Deuxième épreuve CAPES externe 2001

François Sauvageot

Premier novembre 2001

Partie I

Question I.A.1
Pour n entier naturel non nul, soit H_n la propriété

$$(H_n) \qquad \exists!(u_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbf{K}^{n+1} \begin{cases} u_0 = x \\ u_1 = y \\ \forall k \in \mathbf{N} \qquad k \leq n-2 \Rightarrow u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k \ . \end{cases}$$

La propriété H_1 est vraie puisque $(u_0, u_1) = (x, y)$ est l'unique couple satisfaisant la propriété requise.
Soit maintenant n un entier naturel non nul quelconque pour lequel (H_n) est vraie et $(u_0, \ldots, u_n)$ l'unique $(n+1)$-uplet décrit par (H_n). Alors l'unique $(n+2)$-uplet satisfaisant la propriété demandée par H_{n+1} est $(u_0, \ldots, u_n, au_n + bu_{n-1})$ et donc la propriété (H_n) est héréditaire.
Le principe de récurrence permet donc d'affirmer qu'il existe un unique élément $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{R}(a, b)$ tel que $u_0 = x$ et $u_1 = y$.

Question I.A.2
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux éléments de $\mathcal{R}(a, b)$ et λ et μ deux scalaires. Notons $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'élement $\lambda u + \mu v$ de $\mathcal{S}(\mathbf{K})$. On a, pour tout entier naturel n,

$$w_{n+2} = \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) + \mu(av_{n+1} + bv_n) = aw_{n+1} + bw_n$$

et donc w appartient à $\mathcal{R}(a, b)$. Autrement dit $\mathcal{R}(a, b)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbf{K})$.

Soit (x, y) et (x', y') deux éléments de $\mathbf{K}^2$ et λ et μ deux scalaires. Notons $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'élement $\lambda U(x, y) + \mu U(x', y')$ de $\mathcal{R}(a, b)$. On a

$$w_0 = \lambda x + \mu x' \qquad \text{et} \qquad w_1 = \lambda y + \mu y'$$

de sorte que $w = U(\lambda(x, y) + \mu(x', y'))$, i.e. U est une application linéaire.
Son injectivité résulte de l'unicité dans la question précédente, tandis que sa surjectivité résulte de l'existence. Par conséquent U est un isomorphisme et $\mathcal{R}(a, b)$ a même dimension que $\mathbf{K}^2$, i.e. 2.

Question I.B.1.a
On convient ici $r^0 = 1$ pour tout élément de $\mathbf{K}$, y compris pour r nul.
D'après la relation (1) définissant $\mathcal{R}(a, b)$ appliquée à n égal à 0, la suite $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne peut appartenir à $\mathcal{R}(a, b)$ que si $r^2 = ar + b$, i.e. si r est solution de (C).
Réciproquement si r est solution de (C), alors pour tout entier naturel n on a

$$r^{n+2} = r^n r^2 = r^n(ar + b) = ar^{n+1} + br^n$$

et donc la suite $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $\mathcal{R}(a, b)$.

Question I.B.1.b

Soit r un racine double de (C) et n un entier naturel. On a

$$(n+2)r^{n+2} = (n+2)r^n(ar+b) = a(n+1)r^{n+1} + bnr^n + (ar+2b)r^n \ .$$

Comme r est racine double de (C), on a $r = a/2$ et

$$ar + 2b = 2\left(\frac{a^2}{4} + b\right) = 2\left(-\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} + b\right) = 2\left(-r^2 + ar + b\right) = 0 \ .$$

Il en résulte

$$(n+2)r^{n+2} = a(n+1)r^{n+1} + bnr^n$$

et donc $(nr^n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $\mathcal{R}(a,b)$.

Question I.B.2.a

D'après ce qui précède $(r_1^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux éléments de $\mathcal{R}(a,b)$. De plus on a $(r_1^n)_{n\in\mathbf{N}} = U(1,r_1)$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbf{N}} = U(1,r_2)$. Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$$

la famille $((1,r_1),(1,r_2))$ est une base de $\mathbf{K}^2$. Par conséquent, puisque U est un isomorphisme, $(U(1,r_1),U(1,r_2))$ est une base de $\mathcal{R}(a,b)$, i.e. $((r_1^n)_{n\in\mathbf{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbf{N}})$ est une base de $\mathcal{R}(a,b)$.

