Deuxième épreuve CAPES externe 2000 (version allégée)

François Sauvageot

25 février 2002

Partie I

Question I.1.a

Puisque les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires, ils engendrent l'espace affine et, par cardinalité, en sont donc un repère. Par conséquent leur nombre est effectivement 4, i.e. ils sont tous distincts.

L'ordre de Σ est 4!, soit 24.

Question I.1.b

τ^2 et σ^3 sont triviales, $\tau\sigma$ est le 4-cycle $(ABCD)$ et donc $(\tau\sigma)^4$ est également triviale ; les cinq autres éléments sont les conjugués de τ par σ, σ^{-1}, $\tau\sigma$, $\tau\sigma^2$ et $(\tau\sigma)^2$ et on obtient immédiatement $\sigma\tau\sigma^2 = (AC)$, $\sigma^2\tau\sigma = (AD)$, $\tau\sigma\tau\sigma^2\tau = (BC)$, $\tau\sigma^2\tau\sigma\tau = (BD)$, $\tau\sigma\tau\sigma^2\tau\sigma = (CD)$.

Question I.1.c

Comme Σ est engendré par les transpositions et que, d'après la question précédente, les transpositions sont engendrées par τ et σ, ces deux derniers éléments engendrent Σ.

Question I.1.d

D'après ce qui précède, il suffit de vérifier la propriété demandée pour ρ égal soit à σ soit à τ. Pour σ, puisque le déterminant est alterné, on a

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \qquad \text{et donc} \qquad \mathrm{vol}(A,B,C,D) = \mathrm{vol}(A,C,D,B)\ .$$

Comme le déterminant est antisymétrique et que la relation de Chasle fournit $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, on obtient

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = -\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \qquad \text{et donc} \qquad \mathrm{vol}(A,B,C,D) = \mathrm{vol}(B,A,C,D)\ .$$

L'assertion suit.

Question I.1.e

Le tétraèdre étant l'enveloppe convexe des quatre points A, B, C et D, il ne dépend pas de l'ordre choisi pour écrire ces points. Par conséquent le volume de ce tétraèdre non plus et la propriété précédente s'en déduit.

Question I.2

Il faut ici remarquer que A, B, C et D sont affinement indépendants, comme on l'a souligné en I.1.a, trois d'entre eux engendrent un unique plan et deux d'entre eux une unique droite. En particulier le plan (BCD) a bien un sens.

On applique la définition de V en choisissant l'ordre $V = \mathrm{vol}(B,A,C,D)$. Comme $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BH_A}+\overrightarrow{H_AA}$ et comme H_A est coplanaire à B, C et D (et donc $\overrightarrow{BH_A}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont liés), il vient d'après les propriétés du déterminant,

$$V = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{BH_A}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) + \det(\overrightarrow{H_AA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{H_AA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})\right|$$

et, puisque $\overrightarrow{AH_A}$ est orthogonal au plan (BCD), il vient

$$V = \frac{1}{6} AH_A \left|\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})\right| = \frac{1}{3} AH_A \text{ aire } (B, C, D) \ .$$

Question I.3

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $1-\lambda$. Elle envoie donc H_A sur L et, par conséquent, le plan (BCD) sur un plan parallèle passant par L, i.e. P puisque (BCD) et P sont perpendiculaires à (AH_A). Comme A est fixe par h, les droites passant par A le sont aussi et, par conséquent, les droites (AB), (AC) et (AD) coupent le plan P en les images respectives de leurs points d'intersection avec le plan (BCD), i.e. B, C et D. Ces points appartiennent donc aux segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ et même il en résulte que S_B, S_C et S_D sont barycentres de A affecté de la masse λ et de B, C ou D avec la masse $1-\lambda$.

Question I.3.a

On a donc $\nu_1 = (1-\lambda)^3 V$ et donc $\lambda_1 = 1/2$.

Question I.3.b

Il vient également $\nu_2 = V - \nu_1$ et donc $\lambda_2 = 1 - \sqrt{7}/2$.

Question I.4.a

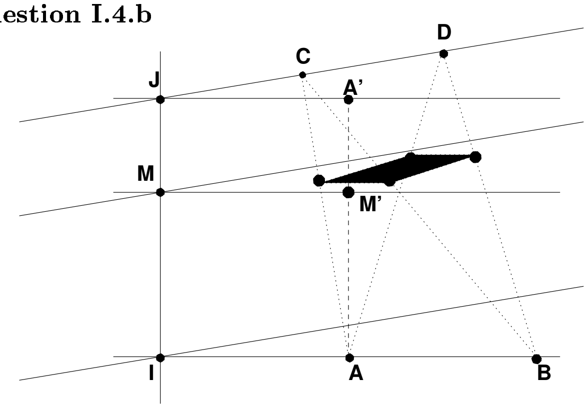
Les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires et donc non parallèles. Leurs directions engendrent donc un plan. Par conséquent il existe une unique direction de droite orthogonale aux directions de (AB) et (CD). Soit $\overrightarrow{d}$ cette direction.

Soit P_1 et P_2 les plans passant par A et C respectivement, de direction les plans vectoriels engendrés par $\overrightarrow{d}$ et par, respectivement, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Ces plans sont bien définis puisque $\overrightarrow{d}$ étant orthogonale à ces deux vecteurs, ne sauraient les contenir.

En dimension 3, deux plans se coupent selon une droite ou sont parallèles ou confondus. Dans ce dernier cas leurs directions sont en particulier égales. Or l'intersection des directions de P_1 et P_2 est $\overrightarrow{d}$. Il en résulte que P_1 et P_2 se coupent selon une droite Δ de direction $\overrightarrow{d}$ orthogonale aux directions de (AB) et (CD). Et en particulier Δ n'est pas parallèle à ces deux droites. Mais comme elle appartient à P_1 et P_2, elle leur est coplanaire et il en résulte qu'elle les coupent en d'uniques points I et J. Les points I et J vérifient donc les hypothèses de l'énoncé.

Réciproquement si deux points I' et J' appartenant respectivement à (AB) et (CD) sont tels que $(I'J')$ est perpendiculaire à (AB) et à (CD), alors la direction de $(I'J')$ est nécessairement $\overrightarrow{d}$ et donc (ABJ') est le plan P_1 et (CDI') est le plan P_2. Par conséquent $(I'J')$ est la droite d'intersection de P_1 et P_2 et donc $I = I'$ et $J = J'$, i.e. les points I et J ayant les propriétés de l'énoncé sont uniques.

