Première épreuve CAPES externe 2001

François Sauvageot

20 novembre 2001

Partie I

Question I.1
On a

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \qquad f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$$

et donc f est à valeurs positives.

Question I.2
Si f est nulle en 0 alors, pour tout réel positif x, on a $f(x) = f(x)f(0) = 0$ et donc f est identiquement nulle sur $\mathbf{R}_+$.

Question I.3
Soit x un réel positif pour lequel f ne s'annule pas. On a $f(x) = f(x)f(0)$ et donc $f(0) = 1$.

Question I.4
Pour k entier naturel non nul, soit (H_k) la propriété

$$(H_k) \qquad \forall y \in \mathbf{R}_+ \quad f(ky) = f(y)^k \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{k}y\right) = f(y)^{1/k} \ ,$$

où, par convention, $0^{1/k}$ vaut 0, i.e. $y \mapsto y^{1/k}$ est définie de $\mathbf{R}_+$ dans lui-même comme la fonction réciproque de $y \mapsto y^k$.
La propriété (H_1) s'écrit : $\forall y \in \mathbf{R}_+$ $f(y) = f(y)$ et elle est donc vraie. Soit maintenant k un entier naturel non nul tel que (H_k) soit vraie. On a

$$\forall y \in \mathbf{R}_+ \qquad f\left((k+1)y\right) = f(ky)f(y) = f(y)^{k+1}$$

et donc

$$\forall y \in \mathbf{R}_+ \qquad f(y) = f\left(\frac{1}{k+1}y\right)^{k+1} \ .$$

La propriété (H_k) est donc héréditaire et le principe de récurrence permet en particulier de conclure

$$f(nx) = f(x)^n \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{1}{n}x\right) = f(x)^{1/n} \ .$$

Question I.5
On a

$$f(x)^p = f(px) = f(qrx) = f(rx)^q \ .$$

On définit $y \mapsto y^r$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ par 0 en 0 et par la formule $\exp(r \log(x))$ sinon (c'est alors une fonction continue). Cette définition est indépendante de l'écriture de r comme quotient de nombres entiers et on a, pour y et z dans $\mathbf{R}_+$, $y^p = z^q$ si et seulement si $z = y^r$.

Il en résulte $f(rx) = f(x)^r$.

Question I.6.1
Soit α un zéro de f dans $\mathbf{R}_+^*$. Pour n entier naturel on pose $x_n = \alpha/(n+1)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, tendant vers 0. De plus, d'après I.5, pour tout entier naturel n, on a $f(x_n) = f(\alpha)^{1/(n+1)} = 0$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie bien les propriétés requises par l'énoncé.

Question I.6.2
Soit a un réel strictement positif et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite comme en I.6.1. Puisqu'on a affaire à une suite tendant vers 0, il existe un entier n pour lequel x_n est inférieur à a. On a alors $f(a) = f(a - x_n)f(x_n) = 0$.
Il en résulte que f est identiquement nulle sur $\mathbf{R}_+^*$.

Question I.7
Soit x un réel positif. Par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, il existe un suite de rationnels, strictement décroissante, tendant vers x. Ces rationnels sont alors tous strictement positifs. Notons $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une telle suite.
Puisque f est à valeurs strictement positives, il existe un réel a tel que $f(1) = \exp(a)$. Il vient alors, par continuité à droite de f en x et par continuité de l'exponentielle,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} f(1)^{r_n} = \lim_{n\to+\infty} \exp(ar_n) = \exp(ax)$$

et donc

$$\exists a \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{R}_+ \qquad f(x) = e^{ax}\ .$$

Question I.8
Soit x un réel positif et $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers 0. Par hypothèse la suite $(f(h_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est donc convergente vers $f(0)$, c'est-à-dire 1. On a

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad f(x + h_n) = f(x)f(h_n)$$

et donc la suite $(f(x + h_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, de limite $f(x)$, i.e. f est continue à droite en x. Il en résulte que f est continue à droite sur $\mathbf{R}_+$.
Par conséquent si f vérifie l'équation fonctionnelle (1), n'est pas identiquement nulle sur $\mathbf{R}_+^*$ et est continue à droite en 0, c'est une exponentielle.

Question I.9.1
Soit M un majorant de f sur $[A, B]$. Puisque f est à valeurs strictement positives, on a

$$\forall x \in [0, B - A] \qquad \begin{cases} f(x) = \frac{f(x+A)}{f(A)} = \frac{f(B)}{f(B-x)} \\ 0 < f(x + A) \leq M \\ 0 < f(B - x) \leq M \end{cases}$$

et donc f est bornée sur $[0, B - A]$, majorée par $M/f(A)$ et minorée par $f(B)/M$. En particulier sa borne inférieure est strictement positive, puisque supérieure à $f(B)/M$.