Question I.B.2.b

On procède comme précédemment : $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux éléments de $\mathcal{R}(a,b)$, images par U de $(1,r)$ et $(0,r)$ respectivement. Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & r \end{vmatrix} = r \ ,$$

pour r non nul, $((r^n)_{n\in\mathbf{N}},(nr^n)_{n\in\mathbf{N}})$ est image d'une base de $\mathbf{K}^2$ par U et est donc une base de $\mathcal{R}(a,b)$.
Une base de $\mathcal{R}(a,b)$ est, dans tous les cas, $(U(1,0),U(0,1))$. Dans le cas où 0 est racine double de (C), les éléments de $\mathcal{R}(a,b)$ sont les suites nulles à partir du rang 2, dont une base est donnée par les deux éléments

$$U(1,0) = (1,0,0,\ldots) \qquad \text{et} \qquad U(0,1) = (0,1,0,0,\ldots) \ .$$

Question I.B.2.c

D'après la question I.B.2.a les suites $(r^n e^{in\alpha})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r^n e^{-in\alpha})_{n\in\mathbf{N}}$ appartiennent au sous-espace $\mathcal{R}(a,b)$ de $\mathcal{S}(\mathbf{C})$. Par conséquence, leur demi-somme et leur différence divisée par $2i$ aussi, i.e. les suites $(r^n\cos(n\alpha))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r^n\sin(n\alpha))_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient la relation (1). Par conséquent, puisque ce sont des suites réelles, ces deux suites appartiennent au sous-espace $\mathcal{R}(a,b)$ de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.
Elles sont images par U de $(1,r\cos(\alpha))$ et $(0,r\sin(\alpha))$ respectivement. Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r\cos(\alpha) & r\sin(\alpha) \end{vmatrix} = r\sin(\alpha)$$

et comme r est non nul et α est dans $]0,\pi[$, la famille $((1,r\cos(\alpha)),(0,r\sin(\alpha)))$ est une base de $\mathbf{R}^2$ et donc les suites $(r^n\cos(n\alpha))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r^n\sin(n\alpha))_{n\in\mathbf{N}}$ forment une base de $\mathcal{R}(a,b)$. (Notons que cette assertion est vraie que $\mathbf{K}$ soit le corps des réels ou celui des complexes.)

Question I.C.1.a

On applique ce qui précède avec $\mathbf{K}$ le corps des réels et a et b égaux à 1. Les racines de (C) sont alors r_1 et r_2 avec $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$ et $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$. De sorte que la base fournie par la question I.B.2.a est image par U de la base de $\mathbf{R}^2$ formée des vecteurs $(1,(1+\sqrt{5})/2)$ et $(1,(1-\sqrt{5})/2)$.

Comme la suite de Fibonnacci est $U(0,1)$ et comme

$$(0,1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

il vient $(F_n)=1/\sqrt{5}((r_1^n)_{n\in\mathbf{N}}+(r_2^n)_{n\in\mathbf{N}})$ et donc

$$\forall n\in\mathbf{N}\qquad F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\ .$$

Question I.C.1.b
Comme $1<5<9$, on a $1<\sqrt{5}<3$ et donc

$$1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\qquad\text{et}\qquad 0<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1\ .$$

Par conséquent la suite $\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, tandis que la suite $\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0. Cette seconde suite est donc dominée par la première en l'infini. Il en résulte

$$F_n\sim\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\ .$$

Question I.C.2.a
Soit n un entier naturel non nul. En développant le déterminant de M_{n+2} par rapport à la première ligne, on obtient

$$D_{n+2}=\alpha D_{n+1}-\beta\left|\begin{array}{c|cccc}\gamma & \beta & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & & & M_n & \end{array}\right|$$

et donc, en développant ce dernier déterminant par rapport à la première colonne, il vient

$$D_{n+2}=\alpha D_{n+1}-\beta\gamma D_n\ .$$

C'est-à-dire que $(D_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.
Puisque $D_1=\alpha$ et $D_2=\alpha^2-\beta\gamma$, en posant $D_0=1$ on obtient une suite $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre deux