Question I.4.b



Notons Q' le plan passant par J parallèle à Q ou encore le plan contenant (CD) et la parallèle à (AB) passant par J. Notons A' le projeté orthogonal de A sur Q', de sorte que (AA') est parallèle à (IJ). Comme (AB) est parallèle à Q', elle est projetée sur Q' en une droite parallèle. Autrement dit si J (qui est le projeté de I, appartenant à (AB)) est distinct de A', la droite (JA') est parallèle à (AB).
Soit maintenant h l'homothétie de centre A et de rapport $1-\mu$. Soit M' l'image de A' par h. Si $A = I$ (ce qui est la même chose que $J = A'$) on a $M' = M$ et donc $h(Q') = Q$ puisque $h(Q')$ est le plan parallèle à Q' passant par M'.

Si A et I sont distincts, fixons une orientation des droites parallèles (AA') et (IJ). On a

$$\frac{\overline{AM'}}{\overline{AA'}} = 1 - \mu = \frac{\overline{IM}}{\overline{IJ}}$$

et donc, par la réciproque du théorème de Thalès, la droite (MM') est parallèle à la droite (JA') et donc à (AB). En particulier M' appartient à Q puisque ce dernier contient la parallèle à (AB) passant par M. Il vient comme dans le cas précédent $h(Q') = Q$.

Il en résulte que Q coupe (AC) et (AD) en $h(C)$ et $h(D)$ et donc en des points des segments $[AC]$ et $[AD]$. Notons qu'en particulier $(U_{AC}U_{AD})$ est $h((CD))$ et est donc une droite parallèle à (CD).

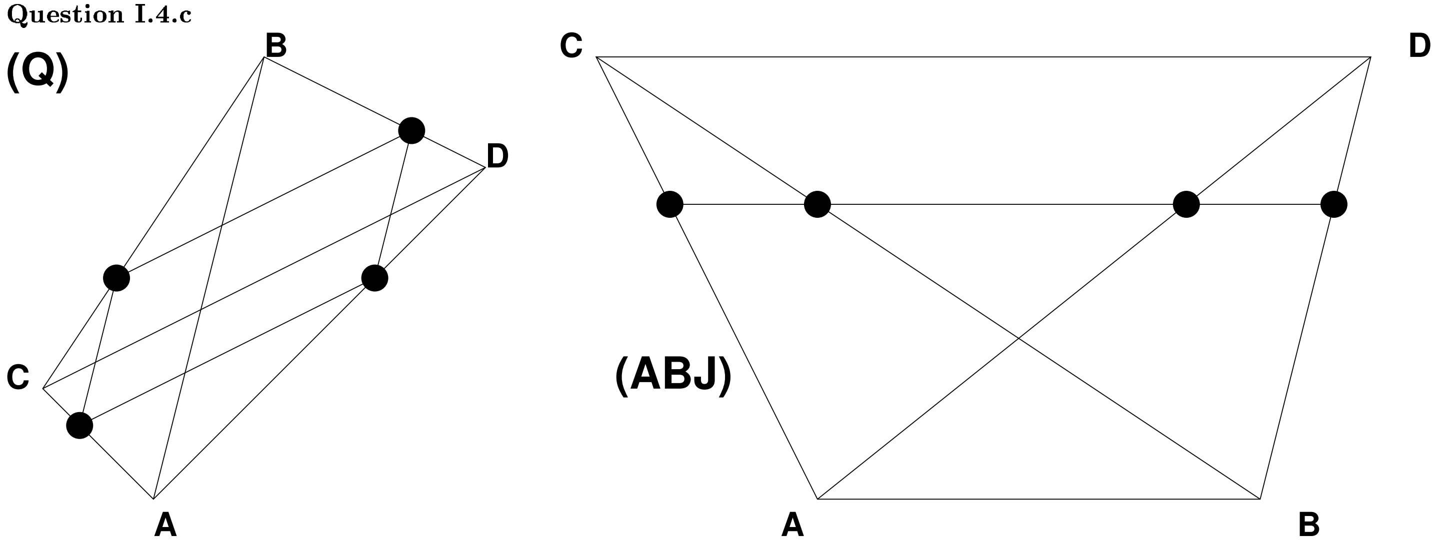
Appliquons ce qui précède au quadruplet de points B, A, C et D. Les points I et J sont inchangés et le résultat que l'on vient de démontrer entraîne que Q coupent (BC) et (BD) en des points de $[BC]$ et $[BD]$. De plus $(U_{BC}U_{BD})$ est parallèle à (CD).

Il résulte de ces considérations que $(U_{AC}U_{AD})$ et $(U_{BC}U_{BD})$ sont parallèles (en tant qu'homothétiques de (CD) par des homothéties de centre A ou B et de rapport $1 - \mu$).

Appliquons finalement tout ce qui vient d'être démontré au quadruplet de points C, D, A et B pour le réel $1 - \mu$. Les points J et I sont échangés mais M est inchangé. Par conséquent $(U_{AC}U_{BC})$ et $(U_{AD}U_{BD})$ sont parallèles à (AB) (en tant qu'homothétiques de cette droites par des homothéties de centre C ou D et de rapport μ).

Ainsi $(U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC})$ est un parallélogramme.

Question I.4.c



Question I.4.d

L'aire d'un parallélogramme $(XYZT)$ est donnée par $|\det(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XT})|$. Comme $\overrightarrow{U_{AC}U_{AD}} = (1-\mu)\ \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{U_{AC}U_{BC}} = \mu\ \overrightarrow{AB}$, il vient

$$\text{aire } (U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}) = \mu(1-\mu)W\ .$$

Question I.4.e

On introduit de nouveau le point A' et le plan Q' de la question I.4.b. On a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{IJ}$. De plus, comme A' appartient à Q', $\overrightarrow{A'C}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

On part de la formule $V = \text{vol}(A, B, C, D)$ et on utilise $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}$, les propriétés du déterminant permettent d'écrire

$$V = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{CD})\right|$$

et donc, puisque $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ il vient

$$V = \frac{1}{6}IJ\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\right| = \frac{1}{6}IJ.W\ .$$

Question I.4.f

Soit $(J;x,y,z)$ un repère orthonormé de l'espace tel que $\overrightarrow{JI}$ dirige positivement l'axe (Jz). Le plan (Jxy) est alors le plan Q' introduit en I.4.b. Le plan Q est le plan d'équation $z=\mu IJ$.