Question I.9.2
Soit $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 et a et b des réels tels que, pour tout x dans $[0, B - A]$, on ait $0 < a \leq f(x) \leq b$. Comme $A < B$ et comme la suite $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs strictement positives et tend vers 0, la suite $((B - A)/h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs strictement positives et tend vers $+\infty$. Il en est donc de même de la suite des parties entières $(E[(B - A)/h_n])_{n\in\mathbf{N}}$. Il vient alors

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad f(h_n) = f\left(h_n E\left[\frac{B - A}{h_n}\right]\right)^{1/E[(B-A)/h_n]}$$

et donc
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad a^{1/E[(B-A)/h_n]} \leq f(h_n) \leq b^{1/E[(B-A)/h_n]} \ .$$
Le théorème d'encadrement des limites assure donc que $(f(h_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ et il en résulte que f est continue à droite en 0.

Partie II

Question II.1.1

Remarquons que la fonction ψ définie sur T_R par $\psi(t,x) = \phi(t,x) - \phi(t,t)$ est continue en tant que différence de telles fonctions, puisque l'application $t \mapsto (t,t)$, définie sur $[0,R]$, est continue et à valeurs dans T_R.

Soit Δ_R l'ensemble $\{(t,t) \mid 0 \leq t \leq R\}$. Notons T'_R le triangle opposé à T_R, i.e. l'adhérence de $C_R \setminus T_R$. On a donc $T_R \cap T'_R = \Delta_R$.

La fonction nulle, définie de T'_R dans $\mathbf{R}$, est continue et coïncide avec ψ sur Δ_R. Il en résulte que v est continue sur C_R.

Remarque : on pourrait montrer plus prosaïquement que v est continue sur l'intérieur des deux triangles T_R et T'_R en tant que restriction de fonctions continues à un ouvert, puis montrer qu'elle est continue en tout point de Δ_R en calculant les limites pour des suites à valeurs dans T_R ou dans $C_R \setminus T_R$.

Question II.1.2

Notons, pour z et z' dans $[0,R]$,
$$\alpha(z) = \int_0^z \left(\int_0^x k(t)dt\right) dx \qquad \text{et} \qquad B(z,z') = \int_0^z \left(\int_t^{z'} k(t)dx\right) dt = \int_0^z (z'-t)k(t)dt \ .$$
Par continuité de k, les deux fonctions α et B sont de classe C^1 sur $[0,R]$ et C_R respectivement. Posons, pour z dans $[0,R]$, $\beta(z) = B(z,z)$. C'est également une fonction de classe C^1 sur $[0,R]$, par composition. Comme α etβ sont nulles en 0, leur égalité est équivalente à l'égalité de leurs dérivées. Or on a
$$\forall z \in [0,R] \qquad \alpha'(z) = \int_0^z k(t)dt$$
et, par dérivation sous le signe somme en z',
$$\forall z \in [0,R] \qquad \beta'(z) = \frac{\partial B}{\partial z}(z,z) + \frac{\partial B}{\partial z'}(z,z) = [(z'-z)k(z)]_{z'=z} + \int_0^z k(t)dt = \int_0^z k(t)dt$$
et il en résulte
$$\forall z \in [0,R] \qquad \int_0^z \int_0^x k(t)dt.dx = \int_0^z \int_t^z k(t)dx.dt \ .$$
Remarques : il me semble plus pratique de raisonner par intégration par parties, mais l'énoncé insiste sur la nécessité de dériver. On a en fait
$$\forall z \in [0,R] \qquad \beta(z) = \int_0^z (z-t)k(t)dt = \left[(z-x)\int_0^x k(t)dt\right]_0^z + \int_0^z \int_0^x k(t)dt = \alpha(z) \ .$$

Question II.1.3
Soit k la fonction définie sur $[0, R]$ par $t \mapsto \phi(t, t)$. C'est une fonction continue et on a donc, en utisant II.1.2 et le théorème admis

$$\begin{aligned}
\int_0^R \left(\int_0^x \phi(t,x)dt\right) dx &= \int_0^R \left(\int_0^x v(t,x)dt\right) dx + \int_0^R \left(\int_0^x k(t)dt\right) dx \\
&= \int_0^R \left(\int_0^R v(t,x)dt\right) dx + \int_0^R \left(\int_0^x k(t)dt\right) dx \\
&= \int_0^R \left(\int_0^R v(t,x)dx\right) dt + \int_0^R \left(\int_t^R k(t)dx\right) dt \\
&= \int_0^R \left(\int_t^R v(t,x)dx\right) dt + \int_0^R \left(\int_t^R k(t)dx\right) dt \\
&= \int_0^R \left(\int_t^R \phi(t,x)dx\right) dt \ ,
\end{aligned}$$

ce qui est l'identité (2).