$$\forall n\in\mathbf{N}\qquad D_{n+2}=\alpha D_{n+1}-\beta\gamma D_n\ .$$

Question I.C.2.b
Comme $\beta\gamma=1$, la suite (D_n) appartient à $\mathcal{R}(\alpha,-1)$ dont l'équation caractéristique est $t^2-\alpha t+1$. Pour $\alpha=2$, cette équation admet 1 comme racine double, tandis que pour $\alpha=\sqrt{2}$ les racines sont $(1+i)/\sqrt{2}$ et $(1-i)/\sqrt{2}$. Dans ce second cas les racines peuvent s'écrire $e^{i\pi/4}$ et $e^{-i\pi/4}$ respectivement.
De plus la suite D_n est égale à $U(1,\alpha)$, avec les notations de I.A. On peut donc appliquer les résultats de I.B. Comme

$$(1,2)=(1,1)+(0,1)\qquad\text{et}\qquad(1,\sqrt{2})=\frac{1-i}{2}\left(1,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1+i}{2}\left(1,\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,$$

il vient, pour $\alpha=2$,

$$\forall n\in\mathbf{N}\qquad D_n=n+1$$

et, pour $\alpha = \sqrt{2}$,

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad D_n = \frac{1-i}{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1+i}{2}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left((n-1)\frac{\pi}{4}\right) \ ,$$

Question I.C.3.a
On a

$$M^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc

$$M^3 = M^2 + M \ .$$

Question I.C.3.b
On se place dans l'espace vectoriel réel $M_4(\mathbf{R})$.
Pour n entier naturel non nul, soit (H_n) la propriété M^n est combinaison linéaire (réelle) de M et M^2.
Comme $M = M + 0.M^2$, (H_1) est vraie. Soit maintenant n un entier naturel non nul pour lequel (H_n) est vraie. Comme $M^{n+1} = M.M^n$, M^{n+1} est donc combinaison linéaire de M^2 et M^3. La question précédente entraîne alors que M^{n+1} est combinaison linéaire de M et M^2. Le principe de récurrence permet donc de conclure que, pour tout entier naturel non nul, M^n est combinaison linéaire de M et M^2, ce qui est l'assertion demandée.
Pour répondre à la question suivante, telle qu'elle est formulée, il faudrait montrer l'unicité de la combinaison linéaire. Cette unicité est vraie puisque M et M^2 ne sont pas colinéaires et forment donc une famille libre de l'espace vectoriel $M_4(\mathbf{R})$. Néanmoins il est probable que l'énoncé ait voulu seulement demander un couple de suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telles que $M^n = a_nM + b_nM^2$ et, pour ce couple, une relation possible entre (a_{n+1}, b_{n+1}) et (a_n, b_n). Comme on vient de le voir, il n'y a en fait qu'une réponse possible de toute façon.
Soit donc n un entier naturel non nul et (a_n, b_n) un couple de réels tel que $M^n = a_nM + b_nM^2$. On a alors

$$M^{n+1} = a_nM^2 + b_nM^3 = b_nM + (a_n + b_n)M^2$$

et on peut (et en fait on doit) donc prendre $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

Question I.C.3.c
Soit n un entier naturel non nul, il vient

$$a_{n+2} = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + a_{n+1}$$

et donc $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Comme $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$ on pourrait calculer les valeurs de cette suite grâce aux résultats de I.B.
Néanmoins, la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vérifie la même relation de récurrence linéaire, puisqu'on a

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad b_{n+2} = a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} = b_{n+1} + b_n \ .$$

De plus $b_1 = 0$ et $b_2 = 1$. Autrement dit la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une translatée de la suite de Fibonacci :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad b_n = F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)$$

et donc $a_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad n \geq 2 \Rightarrow a_n = b_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right) \ .$$

Notons au passage que la formule donnée pour a_n est en fait valable pour tout entier naturel non nul n (i.e. elle est encore vraie pour $n = 1$).