Pour un réel h quelconque, notons T_h l'intersection de T avec le plan d'équation $z=h$. De la sorte T_0 est le segment $[CD]$, T_{IJ} est le segment $[AB]$, $T_{\mu IJ}$ est le parallélogramme plein $(U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC})$.

Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\nu_3 = \int_0^{\mu IJ} \text{ aire } (T_h)dh$$

soit

$$\nu_3 = \int_0^{\mu} IJ.\text{ aire } (T_{\lambda IJ})d\lambda$$

et donc, d'après les questions I.4.d et I.4.f,

$$\nu_3 = \int_0^{\mu} IJ.\lambda(1-\lambda)Wd\lambda = 6V\int_0^{\mu}\lambda(1-\lambda)d\lambda = V(3\mu^2-2\mu^3)$$

et donc

$$\nu_3 = \frac{V}{8} \Leftrightarrow 2\mu^3-3\mu^2+\frac{1}{8}=0\ .$$

Il en résulte que la fonction polynomiale f, $x\mapsto 2x^3-3x^2$, a la propriété recherchée. Si g est un autre telle fonction on a

$$\forall x\in]0;1[\qquad f(x)+\frac{1}{8}=0\Leftrightarrow g(x)+\frac{1}{8}=0$$

et donc $g+\frac{1}{8}$ a les mêmes racines que $f+\frac{1}{8}$ dans $]0;1[$. Si $f+\frac{1}{8}$ avait trois racines dans $]0;1[$, le degré de g imposerait que $f+\frac{1}{8}$ et $g+\frac{1}{8}$ soient proportionnels. Comme ils auraient même terme constant, ils seraient égaux, i.e. $f=g$. Mais voilà ce n'est pas le cas ! **L'énoncé est donc idiot !**

En effet, une fois que l'existence et l'unicité de μ_0 sera acquise, tout polynôme de la forme $-\frac{1}{8\mu_0 c}(x-\mu_0)(ax^2+bx+c)-\frac{1}{8}$, avec ax^2+bx+c sans racine dans $]0;1[$, convient. Ça fait pas mal de choix possibles. On voit ici tout l'importance de la notion de quantificateur, si mal maîtrisée.

Passons et étudions l'équation $f+1/8=0$. Comme f est polynomiale, elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée $x\mapsto 6x(x-1)$, strictement négative sur $]0;1[$. Par conséquent f est un C^∞-difféomorphisme entre $]0;1[$ et $]-1;0[$ et, en particulier, prend une unique fois la valeur $-1/8$ dans l'intervalle $]0;1[$. Notons également que, comme $f(1/2)=-1/2$, on a $\mu_0<1/2$.

Question I.4.g

Pour x réel, on a

$$f(1-x)=2(1-x)^3-3(1-x)^2=2-6x+6x^2-2x^3-3+6x-3x^2=-1-f(x)$$

et donc

$$f(1-\mu_0)+\frac{7}{8}=-f(\mu_0)-\frac{1}{8}=0\ .$$

On a déjà remarqué qu'échanger (A,B) et (C,D) revient à échanger μ en $1-\mu$. Comme cela revient de surcroît à échanger les deux demi-espaces délimités par Q, cela revient donc à changer ν_3 en $V-\nu_3$. Par conséquent changer μ en $1-\mu$ revient à changer ν_3/V en $(1-\nu_3/V)$ et donc $f(1-\mu)=-1-f(\mu)$.

Question I.4.h

Remarques exaspérées : L'énoncé est évidemment faux : h n'est pas définie en 0 et 1. De plus soit j'ai raté un argument, ce qui est toujours possible, soit ces questions sont incroyablement non détaillées, posées dans un ordre infaisable et surtout obscures quant à leur véracité. Comment traiter ces questions sans avoir reconnu ab initio qu'il s'agit de la méthode de Newton et se souvenir des arguments conduisant à la preuve de sa convergence ? Le raisonnement est tout de même un poil plus fin que la méthode habituelle du point fixe, dite de Picard. De même il n'est nulle part fait remarquer que μ_0 est inférieur à $1/2$ etc.

Vérifions (!) qu'on est en train d'étudier l'algorithme de Newton. En effet on a pour tout réel x distinct de 0 et 1, on a

$$\frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{16x^3 - 24x^2 + 1}{48x(x-1)} \qquad \text{et donc} \qquad x - \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{32x^3 - 24x^2 - 1}{48x(x-1)} = h(x) \; .$$

La stratégie est la suivante : montrer que l'on a affaire à une suite récurrente attachée à une fonction ayant un unique point fixe dans un intervalle stable par cette fonction. On va donc commencer par voir si $[\mu_0; u_0]$ est stable par h et pour cela il faut deux ingrédients : la croissance de h pour créer une suite récurrente monotone, le fait que u_1 est inférieur à u_0 pour qu'on ait bien une suite décroissante. Pour la croissance de h, l'argument est le calcul de la dérivée de h en fonction de g et des signes de g et g''. Mais attention on ne peut pas travailler, comme semble le suggérer l'énoncé, sur $[0; 1/2]$. Pour l'inégalité $u_1 \leq u_0$, elle résulte de $h(x) - x = -g(x)/g'(x)$ et du signe de g et g' sur l'intervalle considéré. Néanmoins comme l'énoncé demande quelques lignes plus loin de calculer u_1, on utilisera juste son calcul pour en déduire l'inégalité voulue ...

Bref, revenons à la question. En tant que fonction polynomiale g est indéfiniment dérivable, comme f, et qu'on a $g' = f'$. En particulier g' est négative sur $[0; 1]$. De plus g'' est la fonction $x \mapsto 6(2x - 1)$ et donc g'' est négative sur $]-\infty; 1/2]$. Il en résulte que g et g' sont décroissantes sur $[0; 1/2]$.