Question II.2.1
Soit F la fonction définie sur $\{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid 0 \leq y \leq x\}$ par

$$F(x,y) = \int_0^y f(x-t)g(t)dt \ .$$

C'est une fonction continue sur son ensemble de définition par continuité des intégrales à paramètres. Comme, pour x dans $\mathbf{R}_+$, on a $f * g(x) = F(x, x)$, $f * g$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, i.e. la loi $*$ est une loi de composition interne sur $C(\mathbf{R}_+)$.

Question II.2.2
Cette égalité résulte de l'identité (2) appliquée à la fonction ϕ définie sur T_R par $\phi(t, x) = f(x - t)g(t)$. En effet cette application est continue comme produit de telles applications et on a

$$\int_0^R f*g(x)dx = \int_0^R \left(\int_0^x \phi(t,x)dt\right) dx = \int_0^R \left(\int_t^R \phi(t,x)dx\right) dt = \int_0^R g(t) \left(\int_t^R f(x-t)dx\right) dt$$

ce qui est bien la formule demandée par changement de variable affine dans la seconde intégrale :

$$\int_t^R f(x-t)dx = \int_0^{R-t} f(x)dx \ .$$

Question II.2.3
Par positivité de f on a

$$\forall t \in [0, R] \quad \int_0^{R-t} f(x)dx \leq \int_0^R f(x)dx$$

et donc, par intégration et grâce à la formule établie en II.2.2,

$$\int_0^R f*g(x)dx \leq \int_0^R f(x)dx \int_0^R g(t)dt \ .$$

Par positivité de g et f on a

$$\int_0^R g(t) \left(\int_t^R f(x-t)dx\right) dt \geq \int_0^{R/2} g(t) \left(\int_0^{R-t} f(x)dx\right) dt \geq \int_0^{R/2} f(x)dx \int_0^{R/2} g(t)dt$$

et l'encadrement recherché en résulte.

Question II.2.4
Le deux termes extrémaux de l'encadrement établi en II.2.3 ont une même limite lorsque R tend vers l'infini. Le théorème d'encadrement des limites assure donc

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R f * g(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R f(x)dx \int_0^R g(t)dt$$

i.e. l'intégrale impropre de $f * g$ sur $\mathbf{R}_+$ existe et vaut le produit des intégrales impropres de f et g.

Question II.3.1
On a

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad f_\lambda^{*2}(x) = \int_0^x f_\lambda(x-t)f_\lambda(t)dt = \lambda^2 e^{\lambda x} \int_0^x dt = \lambda x f_\lambda(x) \ .$$

Question II.3.2
Pour n entier naturel non nul, soit (H_n) la propriété

$$(H_n) \qquad \forall x \in \mathbf{R}_+ \quad f_\lambda^{*n}(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} f_\lambda(x) \ .$$

La propriété (H_1) s'écrit $f_\lambda = f_\lambda$ et est donc vraie. Soit maintenant n un entier naturel non nul tel que (H_n) soit vraie. On a

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad f_\lambda^{*(n+1)}(x) = \int_0^x f_\lambda(x-t)f_\lambda^{*n}(t)dt = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}\int_0^x t^{n-1}dt = \frac{\lambda^n x^n}{n!} f_\lambda(x) \ .$$

La propriété (H_n) est donc héréditaire et le principe de récurrence permet de conclure

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \forall x \in \mathbf{R}_+ \quad f_\lambda^{*n}(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \ .$$

Partie III

Question III.1.1
Par définition on a, pour tout réel x, $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})1_{x\geq 0}$ où $1_{x\geq 0}$ vaut 1 si x est positif et 0 si x est strictement négatif.

Question III.1.2
Soit s et t deux réels positifs, on a

$$P(X > s+t \mid X > t) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} = \frac{1 - F_X(s+t)}{1 - F_X(t)} = e^{-\lambda s} = 1 - F_X(s) = P(X > s)$$

et l'assertion suit.

