = 0$  tempérée par la restriction, si  $\sqrt{3} < F(M) \leq 3$ , obtenue par les grands cercles, i.e.  $2\pi/3 \leq \theta \leq 4\pi/3$  et  $\sqrt{2} \tan \phi \leq \cos \theta$ .

Enfin on applique  $\sigma$  (i.e. on ajoute ou on retranche  $2\pi/3$  à  $\theta$ ) pour trouver les portions de ligne de niveau correspondant à  $(ADB)$  et  $(ABC)$ . On obtient les courbes suivantes :

## Partie IV

### Question IV.1

D'après le théorème de Thalès, la distance entre les milieux de deux arêtes consécutives est la moitié de la distance entre les sommets de l'arête terminant le triangle formé par les deux arêtes de départ. Par conséquent les milieux de deux arêtes consécutives sont à une distance  $a$  l'un de l'autre. Ainsi les six milieux sont les sommets d'un octaèdre régulier dans lesquels les faces sont formées par les trois milieux de trois arêtes issues d'un même sommet ou d'une même face, ce qui fait bien huit faces.

Les huit tétraèdres proposés sont les huit tétraèdres formés à partir de l'octaèdre précédent en joignant une de ses faces avec  $O$ . Ainsi la face appartenant à l'octaèdre est un triangle équilatéral de côté  $a$ . Comme la distance du centre d'un tétraèdre régulier au milieu d'une arête est, d'après le théorème de Pythagore,  $\sqrt{OA^2 - AB^2/4} = \sqrt{3AB^2/8 - AB^2/4} = AB/2\sqrt{2}$  puisque le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre d'arête  $l$  est de rayon  $\sqrt{3}l/2\sqrt{2}$  comme on l'a vu en partie III. Il en résulte que la distance de  $O$  au milieu d'une arête est  $a/\sqrt{2}$  et donc les tétraèdres considérés sont des tétraèdres rectangles d'hypothénuse  $a$  et de sommet principal  $O$ .

### Question IV.2.a

On choisit pour  $\Theta$  l'ensemble de toutes les configurations possibles. Pour cela on fixe un tétraèdre régulier  $T$  d'arête  $2a$  fictif de départ et on place chacun des douze tétraèdres à l'intérieur. Cela crée quatre cases pour mettre des tétraèdres réguliers et huit cases pour mettre des tétraèdres rectangles.

Dans une case à tétraèdre régulier l'une quelconque des positions des quatre sommets du tétraèdre à placer est possible. Un choix de position des tétraèdres réguliers est donc un élément de  $\Sigma \times (\Sigma)^4$ . Le premier  $\Sigma$  correspond à l'affectation des tétraèdres dans leurs cases, les quatre autres correspondent à la position de chacun des tétraèdres au sein de leurs cases.

Dans une case à tétraèdre rectangle, le sommet principal n'a qu'une seule position possible. Par contre il y a trois positions possibles pour le tétraèdre dans sa case, correspondant aux isométries préservant le tétraèdre rectangle, i.e. les rotations d'axe la médiatrice de la face équilatérale et d'angle un multiple de  $2\pi/3$ . On a ainsi  $\Sigma_8 \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^8$  comme ensemble des positions possibles, en notant  $\Sigma_8$  l'ensemble des permutations de huit éléments.

On prend donc pour  $\Theta$  l'ensemble

$$\Theta = \Sigma \times (\Sigma)^4 \times \Sigma_8 \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^8 .$$

La probabilité  $P$  est uniforme sur  $\Theta$ .

#### Question IV.2.b

Trois faces des tétraèdres réguliers sont rouges. La configuration où le tétraèdre placé dans une case donnée a ses trois faces visibles rouges correspond à un sous-ensemble de  $\Sigma$  (l'un des  $\Sigma$  apparaissant dans  $\Sigma^4$ ). Ce sous-ensemble est celui pour lequel un sommet bien particulier du tétraèdre coïncide avec le sommet de  $T$  qui est dans la case. Ce sous-ensemble de  $\Sigma$  est identifiable au stabilisateur d'un point dans  $\Sigma$ , i.e. à  $\Sigma_3$ .

Quatre des tétraèdres rectangles ont leur face équilatérale rouge. Quelque soit la position choisie (le facteur  $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ ) la face équilatérale reste au même endroit dans la case. Cette case est soit visible, soit non. Si l'on identifie les quatre faces visibles du départ avec  $\{1, 2, 3, 4\}$  les quatre nouvelles faces de tétraèdres rectangles visibles sont rouge si et seulement si ce sont à nouveau ces quatre faces, autrement dit si l'élément de  $\Sigma_8$  choisi stabilise globalement  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Ce sous-ensemble est isomorphe à  $\Sigma_4 \times \Sigma_4$ .

Ainsi  $A$  est un sous-ensemble isomorphe à

$$A = \Sigma \times (\Sigma_3)^4 \times \Sigma_4 \times \Sigma_4 \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^8 .$$

#### Question IV.2.c

On a donc  $p = \text{Card}(A)/\text{Card}(\Theta)$ , i.e.

$$p = \left(\frac{3!}{4!}\right)^4 \frac{4!4!}{8!} = \frac{1}{2^9 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{17920} .$$