Puisque h est une fraction rationnelle, elle est de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ et on a

$$h' = 1 - \frac{g' - gg''}{(g')^2} = \frac{gg''}{(g')^2} \; .$$

En particulier, comme g est négative sur $[\mu_0; 1[$ et g'' est négative sur $[0; 1/2]$ (par exemple parce que g' y est décroissante), h est croissante sur $[\mu_0; 1/2]$.

Sur un Ti-89 entrons la fonction h : `(32x^3-24x^2-1)/ (48x(x-1))`$\rightarrow$`h(x)`. Les commandes $h(1/2)$ et $h(1/4)$ permettent le calcul immédiat de u_1 et u_2. On obtient $u_1 = 1/4$, $u_2 = 2/9$. On a en particulier $u_1 \leq u_0$ et $u_1 = h(u_0) \geq h(\mu_0) = \mu_0$ par croissance de h sur $[\mu_0; u_0]$.

Montrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété H_n suivante :

$$(H_n) \qquad \mu_0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_0 \; .$$

Pour $n = 0$, c'est la propriété que l'on vient de noter.

Soit maintenant n un entier naturel quelconque pour lequel H_n est vraie. On a donc $\mu_0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_0$. Comme h est croissante sur $[\mu_0; u_0]$, il vient

$$\mu_0 = h(\mu_0) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq u_1 \leq u_0$$

et donc la propriété est héréditaire.

Le principe de récurrence permet donc d'affirmer que H_n est vraie pour tout entier naturel n et donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante minorée par μ_0. Elle est par conséquent convergente. Comme h est continue sur $[\mu_0; u_0]$, la limite de cette suite est un point fixe de h, i.e. un zéro de g, et c'est donc μ_0 puisque c'est l'unique zéro de g sur $]0; 1[$ et par suite sur $[\mu_0; u_0]$.

On a

$$g(0.22) = 0.001096 > 0$$

et donc, par décroissance de g sur $[0; 1/2]$, $\mu_0 > 0.22$. Il en résulte $0.22 < \mu_0 \leq u_2 = 2/9$ et donc

$$-0.001 < \mu_0 - 0.221 \leq \frac{11}{9000} < 2.10^{-3}$$

et par suite $|\mu_0 - 0.221| < 2.10^{-3}$ et 0.221 est une valeur approchée de μ_0 à 2.10^{-3} près.

Question I.4.i

Rappel : comme on est en train d'appliquer la méthode Newton, on a besoin de minorer g' et de majorer g'' sur l'intervalle d'étude. Ceci provient de la formule $h' = gg''/(g')^2$ et de l'inégalité des accroissements finis. Cette même formule montre que h' s'annule en le zéro de g (c'est là le principal intérêt de la méthode de Newton) et donc que l'accroissement de h autour du point fixe est donné en terme de h'', d'après la formule de Taylor-Lagrange. C'est pourquoi on cherche ici à majorer directement h''.

Comme h est une fraction rationnelle, il faut impérativement (à moins de préférer la dériver à la machine, ce qui suppose que l'on saura en exploiter le résultat, quelque soit sa forme) a réduire (somme de sa partie entière et d'une fraction telle que le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur) afin de la dériver. Une option encore meilleure est de la décomposer en éléments simple. Certaines machines le font automatiquement. Ici les pôles sont simples et peu nombreux, on peut donc le faire à la main !

La décomposition de h en éléments simples donne

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\} \qquad h(x) = \frac{4x+1}{6} + \frac{1}{48}\left(\frac{1}{x} + \frac{7}{x-1}\right)$$

et donc sa dérivée seconde est une somme à coefficients positifs de puissances cubiques inverses. C'est donc une fonction décroissante. On a plus précisément

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\} \qquad h''(x) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{7}{(x-1)^3}\right)$$

et donc

$$h''(0.2) = h''\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{24}\left(5^3 - \frac{7.5^3}{4^3}\right) = \frac{(4^3-7)5^3}{4^3.24} = \frac{57.5^3}{3.2^9} = \frac{5^3.19}{2^9} = \frac{2375}{512} \simeq 4.63867\,.$$

On aurait également pu le programmer à la calculatrice : à partir de la fonction h déjà entrée, on entre `d(h(x),x,2)`$\rightarrow$ `z(x)` et enfin la commande $z(1/5)$ fournit 2375/512 ou encore 4.63867....

On a donc bien $h''(0.2) \leq 5$ et donc h'' est inférieure à 5 sur $[0.2; 1/2]$ et donc a fortiori sur $[\mu_0; u_0]$. On pourrait noter qu'en sus on a

$$h''(u_0) = h\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

et donc h'' est compris entre -2 et 5 sur $[\mu_0; u_0]$. On ne s'en servira pas puisqu'on sait déjà que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont supérieurs à μ_0, par décroissance.

Remarquons qu'on a $h'(\mu_0) = 0$ puisque $g(\mu_0) = 0$. La formule de Taylor-Lagrange permet donc d'écrire

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad 0 \leq u_{n+1} - \mu_0 = h(u_n) - h(\mu_0) \leq \frac{(u_n - \mu_0)^2}{2} \sup_{\mu_0 \leq t \leq u_n} h''(t) \leq \frac{5}{2}(u_n - \mu_0)^2\,.$$

On obtient donc une meilleure inégalité que l'énoncé et une erreur est à redouter. D'ailleurs je ne vois pas comment faire aussi mal pour la fin de cette question.

En effet, on a $0.22 < \mu_0 \leq u_2$ et donc $0 \leq u_2 - \mu_0 < 2.10^{-2}/9$. Il en résulte

$$0 \leq u_4 - \mu_0 < \frac{5}{2}(u_3 - \mu_0)^2 < \frac{5^3}{2^3}(u_2 - \mu_0)^4 < \frac{2.5^3}{9^4.10^8} = \frac{1}{2^3.9^4.10^5} < 10^{-9}$$

et donc $u_4 \simeq 0.2210626508$ est une valeur approchée à 10^{-9} de μ_0. Même avec le facteur 5 au lieu de 5/2 on trouverait 2.10^{-9}, ce qui est toujours bien mieux que 10^{-7}. Je pense que le calcul proposé est fait en remontant à u_1 et avec le facteur 5, on obtient en effet

$$0 \leq u_4 - \mu_0 < 5^7(u_1 - \mu_0)^8 < 5^7(3.10^{-2})^8 = \frac{3^8}{2^7}10^{-9} \simeq 5,13.10^{-8} < 10^{-7}\,.$$

La dernière estimation résulte de la précédente puisque $5.(10^{-7})^2 = 5.10^{-14} < 10^{-13}$. Cela dit les inégalités que nous avons obtenues permettent de déduire

$$0 \le u_5 - \mu_0 < \frac{1}{2^5.9^8.10^9} < 10^{-19} .$$

N.B. : vu la difficulté de ces deux dernières questions, les erreurs qu'elles contiennent et l'absence de guide clair dans la formulation, on est en droit de se demander à qui elles étaient destinées, si elles ont un tant soit peu servi ceux et celles qui y ont passé du temps et si, de fait, ne serait-ce qu'un(e) candidat(e) en a traité une partie significative correctement.