Question III.2.1
Soit x et y deux réels positifs. On a

$$G_T(x+y) = P(T > x+y) = P(T > x+y \mid T > y)P(T > y) = P(T > x)P(T > y) = G_T(x)G_T(y)$$

i.e. G_T vérifie l'équation fonctionnelle (1).

Question III.2.2
Cette question est mal posée. En effet il faudrait supposer clairement que T est une variable aléatoire réelle presque surement strictement positive. Ce que nous ferons par la suite.
Si G_T était identiquement nulle sur $\mathbf{R}_+^*$, on aurait

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \qquad P(T \leq x) = 1$$

et donc T serait presque surement négative ; ceci est contradictoire avec l'hypothèse faite sur T et donc G_T n'est pas identiquement nulle sur $\mathbf{R}_+^*$.
Par ailleurs G_T est majorée sur $\mathbf{R}_+$ par 1 et donc a fortiori sur tout intervalle de longueur strictement positive inclus dans $\mathbf{R}_+$.
La question I.9 permet donc de conclure que G_T est une exponentielle, i.e. il existe un réel a tel que, pour tout réel positif x, on a $G_T(x) = e^{ax}$. Par ailleurs G_T est décroissante et non constante ; par conséquent a est strictement négatif. Autrement dit il existe λ réel strictement positif tel que, pour tout réel positif x, $G_T(x) = e^{-\lambda x}$, ou encore $F_T(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Autrement dit T suit une loi exponentielle.

Question III.3.1
La variable aléatoire S_n représente le temps d'attente pour le réseau pour recevoir exactement n messages depuis l'instant initial.

Question III.3.2
La probabilité cherchée est égale à $P(T_1 > t)$, soit $e^{-\lambda t}$.

Question III.3.3
La probabilité cherchée est égale à $P(S_2 > t)$. Or

$$\begin{aligned} P(S_2 > t) &= 1 - \int_0^t \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - \int_0^{\lambda t} u e^{-u} du \\ &= 1 - \left[-(1+u)e^{-u}\right]_0^{\lambda t} \\ &= (1+t)e^{-\lambda t} . \end{aligned}$$

Question III.3.4
La probabilité cherchée est égale à $P(S_{n+1} > t)$. Or

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} > t) &= 1 - \int_0^t \lambda^{n+1} x^n e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - \int_0^{\lambda x} u^n e^{-u} du \\ &= 1 - \left[-e^{-u} . \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!}\right]_0^{\lambda t} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}\right) e^{-\lambda t} . \end{aligned}$$

Question III.3.5
La probabilité cherchée est égale à $P(S_n \le t < S_{n+1})$. Or l'événement $(S_n > t)$ est inclus dans l'événement $(S_{n+1} > t)$ et donc
$$(S_n \le t < S_{n+1}) = (S_{n+1} > t) \setminus (S_n > t)$$
et la probabilité cherchée est donc $P(S_{n+1} > t) - P(S_n > t)$, soit, d'après le calcul précédent $t^n e^{-t}/n!$.

Question III.3.6
Soit k un entier naturel, l'événement $(N_t = k)$ est égal à l'événement $(S_n \le t < S_{n+1})$ et il en résulte que N_t est bien une variable aléatoire. Sa loi est donnée par
$$P(N_t = n) = \frac{t^n}{n!} e^{-t}$$
et donc N_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

Partie IV

Question IV.1
La variable aléatoire M_n représente le nombre maximal de messages reçus durant une unité de temps, depuis l'instant initial jusqu'au temps n (non inclus).

Question IV.2
Pour n et m entiers naturels, avec n non nul, on a $(M_n \le m) = \cap_{i=1}^n (A_i \le m)$ et donc, par indépendance de $(A_1, \dots, A_n)$, il vient
$$P(M_n \le m) = \prod_{i=1}^n P(A_i \le m) = \prod_{i=1}^n (1 - G_Y(m)) = (1 - G_Y(m))^n \; .$$

Question IV.3.1
Soit m un entier naturel strictement supérieur à $\mu - 2$. Par définition, on a
$$G_Y(m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$
et donc, par positivité des termes de la série, il vient $G_Y(m) \ge e^{-\mu}\mu^{m+1}/(m+1)!$. De plus, pour tout entier k supérieur à $m+1$ on a $k! \ge (m+1)!(m+2)^{k-m-1}$ et donc, puisque $\mu/(m+2) < 1$,
$$G_Y(m) \le \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\mu^k}{(m+1)!(m+2)^{k-m-1}} e^{-\mu} = \frac{\mu^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\mu} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu^k}{(m+2)^k} = \frac{\mu^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\mu} \frac{1}{1 - \frac{\mu}{m+2}} \; .$$
L'encadrement souhaité en résulte.