Question I.C.3.d.i
On n'en a en fait pas besoin, mais il semble judicieux de préciser que l'on se place dans l'anneau $M_p(\mathbf{R})$ pour un entier naturel non nul p fixé.
Comme P est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable (et même diagonalisable dans une base orthonormée). Soit donc A une matrice de passage (i.e. une matrice inversible dans $M_p(\mathbf{R})$) telle que $A^{-1}PA$ soit une certaine matrice diagonale D. Comme P est de rang 2, D a tous ses coefficients nuls sauf exactement 2 (situés sur la diagonale). Notons les a et b. Ce sont en fait les deux valeurs propres non nulles de P (et elles peuvent très bien être égales).
On a $t^2 - (a+b)t + ab = 0$ dès que t vaut a ou b et donc

$$a^3 = a.a^2 = (a+b).a^2 - ab.a \qquad \text{et} \qquad b^3 = b.b^2 = (a+b).b^2 - ab.b\ .$$

Il en résulte $D^3 = (a+b)D^2 - abD$ et donc $P^3 = (a+b)P^2 - abP$. Par conséquent P annule le polynôme de degré 3 sans terme constant $X^3 - (a+b)X^2 + abX$.
Remarquons que si $a = b$, i.e. si P n'a qu'une seule valeur propre non nulle et qu'elle a multiplicité 2, alors P annule en fait le polynôme $X^2 - aX$.
Remarquons également qu'on aurait pu raisonner grâce au polynôme minimal de P. En effet ce polynôme divise le polynôme caractéristique de P qui est de la forme $X^{n-2}Q$ pour un certain polynôme Q de degré 2. En effet 0 est valeur propre de P avec multiplicité $n-2$ (exactement). Comme P est diagonalisable, son polynôme minimal est à racines simples et donc il s'écrit XR pour un certain polynôme R divisant Q. On a en fait $R = Q$ si Q a deux racines distinctes et $R = (X-a)$ si Q admet a comme racine double. En tout cas XR est un polynôme annulateur de P, de degré 2 ou 3 et sans terme constant.

Question I.C.3.d.ii
On reprend les notations précédentes : a et b désignent les valeurs propres non nulles, éventuellement confondues, de P.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ les suites réelles définies par récurrence par les formules $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad a_{n+1} = -ab.b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n + (a+b)b_n\ .$$

Soit, pour n entier naturel non nul, (H_n) la propriété $P^n = a_nP + b_nP^2$.
La propriété (H_1) est vraie puisque $P = 1.P + 0.P^2$. De plus, si (H_n) est vraie pour un certain entier naturel non nul n, on a

$$P^{n+1} = P.P^n = a_nP^2 + b_nP^3 = a_nP^2 + b_n((a+b)P^2 - abP) = -ab.b_nP + (a_n + (a+b)b_n)P^2 = a_{n+1}P + b_{n+1}P^2$$

et donc la propriété (H_n) est héréditaire. Le principe de récurrence permet donc de conclure

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad P^n = a_nP + b_nP^2\ .$$

De plus les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $t^2 - (a+b)t + ab = 0$. On peut donc les calculer explicitement et, au final, calculer P^n, pour n entier naturel non nul, en calculant seulement P^2 et en faisant des combinaisons linéaires de matrices.
Il reste par contre à calculer $a+b$ et ab. La somme $a+b$ est la trace de P, qui se calcule sans faire de produit matriciel. Pou calculer le produit ab, il suffit de calculer P^3 et d'écrire $abP = (a+b)P^2 - P^3$ et de choisir un coefficient non nul de P pour évaluer ab. En conclusion les seuls produits matriciels pour accomplir cette démarche sont les calculs de P^2 et de P^3.

Partie II

Question II.A.1
Lorsque y décrit les entiers entre 0 et 5, $1+5y^2$ décrit $\{1,6,21,46,81,126\}$ et donc les seules solutions de (2) pour y compris entre 0 et 5 sont $(1,0)$ et $(9,4)$.

Question II.A.2
On identifie g avec l'application linéaire du plan vectoriel euclidien de matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} .$$

L'application g est alors une application linéaire de déterminant 1 et est donc injective. Son application réciproque est l'application h qui à un point (x,y) de $\mathcal{P}$ associe $(9x-20y,-4x+9y)$. De plus

$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2 \qquad (9x+20y)^2-5(4x+9y)^2 = x^2-5y^2 = (9x-20y)^2-5(-4x+9y)^2$$

et donc g et h envoient $\mathcal{H}$ dans lui-même. Il en résulte que les restrictions de g et h à $\mathcal{H}$ sont des applications réciproques l'une de l'autre et, en particulier, la restriction de g à $\mathcal{H}$ est une bijection de $\mathcal{H}$ sur lui-même.
D'après la question précédente $(x_1,y_1)=(9,4)$ et comme $g(S_0)=(9,4)$, on a bien $g(S_0)=S_1$.