Partie II

Question II.1.a

On a

$$\begin{aligned} AB^2 &= (2\sqrt{2})^2 + 4^2 = 24 \\ AC^2 = AD^2 &= (\sqrt{2})^2 + (\pm\sqrt{6})^2 + 4^2 = 2 + 6 + 16 = 24 \\ BC^2 &= (2\sqrt{6})^2 = 24 \\ BD^2 = CD^2 &= (3\sqrt{2})^2 + (\pm\sqrt{6})^2 = 18 + 6 = 24 . \end{aligned}$$

et donc T est bien un tétraèdre régulier d'arête $2\sqrt{6}$.

Le plan (BCD) est le plan passant par $(0, 0, -1)$ de direction $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et donc la projection orthogonale H_A de A sur (BCD) est $(0, 0, -1)$ et on a $AH_A = 4$. Par ailleurs BCD est un triangle équilatéral de côté $2\sqrt{6}$ et donc sa surface est $\sqrt{3}BC^2/4 = 6\sqrt{3}$.

La formule I.2 donne donc $V = 4\sqrt{3}$.

Question II.1.b

Il existe une unique application affine envoyant un tétraèdre régulier sur un autre et cette application affine est en fait une similitude. De plus c'est une isométrie si les deux tétraèdres ont même longueur d'arête. Par conséquent il existe une unique isométrie de l'espace permutant les sommets de T selon une permutation donnée.

Pour ρ dans Σ, la restriction de $\psi(\rho)$ à (A, B, C, D) est ρ et donc si ρ et σ sont dans Σ on a

$$\forall M \in \{A, B, C, D\} \qquad \psi(\rho) \circ \psi(\sigma)(M) = \psi(\rho)(\sigma(M)) = \rho \circ \sigma(M)$$

et donc $\psi(\rho) \circ \psi(\sigma) = \psi(\rho \circ \sigma)$, i.e. ψ est un homomorphisme du groupe Σ dans le groupe des isométries affines de l'espace.

Deux isométries ne saurait coïncider si elles ne coïncident pas sur le repère affine (A, B, C, D) et donc ψ est injective.

Notons par contre que la question de la surjectivité n'a pas de sens puisque l'énoncé n'a absolument pas précisé l'espace d'arrivée de ψ. Il semble implicite que ce soit le groupes des isométries affines de l'espace, mais ça va mieux en le disant.

Bref. La réponse attendue est : ψ n'est ni surjective ni bijective puisque Σ est fini et que ce n'est pas le cas du groupe des isométries affines de $\mathcal{E}$.

Question II.2

Une application affine préserve les barycentres et donc aussi les enveloppes convexes. Par conséquent si u appartient à Σ', il envoie T sur l'enveloppe convexe des images de (A, B, C, D) par u, i.e. u préserve globalement T.

Réciproquement une application affine u qui préserve T en préserve également les points extrémaux (puisque c'est une notion affine), i.e. u préserve globalement (A, B, C, D). D'après la question précédente u appartient à Σ'.

Question II.3.a

Puisque $\psi(\tau)$ préserve les barycentres, elle fixe O. Par conséquent pour vérifier que L_τ est la matrice donnée par l'énoncé, il suffit de vérifier que l'application linéaire associée à cette matrice échange les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ et fixe les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

Or $\overrightarrow{OA}= 3\ \overrightarrow{k}$ s'envoie sur $2\sqrt{2}\ \overrightarrow{\imath}\ -\ \overrightarrow{k}$, i.e. $\overrightarrow{OB}$. De même ce dernier vecteur s'envoie sur $(2\sqrt{2}/3 - 2\sqrt{2}/3)\ \overrightarrow{\imath}$ $+(8/3+1/3)\ \overrightarrow{k} = 3\ \overrightarrow{k}$, i.e. sur $\overrightarrow{OA}$. De plus $-\sqrt{2}\ \overrightarrow{\imath} \pm \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$ s'envoie sur $(-\sqrt{2}/3 - 2\sqrt{2}/3)\ \overrightarrow{\imath}\ \pm \jmath + (-4/3+1/3)\ \overrightarrow{k}$, i.e. sur $-\sqrt{2}\ \overrightarrow{\imath} \pm \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$.

Donc L_τ est bien, par unicité, la matrice fournie par l'énoncé.

Comme T est régulier, C et D appartiennent au plan médiateur de $[A;B]$ et donc la réflexion par rapport à ce plan échange A et B et fixe C et D ; c'est donc $\psi(\tau)$.

Ses valeurs propres sont donc 1 et -1. La multiplicité de 1 est 2 et le plan propre associé est le plan médiateur de $[A;B]$; ce dernier admet pour base $(\sqrt{2}\ \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\jmath})$. La multiplicité de -1 est 1 et la droite propre associée est la droite dirigée par $\overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{\imath} - \sqrt{2}\ \overrightarrow{k}$.

Question II.3.b

La rotation d'axe orienté $(O;\ \overrightarrow{k})$ et d'angle $-2\pi/3$ fixe A et fixe tout triangle équilatéral dans un plan perpendiculaire à $(O;\ \overrightarrow{k})$ et de centre sur cette droite. En particulier elle fixe globalement le triplet (B,C,D). Par choix de l'angle, elle envoie B sur un point de coordonnée selon $\overrightarrow{\jmath}$ négative, i.e. sur C. Il en résulte que $\psi(\rho)$ est une rotation d'axe $(O;\ \overrightarrow{k})$. Avec cette orientation c'est une rotation d'angle $-2\pi/3$ et avec l'orientation contraire c'est une rotation d'angle $2\pi/3$. Il en résulte

$$L_\rho = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de L_ρ sont 1, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$, chacune avec la multiplicité 1. Les espaces propres associés sont les droites respectivement engendrées par $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{\imath} + i\ \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{\imath} - i\ \overrightarrow{\jmath}$.