Question IV.3.2
Pour m entier assez grand, on a $m > \mu - 2$ et donc l'encadrement précédent est valable. D'après le théorème d'encadrement des limites et le fait que $\lim_{m \to +\infty} \mu/(m+2) = 0$, il vient $G_Y(m) \sim e^{-\mu}\mu^{m+1}/(m+1)!$.

Question IV.3.3
Par multiplication des équivalents, il vient $G_Y(m+1)/G_Y(m) \sim \mu/m$.

Question IV.4.1
Remarquons que la définition est licite puisque, d'après IV.3.1, G_Y est à valeurs strictement positives.

Par définition et par continuité des exponentielles sur $\mathbf{R}$, G_C est continue sur $[-1;+\infty[$ sauf peut-être en les entiers relatifs où elle est contiunue à droite et limitée à gauche. En particulier G_C est continue en -1. De plus, si n est un entier naturel, on a

$$\lim_{x\to n^-} G_C(x) = G(n-1)\frac{G_C(n)}{G_C(n-1)} = G_C(n) = \lim_{x\to n^+} G_C(x)$$

et donc G_C est continue sur $[-1;+\infty[$.

Question IV.4.2
La fonction G_Y est strictement croissante et donc G_C est définie par des exponentielles de bases comprises entre 0 et 1 strictement. En particulier G_C est strictement décroissante sur tout intervalle de la forme $[n,n+1[$, où n est un entier supérieur à -1. Par continuité, G_C est en fait strictement décroissante sur les adhérences des intervalles précédents et donc finalement sur $[-1;+\infty[$ tout entier.

Question IV.4.3
Puisque G_C est continue et strictement monotone, elle définit un homéomorphisme de son ensemble de définition sur son image. On a $G_C(-1)=1$ puisque Y est à valeurs positives. De plus G_Y tend vers 0 en l'infini d'après IV.3.2. Par monotonie et positivité, il en résulte que G_C tend également vers 0 en l'infini. Aussi l'image de G_C est l'intervalle $]\lim_{x\to+\infty} G_C(x);G(0)]$, soit encore $]0;1]$. Il en résulte que G_C réalise un homéomorphisme entre $[-1;+\infty[$ et $]0;1]$.

Question IV.5.1
Soit m un entier naturel. On a

$$G_C\left(m+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{G_Y(m)G_Y(m+1)} \qquad \text{et donc} \qquad \alpha_m = \sqrt{\frac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)}} = \frac{G_Y(m+1)}{G\left(m+\frac{1}{2}\right)}\ .$$

Question IV.5.2
De IV.3.3, il vient $\alpha_m \sim \sqrt{\mu}/\sqrt{m}$ lorsque m tend vers l'infini et donc la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est convergente et tend vers 0.

Question IV.6.1
Puisque G_C réalise un homéomorphisme décroissant de $[-1;+\infty[$ sur $]0;1]$, G_C^{-1} réalise un homémorphisme décroissant de $]0;1]$ vers $[-1;+\infty[$. En particulier $\lim_{x\to 0^+} G_C^{-1}(x) = +\infty$ et donc $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ diverge vers $+\infty$. Il en est de même pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Question IV.6.2
Remarque : je présume qu'il faut lire G_C et non G_c dans le texte.
Comme G_C est à valeurs strictement positives, la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbf{N}}$ l'est aussi. Soit n un entier naturel non nul. Par décroissance de G_C on a

$$0 < \frac{G_C(I_n+1)}{\alpha_{I_n}} = G_C\left(I_n+\frac{1}{2}\right) \le G_C(a_n) = \frac{1}{n}$$

ce qui entraîne, par positivité de α_{I_n},

$$0 < G_C(I_n+1) \le \frac{\alpha_{I_n}}{n}\ .$$

De plus

$$G_C(I_n-1)\alpha_{I_n-1} = G_C\left(I_n-\frac{1}{2}\right) \ge G_C(a_n) = \frac{1}{n}$$

et donc

$$G_C(I_n-1) \ge \frac{1}{n\alpha_{I_n-1}}\ .$$

Question IV.7
Il résulte de ce qui précède et de IV.5.2, $nG_C(I_n+1)=o(1)$ et donc $n\log(1-G_C(I_n+1))=o(1)$. Or