Question II.A.3.a
Pour n entier naturel, soit (H_n) la propriété : les coordonnées (x_n,y_n) de S_n sont solutions de (2).
Comme $1-5.0^2=1$, (H_0) est vraie. De plus g est une application linéaire à coefficients entiers naturels ; comme elle préserve $\mathcal{H}$, elle envoie les points à coordonnées entières naturelles de $\mathcal{H}$ sur des points à coordonnées entières naturelles de $\mathcal{H}$. Autrement dit g envoie un point dont les coordonnées sont solutions de (2) sur un autre tel point. Il en résulte que la propriété (H_n) est héréditaire et donc, par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n les coordonnées (x_n,y_n) de S_n sont des solutions de (2).

Question II.A.3.b
Soit A la matrice de g dans la base canonique. D'après le théorème de Cayley-Hamilton (ou par un calcul direct), on a

$$A^2 = 18A - Id$$

et donc

$$\forall n\in\mathbf{N} \qquad \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 18 \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Autrement dit les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique associée $t^2-18t+1=0$.

Question II.A.3.c
On se place dans le cadre donné par la partie I avec $a=18$ et $b=-1$. On a $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}=U(1,9)$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}=U(0,4)$. De plus les solutions de l'équation caractéristique $t^2-18t+1$ sont $9-4\sqrt{5}$ et $9+4\sqrt{5}$ et on a

$$(1,9) = \frac{1}{2}\left(1,9-4\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(1,9+4\sqrt{5}\right) \qquad \text{et} \qquad (0,4) = -\frac{1}{2}\left(1,9-4\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(1,9+4\sqrt{5}\right) .$$

Il en résulte

$$\forall n\in\mathbf{N} \qquad x_n = \frac{(9+4\sqrt{5})^n+(9-4\sqrt{5})^n}{2} \qquad \text{et} \qquad y_n \frac{(9+4\sqrt{5})^n-(9-4\sqrt{5})^n}{2} .$$

Question II.A.4.a
Il semble utile de préciser qu'une hyperbole a deux composantes connexes. Pour (x, y) dans le plan notons $(X, Y) = (x + \sqrt{5}y, x - \sqrt{5}y)$, c'est-à-dire les coordonnées de (x, y) dans un repère lié aux asymptotes de $\mathcal{H}$. L'équation de $\mathcal{H}$ s'écrit $XY = 1$, g est l'application $(X, Y) \to ((9 + 4\sqrt{5})X, (9 - 4\sqrt{5})Y))$ et les deux composantes connexes sont obtenues par l'intersection avec le premier et le troisième quadrant.
De plus la projection sur l'asymptote d'équation $Y = 0$ réalise un homéomorphisme entre la composante connexe située dans le premier quadrant et la demi-droite ouverte des points d'abscisse strictement postive et d'ordonnée nulle (i.e. satisfaisant $X > 0$ et $Y = 0$). Par conséquent si (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont les coordonnées de deux points de $\mathcal{H}$ situés sur dans le premier quadrant, l'arc de courbe les joignant est l'ensemble des points de $\mathcal{H}$ tels que X soit compris entre X_1 et X_2.
Soit maintenant n un entier naturel, x_n et y_n sont des entiers naturels et donc $x_n + \sqrt{5}y_n$ est strictement positif. En particulier S_n appartient à la composante connexe de $\mathcal{H}$ incluse dans le premier quadrant. Par conséquent l'arc joignant S_n à S_{n+1} est bien défini.
Par ailleurs, comme x_n et y_n sont positifs et comme $x_{n+1} + \sqrt{5}y_{n+1} = (9+4\sqrt{5})(x_n + \sqrt{5}y_n)$, x_{n+1} est strictement supérieur à x_n. Il en résulte que l'arc joignant S_n à S_{n+1} tracé sur $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points de $\mathcal{H}$ tels que $x + \sqrt{5}y$ est compris entre $x_n + \sqrt{5}y_n$ et $x_{n+1} + \sqrt{5}y_{n+1}$.
Soit donc (x, y) un point de $\mathcal{H}$ situé sur l'arc joignant S_n à S_{n+1}. Posons $g((x, y)) = (x', y')$. D'après II.A.2, c'est un point de $\mathcal{H}$. De plus on a