Question II.3.c

Remarque : la question posée n'a aucun sens puisque l'énoncé ne précise pas d'orientation pour le plan médiateur de $[M_{AC}; M_{BD}]$.

L'isométrie $\psi(\rho_3)$ préserve les barycentres et envoie donc le milieu de $[A;C]$ sur le milieu de $[\rho(A);\rho(C)]$, i.e. le milieu de $[B;D]$. Comme on a $(A+B+C+D)/4 = O$, on a aussi $(M_{AC}+M_{BD})/2 = O$, i.e. M_{AC} et M_{BD} sont symétrique par rapport à O. Notons que M_{AC}, O et M_{BD} sont distincts sinon (AC) et (BD) seraient coplanaires. Notons enfin que $\psi(\rho_3)$ envoie également M_{BD} sur M_{AC}. Par conséquent un point équidistant de M_{AC} et M_{BD} est envoyé sur un point équidistant de leurs images, i.e. d'eux-mêmes : le plan médiateur de $[M_{AC}; M_{BD}]$ est globalement fixe par $\psi(\rho_3)$. Notons Π ce plan.

Puisque le tétraèdre est régulier A et C appartiennent au plan médiateur de $[B;D]$ et donc les droites (AC) et (BD) sont orthogonales. Comme M_{AC} et O sont équidistants de A et C, la droite (OM_{AC}), qui n'est autre que la droite $(M_{AC}M_{BD})$, est perpendiculaire à (AC) et en fait $(M_{AC}M_{BD})$ est la perpendiculaire commune à (AC) et (BD).

Notons A', B', C' et D' les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur Π. On a $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{M_{AC}A}$ et donc l'image de ce vecteur est $\overrightarrow{M_{BD}B}$, i.e. $\overrightarrow{OB'}$. Par conséquent $\psi(\rho_3)$ envoie A' sur B' et, plus généralement, $\psi(\rho_3)$ permute circulairement les points $(A'B'C'D')$. L'unique application affine du plan Π qui a cette propriété est la rotation de centre O qui envoie A' sur B' et dont un angle peut être choisi de mesure $\pi/2$ si on oriente Π selon $(O; \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'C'})$.

Puisque Π et $(M_{AC}M_{BD})$ sont stables par $\psi(\rho_3)$, leurs directions le sont par $\overrightarrow{\psi(\rho_3)}$. Les calculs précédents montrent que $\overrightarrow{\psi(\rho_3)}$ y a respectivement les valeurs propres i et $-i$, et -1. Par conséquent L_{ρ_3} admet -1, i et $-i$ comme valeurs propres et son polynôme caractéristique est $(X^2+1)(X+1) = X^3+X^2+X+1$ (ce qui n'est guère étonnant puisque $\rho_3^4 = Id$, et donc $L_{\rho_3}^4 = 1$).

Puisque $\rho_3 = \tau\sigma$, d'après I.1.b, on a $\psi(\rho_3) = \psi(\tau)\psi(\sigma)$ et donc $L_{\rho_3} = L_\tau L_\sigma$.

Il vient

$$L_{\rho_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Et le polynôme caractéristique de L_{ρ_3} est donc (mais vraiment, à quoi sert cette question ? une machine sait le faire et on l'a déjà obtenu différemment ...) :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} X+\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & X+\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & X+\frac{1}{3} \end{vmatrix} &= \left(X+\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} X+\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & X+\frac{1}{2} \end{vmatrix} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & X+\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} \\
&= \left(X+\frac{1}{3}\right)\left(X^2+\frac{2}{3}X+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}X\right) \\
&= \left(X+\frac{1}{3}\right)\left(X^2+\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}X\right) \\
&= X^3+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)X^2+\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\right)X+\frac{1}{9}+\frac{8}{9} \\
&= X^3+X^2+X+1\,.
\end{aligned}$$

Non ? Si, si. Amusant, non ?

Question II.3.d

On a $\rho_4 = \rho_3^2$ et donc $\psi(\rho_4)$ est le retournement d'axe $(M_{AC}M_{BD})$. Ses valeurs propres sont donc 1 et -1, avec les multiplicités respectives 1 et 2. Ainsi le polynôme caractéristique de L_{ρ_4} est $(X-1)(X+1)^2$ ou encore X^3+X^2-X-1.

Question II.4

Il serait logique de refuser de faire cette question pour ne la traiter qu'après II.5.c. Il serait également agréable de souligner qu'elle facilite grandement la compréhension de II.5.d. En effet les points de Ω tels que le segment $[O;M]$ coupe une face du tétraèdre donnée, disons (A,B,C), sont les points compris entre les trois grands cercles passants par (AB), (AC) et (BC) et donc, dans le plan (θ,ϕ), ce sont les points compris entre les courbes correspondantes. De sorte que le plan est compartimenté en quatre fenêtres correspondant aux quatre faces de T.

Notons que deux cercles se coupent en au plus deux points. Comme ces cercles sont de centre O, ils sont symétriques par rapport à O et donc leurs deux points d'intersection éventuels sont symétriques par rapport à O. Notons que deux plans passant par O se coupant en une droite passant par O, l'intersection de deux grands cercles est l'intersection de la sphère avec la droite intersection des plans de ces cercles et, ainsi, deux grands cercles sont toujours sécants en exactement deux points.

Notons que tout sommet du tétraèdre est point triple puisqu'il appartient aux grands cercles passant par lui-même et l'un des trois autres sommets. Il en est donc de même de son symétrique par rapport à O (symétrique que l'on nommera antipode par la suite).

Si deux grands cercles correspondent à deux couples de sommets ayant un point en commun, ce sommet commun est l'un des points d'intersection des cercles et donc l'autre est son antipode.