$$\forall n\in\mathbf{N}^* \quad (1-G_Y(I_n+1))^n=(1-G_C(I_n+1))^n=\exp\left(n\log\left((1-G_C(I_n+1)\right)\right)$$

et donc, par continuité de l'exponentielle en 0,

$$\lim_{n\to+\infty}(1-G_Y(I_n+1))^n=1$$

soit, en utilisant la formule IV.2, $\lim_{n\to+\infty}p_n=1$. Autrement dit la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et sa limite est 1.
D'après ce qui précède et IV.5.2, $(nG_C(I_n-1))_{n\in\mathbf{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ et donc $n\log(1-G_C(I_n-1))$ diverge vers $-\infty$. Or

$$\forall n\in\mathbf{N}^* \quad (1-G_Y(I_n-1))^n=(1-G_C(I_n-1))^n=\exp\left(n\log\left((1-G_C(I_n-1)\right)\right)$$

et donc la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et sa limite est 0.

Question IV.8
On a

$$\forall n\in\mathbf{N}^* \qquad P(M_n=I_n)+P(M_n=I_n+1)=P(M_n\le I_n+1)-P(M_n\le I_n-1)=p_n-q_n$$

et donc la suite $(P(M_n=I_n)+P(M_n=I_n+1))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et sa limite est 1.

Question IV.9.1
Puisque 10^{-5} est compris entre $G_C(4)$ et $G_C(5)$, on a $10^{-5}=G_C(4+x)$ pour x compris entre 0 et 1 vérifiant

$$10^{-5}=G_Y(4)\left(\frac{G_Y(5)}{G_Y(4)}\right)^x$$

ce qui équivaut à

$$x=\frac{\ln\left(\frac{G_Y(4)}{10^{-5}}\right)}{\ln\left(\frac{G_Y(4)}{G_Y(5)}\right)}=\frac{\ln(6.12433)}{\ln\left(\frac{6.12433}{0.404268}\right)}\simeq 0.67$$

et donc $4.5<a_{10^5}<5$. Il en résulte $I_{10^5}=5$.

Question IV.9.2
On a

$$P(M_{10^5}=I_{10^5})+P(M_{10^5}=I_{10^5}+1)=(F_Y(6))^{10^5}-(F_Y(4))^{10^5}\simeq 0.975\ .$$

Question IV.9.3
Le fait que q_n tende vers 0 montre que le réseau a tendance à s'engorger puisqu'il reçoit un nombre tendant vers l'infini de messages (durant un intervalle de temps de longueur 1), lorsque n croît. Néanmoins ceci est tempéré par le fait que p_n tende vers 0 : le réseau s'engorge mais on a une bonne estimation du nombre de messages auxquels on peut s'attendre en fonction de n. Autrement dit on a un intervalle de confiance asymptotique pour M_n, lorsque n tend vers l'infini. On voit que I_n est logarithmique en fonction de n et que la probabilité de sortir de l'intervalle de confiance est très petite déjà pour n égal à 10^5. Autrement dit la confiance que l'on peut avoir en l'intervalle asymptotique est rapidement élevée.

Partie V

Question V.1.1
Les exponentielles étant indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$, il en est de même pour G_C sur $\mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$. De plus G_C ne s'annule pas puisqu'elle est à valeurs dans $]0;1]$ d'après IV.4.3 et donc H est (indéfiniment) dérivable sur $\mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$.

Question V.1.2
Les exponentielles sont convexes et leurs dérivées sont donc croissantes. Il en résulte

$$\forall m \in \mathbf{N} \qquad h_m = \lim_{x \to m^+} H'(x) = \ln\left(\frac{G_Y(m)}{G_Y(m+1)}\right) H(m) = \frac{1}{G_Y(m)} \ln\left(\frac{G_Y(m)}{G_Y(m+1)}\right) .$$

Chacun des deux termes intervenant dans h_m tendent vers l'infini d'après IV.3.2 e IV.3.3 et donc $\lim_{m \to +\infty} h_m = +\infty$.

Question V.2.1
Soit m un entier naturel. La fonction H est convexe sur $[m, m+1]$ puisqu'elle y est égale à une exponentielle. Elle est de plus dérivable à droite et à gauche en tout entier. Par conséquent elle est convexe sur $\mathbf{R}_+$ si et seulement si, pour tout entier naturel n, $H'_g(n) \leq H'_d(n)$. Or on a

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad H'_g(n) = \frac{1}{G_Y(n)} \ln\left(\frac{G_Y(n-1)}{G_Y(n)}\right) \quad \text{et} \quad H'_d(n) = \frac{1}{G_Y(n)} \ln\left(\frac{G_Y(n)}{G_Y(n+1)}\right)$$

et donc H est convexe sur $\mathbf{R}_+$ si et seulement si la suite $(G_Y(n-1)/G_Y(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. Or on a

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \frac{G_Y(n-1)}{G_Y(n)} = 1 + \frac{P(Y=n)}{G_Y(n)} = 1 + \frac{1}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mu^{k-n}}{(n+1)\ldots k}} = 1 + \frac{1}{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu^k}{(n+1)\ldots(n+k)}}$$

et, pour tout entier naturel non nul k, $n \mapsto (n+1)\ldots(n+k)$ est croissante. Il en résulte que $(G_Y(n-1)/G_Y(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et donc H est convexe sur $\mathbf{R}_+$.
Par décroissance de G_C, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et donc, par convexité de H,

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \frac{H(a_{n+1}) - H(a_n)}{a_{n+1} - a_n} \geq H'_d(a_n)$$

et cette dernière quantité tend vers l'infini par croissance de H'_d et grâce à V.1.2 et le fait que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ tende vers l'infini.
Remarque : on pourrait appliquer l'inégalité des accroissements finis. Soit en effet n un entier naturel non nul, m la partie entière de a_n et $m+k$ celle de a_{n+1}. En particulier k est un entier naturel. Si k est nul, d'après l'inégalité des accroissements finis et V.1.2, on a $H(a_{n+1}) - H(a_n) \geq (a_{n+1} - a_n)h_m$. Sinon on a

$$H(a_{n+1}) - H(a_n) = H(m+1) - H(a_n) + \sum_{i=1}^{k-1} (H(m+i+1) - H(m+i)) + H(a_{n+1}) - H(m+k)$$

en convenant que la somme est nulle si k vaut 1. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur chaque terme, ce qui est licite par dérivabilité sur les intervalles ouverts entre deux entiers consécutifs, on obtient

$$H(a_{n+1}) - H(a_n) \geq (m+1-a_n)h_m + \sum_{i=1}^{k-1} h_{m+i} + (a_{n+1} - m - k)h_{m+k}$$

et donc

$$H(a_{n+1}) - H(a_n) \geq (a_{n+1} - a_n) \inf_{0 \leq i \leq k} h_{m+i} .$$

Ce dernier infimum est égal à h_m par croissance de la suite $(h_m)_{m\in\mathbf{N}}$ (ce point est le point crucial de la démonstration de la convexité de H) et on conclut puisque $a_{n+1}-a_n$ est strictement positif.

Question V.2.2
Pour tout entier naturel non nul n, on a $H(a_{n+1})-H(a_n)=n+1-n=1$ et donc le résultat précédent entraîne

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0\ .$$

Question V.3
Pour montrer que la suite $(I_n-a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est dense dans $[-1/2;1/2]$, il suffit de montrer qu'elle rencontre tout intervalle ouvert non vide inclus dans cet intervalle.
Soit donc J un intervalle ouvert non vide inclus dans $[-1/2;1/2]$. Il contient un intervalle ouvert non vide K ne contenant pas $1/2$ dans son adhérence. Soit d la distance de K à $1/2$. C'est donc un réel strictement compris entre 0 et 1. Notons a la borne supérieure de K et ℓ la longueur de K ; on a $a=1/2-d$.
Soit maintenant m un entier naturel non nul supérieur à $1/d$, à $1/\ell$ et à $1/(1-d)$.
Soit N un entier naturel non nul tel que, pour tout entier naturel n supérieur à N, on ait $0\le a_{n+1}-a_n<1/m$. Un tel entier existe par croissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et par V.2.2.
Puisque $(a_n+1/2)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et tend vers l'infini, il existe un entier minimal k pour lequel $a_{N+k}+1/2$ soit supérieur à I_N+1. Par définition de I_N, k est strictement positif. De plus

$$I_N\le a_N+\frac{1}{2}\le a_{N+k-1}+\frac{1}{2}<I_N+1\le a_{N+k}+\frac{1}{2}$$

et donc

$$I_{N+k}-a_{N+k}=I_N+1-a_{N+k}\ge 1+I_N-a_{N+k-1}-a_{N+k}+a_{N+k-1}\ge 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\ge\frac{1}{2}-d=a$$