Si maintenant deux grands cercles correspondent à deux couples de sommets sans point commun, ils ne peuvent se couper en des sommets du tétraèdre car sinon trois sommets seraient sur un grand cercle, seraient donc coplanaires avec O et donc, puisque O est le centre de T, les quatre sommets seraient coplanaires, ce qui n'est pas. Ainsi ces deux cercles ne se coupent ni sur un sommet ni sur un de leurs antipodes. Ces deux points d'intersection ne peuvent appartenir à un autre grand cercle passant par deux sommets, sinon ce troisième grand cercle aurait au moins un sommet en commun avec l'un des deux précédents grands cercles et le couperait donc selon ce sommet et son antipode, et ne saurait donc avoir un troisième point d'intersection.

Ainsi il y a huit points triples (les sommets de T et leurs antipodes, qui sont distincts deux à deux) et six points simples (les intersections des grands cercles passant par (AB) et (CD), par (AC) et (BD) et par (AD) et (BC)).

Les plans (OAB) et (OCD) admettent pour équation $y=0$ et $x-\sqrt{2}z=0$. Ainsi l'intersection de ces deux plans avec la sphère circonscrite à T (i.e. la sphère de centre O et de rayon 3) sont les points $(3,\arctan(\sqrt{2}/2),0)$ et $(3,-\arctan(\sqrt{2}/2),\pi)$.

Les autres points s'obtiennent par application de σ et σ^2, i.e. en ajoutant $-2\pi/3$ ou $2\pi/3$ à θ. Pour résumer cela les points simples ont pour coordonnées sphériques :

$$\left(3, (-1)^k \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{k\pi}{3}\right)$$

pour k variant entre 0 et 5.

Question II.5.a

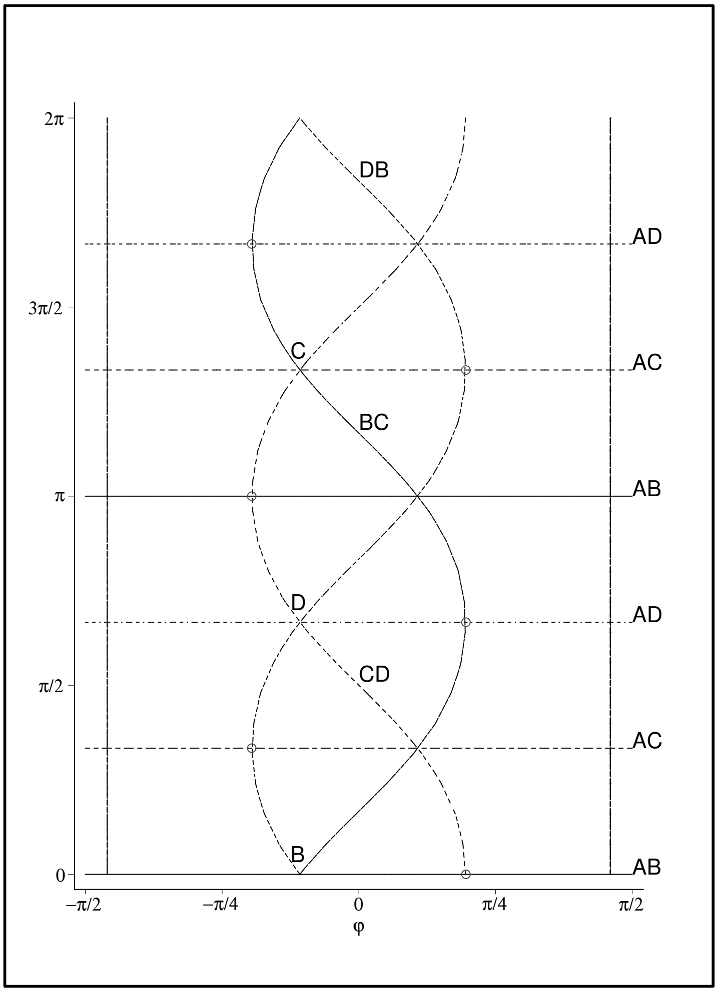
Le plan (OCD) ayant pour équation $x - \sqrt{2}z = 0$, son intersection avec Ω est un point vérifiant $\cos\phi\cos\theta - \sqrt{2}\sin\phi = 0$ ou encore $\sqrt{2}\tan\phi - \cos\theta = 0$ (la division par $\cos\phi$ étant licite puisque si ce dernier était nul, l'équation imposerait la nullité de $\sin\phi$ et cela est impossible puisque l'un des deux au moins n'est pas nul).

Question II.5.b

Pour le grand cercle passant par (AB) on trouve $\sin(\theta) = 0$ et donc, par application de σ, les relations pour les grands cercles passant par (AC) et (AD) ont pour équations respectives $\sin(\theta + 2\pi/3) = 0$ et $\sin(\theta - 2\pi/3) = 0$.

Pour le grand cercle passant par (CD) on a trouvé $\sqrt{2}\tan\phi = \cos\theta$ et donc, par application de σ, les relations pour les grands cercles passant par (DB) et (BC) sont $\sqrt{2}\tan\phi = \cos(\theta + 2\pi/3)$ et $\sqrt{2}\tan\phi = \cos(\theta - 2\pi/3)$.

Question II.5.c



Question II.5.d

Considérons le plan (BCD). Il admet $z = -1$ comme équation et donc les points de ce plan à une distance r de O (avec $r \geq 1$) sont les points de coordonnées $(\sqrt{r^2-1}\cos\theta, \sqrt{r^2-1}\sin\theta, -1)$ pour un θ réel quelconque. Comme il est à une distance r de O, les coordonnées sphériques de ce point sont $(r, \arcsin(-1/r), \theta)$. De sorte qu'un point M tel que N appartienne au plan (BCD) admet pour coordonnées sphériques $(3, \arcsin(-1/F(M)), \theta)$. Néanmoins le point N n'est pas nécessairement intérieur au triangle (BCD). Pour cela il faut qu'il soit dans la fenêtre correspondant à (BCD) i.e. entre les trois courbes représentant les trois grands cercles (BC), (CD) et (BD).