Soit maintenant j le plus petit entier naturel tel que a_{N+k+j} soit supérieur strictement à $I_{N+k}-a$. Par croissance j existe et est strictement positif d'après ce qui précède. On a

$$a_{N+k+j}+\frac{1}{2}\le I_{N+k}+\frac{1}{2}+a_{N+k+j-1}-I_{N+k}+a_{N+k+j}-a_{N+k+j-1}\le I_{N+k}+\left(\frac{1}{2}-a\right)+\frac{1}{m}\le I_{N+k}+d+\frac{1}{m}<I_{N+k}+1$$

et donc, toujours par croissance, $I_{N+k+j}=I_{N+k}$. Il vient

$$I_{N+k+j}-a_{N+k+j}=I_{N+k}-a_{N+k+j}<a$$

et

$$I_{N+k+j}-a_{N+k+j}=I_{N+k+j-1}-a_{N+k+j-1}+a_{N+k+j-1}-a_{N+k+j}\ge a-\frac{1}{m}\ge a-\ell$$

et donc $I_{N+k+j}-a_{N+k+j}$ appartient à K. A fortiori cette quantité appartient aussi à J et donc la suite $(I_n-a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est dense dans $[-1/2;1/2]$.

Question V.4.1
Soit m un entier naturel non nul tel que $I_m-a_m<-1/4$, on a alors, par décroissance stricte de G_C,

$$\frac{1}{m}=G_C(a_m)<G_C\left(I_m+\frac{1}{4}\right)=G_C(I_m)\left(\frac{G_C(I_m+1)}{G_C(I_m)}\right)^{1/4}=G_C(I_m)\sqrt{\alpha_{I_m}}$$

et le résultat en découle.

Question V.4.2
D'après V.3, il existe une suite strictement croissante $(\theta(n))_{n\in\mathbf{N}}$ à valeur dans $\mathbf{N}^*$ telle que, pour tout entier naturel n, $I_{\theta(n)} - a_{\theta(n)} < -1/4$. Si m est une valeur de la suite $(\theta(n))_{n\in\mathbf{N}}$, il vient

$$p_m - r_m = (1 - G_Y(I_m))^m \leq \left(1 - \frac{1}{m\sqrt{\alpha_{I_m}}}\right)^m = \exp\left(m\ln\left(1 - \frac{1}{m\sqrt{\alpha_{I_m}}}\right)\right) .$$

Puisque α_{I_m} tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini, $m\ln\left(1 - \frac{1}{m\sqrt{\alpha_{I_m}}}\right)$ tend vers $-\infty$ dans les mêmes conditions. Il en résulte

$$1 - \lim_{n\to+\infty} r_{\theta(n)} = \lim_{n\to+\infty} \left(p_{\theta(n)} - r_{\theta(n)}\right) = \lim_{m\to+\infty} \exp\left(m\ln\left(1 - \frac{1}{m\sqrt{\alpha_{I_m}}}\right)\right) = 0$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_{\theta(n)} = I_{\theta(n)} + 1) = 1 .$$

Question V.4.3
Soit m un entier naturel non nul tel que $I_m - a_m > 1/4$, on a alors, par décroissance stricte de G_C,

$$\frac{1}{m} = G_C(a_m) > G_C\left(I_m - \frac{1}{4}\right) = G_C(I_m - 1)^{1/4} G_C(I_m)^{3/4} = \frac{G_C(I_m)}{\sqrt{\alpha_{I_m - 1}}}$$

et le résultat en découle.

Question V.4.4
D'après V.3, il existe une suite strictement croissante $(\theta(n))_{n\in\mathbf{N}}$ à valeur dans $\mathbf{N}^*$ telle que, pour tout entier naturel n, $I_{\theta(n)} - a_{\theta(n)} > 1/4$. Si m est une valeur de la suite $(\theta(n))_{n\in\mathbf{N}}$, il vient

$$q_m + s_m = (1 - G_Y(I_m))^m \geq \left(1 - \frac{1}{m\sqrt{\alpha_{I_m}}}\right)^m = \exp\left(m\ln\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha_{I_m - 1}}}{m}\right)\right) .$$

Puisque α_{I_m} tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini, il en est de même de $m\ln\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha_{I_m-1}}}{m}\right)$. Il vient

$$\lim_{n\to+\infty} s_{\theta(n)} = \lim_{n\to+\infty} \left(q_{\theta(n)} + s_{\theta(n)}\right) = \lim_{m\to+\infty} \exp\left(m\ln\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha_{I_m-1}}}{m}\right)\right) = 1$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_{\theta(n)} = I_{\theta(n)}) = 1 .$$