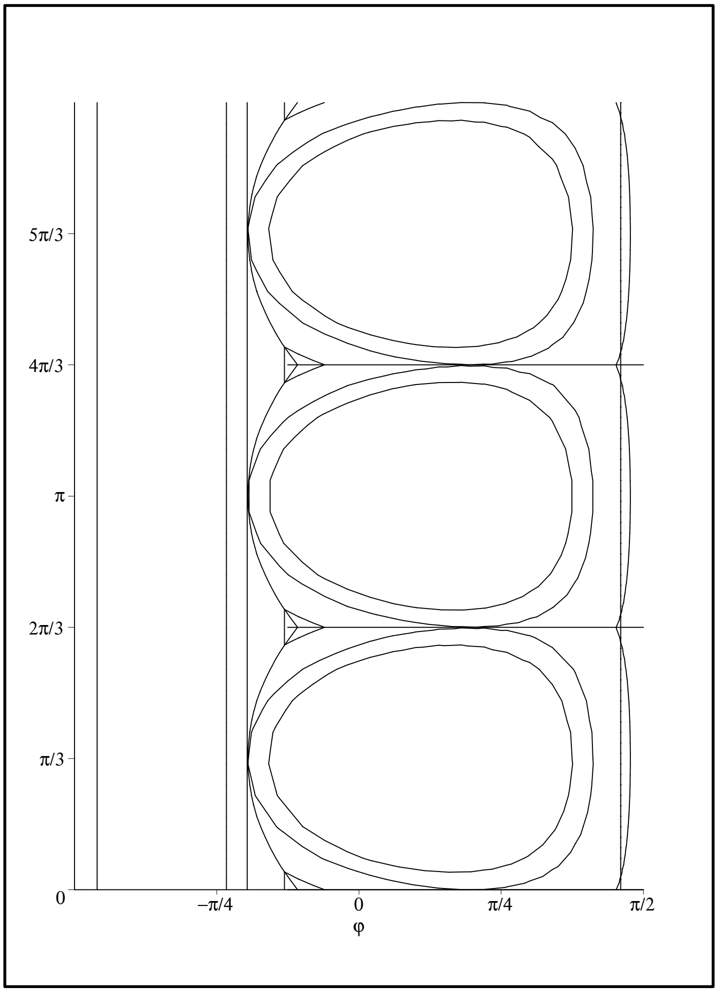
Notons que la distance de O à une arête de T ne dépend pas de l'arête. Comme la droite (CD) admet pour équation $z+1 = x+\sqrt{2} = 0$, la distance de O à une arête est la distance de O à $(-\sqrt{2}, 0, -1)$, i.e. $\sqrt{3}$. Ainsi pour $1 \leq F(M) \leq \sqrt{3}$ il n'y a pas de restriction à apporter à l'équation $\phi = \arcsin(-1/F(M))$, mais pour $\sqrt{3} < F(M) \leq 3$ il faudra tronquer cette équation avec les équations des grands cercles (BC), (CD) et (BD), i.e. rajouter les inéquations

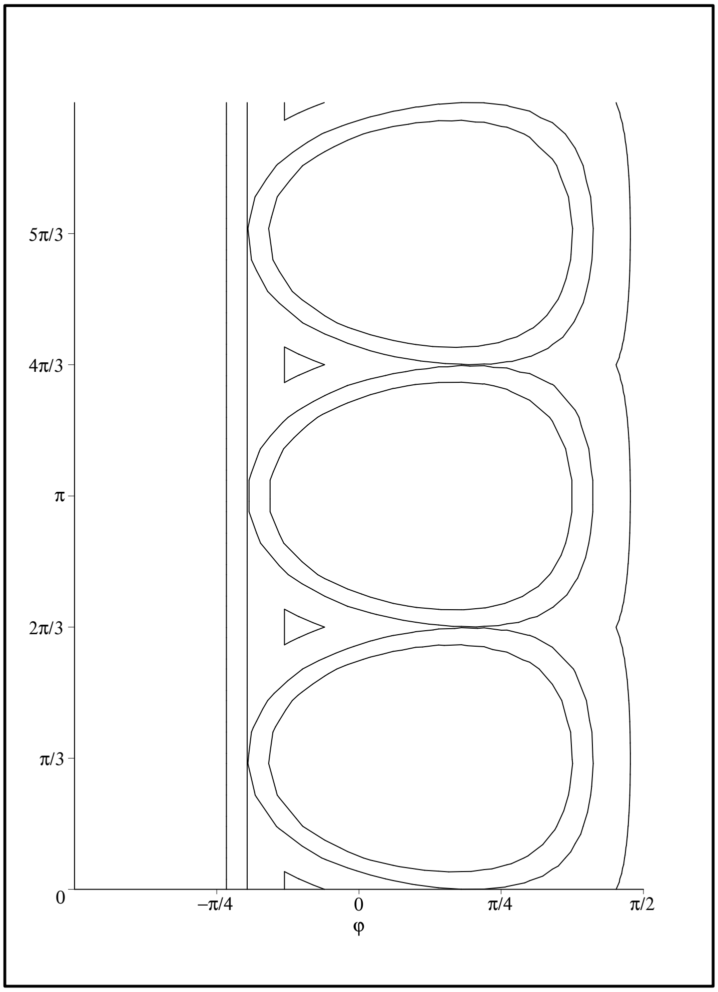
$$\sqrt{2}\tan\phi \leq \cos\theta \qquad \sqrt{2}\tan\phi \leq \cos(\theta + 2\pi/3) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2}\tan\phi \leq \cos(\theta - 2\pi/3)\ .$$

Enfin, pour $F(M)$ strictement supérieur à 3, il n'y aucun point M répondant au critère.

Pour obtenir la portion de courbe correspondante à (ACD), il suffit d'échanger le rôle de A et B, i.e. d'appliquer $\psi(\tau)$. On trouve la courbe générale $F(M)(2\sqrt{2}\cos\phi\cos\theta - \sin\phi) + 3 = 0$ tempérée par la restriction, si $\sqrt{3} < F(M) \leq 3$, obtenue par les grands cercles, i.e. $2\pi/3 \leq \theta \leq 4\pi/3$ et $\sqrt{2}\tan\phi \leq \cos\theta$.

Enfin on applique σ (i.e. on ajoute ou on retranche $2\pi/3$ à θ) pour trouver les portions de ligne de niveau correspondant à (ADB) et (ABC). On obtient les courbes suivantes :




5π/3
4π/3
π
2π/3
π/3
0
−π/4
0
π/4
π/2
φ