$$x' + \sqrt{5}y' = (9 + 4\sqrt{5})x + (20 + 9\sqrt{5})y = (9 + 4\sqrt{5})(x + \sqrt{5}y)$$

et donc

$$x_{n+1} + \sqrt{5}y_{n+1} = (9 + 4\sqrt{5})(x_n + \sqrt{5}y_n) \le x' + \sqrt{5}y' \le (9 + 4\sqrt{5})(x_{n+1} + \sqrt{5}y_{n+1}) = x_{n+2} + \sqrt{5}y_{n+2} \ ,$$

c'est-à-dire que (x', y') est situé sur l'arc joignant S_{n+1} à S_{n+2}.

Question II.A.4.b
Puisque la suite (x_n) et (y_n) sont des suites strictement croissantes d'entiers naturels, elles tendent vers l'infini. La suite $(x_n + \sqrt{5}y_n)$ est donc une suite strictement croissante tendant vers l'infini, de terme initial 1.
Soit donc (x, y) une solution de (2). Ce sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{H}$ tel que $X = x + \sqrt{5}y > 0$. De plus x est entier et ne peut être nul (car l'équation $-5y^2 = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbf{N}$). Par conséquent x, et donc X, est supérieur à 1. En particulier (x, y) appartient à un arc joignant S_n à S_{n+1} pour un certain entier naturel n.
Soit h l'application réciproque de g. D'après la question précédente h^n envoie l'arc joignant S_n à S_{n+1} sur l'arc joignant S_0 à S_1. Comme h est une application linéaire à coefficients entiers (relatifs) elle préserve l'ensemble des points à coordonnées entières (relatives) de $\mathcal{H}$. Soit (x', y') l'image de (x, y) par h^n. Comme (x', y') est un couple d'entiers relatifs et comme (x', y') appartient à l'arc joignant S_0 à S_1, c'est en fait un couple d'entiers naturels. Par conséquent (x', y') est une solution de (2) et on a $1 \le x' + \sqrt{5}y' \le 9 + 4\sqrt{5}$. Si y' était strictement supérieur à 4, on aurait $(x')^2 > 1 + 5.4^2$, d'où $x' > \sqrt{81}$ et $x' > 9$. On aurait alors $x' + \sqrt{5}y' > 9 + 4\sqrt{5}$. Par conséquent (x', y') est une solution de (2) telle que $0 \le y' \le 4$ et donc, d'après II.A.1, (x', y') est soit S_0, soit S_1.
Il en résulte $(x, y) = S_n$ ou S_{n+1}. Autrement dit les couples (x_n, y_n) pour n décrivant $\mathbf{N}$ sont les seules solutions de (2).

Question II.B.1
Dans un repère bien choisi l'hyperbole $\mathcal{L}$ admet pour équation $XY = 1$. Dans ce repère une application affine ψ envoie le point de coordonnées (X, Y) sur le point de coordonnées $(aX + bY + c, a'X + b'Y + c')$ où (a, b, c, a', b', c') sont des réels ne dépendant que du repère choisi. Pour la suite on fixe ce repère pour les coordonnées des points du plan.
Par conséquent ψ préserve $\mathcal{L}$ si et seulement si on a

$$\forall (X, Y) \in \mathbf{R}^2 \qquad XY = 1 \Rightarrow (aX + bY + c)(a'X + b'Y + c') = 1$$

ou encore

$$\forall X \in \mathbf{R}^* \qquad \left(aX + \frac{b}{X} + c\right)\left(a'X + \frac{b'}{X} + c'\right) = 1 \ .$$

Cette dernière assertion est équivalente à

$$\forall X \in \mathbf{R}^* \qquad (aX^2 + cX + b)(a'X^2 + c'X + b') = X^2$$

ou encore, par continuité des fonctions polynomiales à

$$\forall X \in \mathbf{R} \qquad (aX^2 + cX + b)(a'X^2 + c'X + b') = X^2$$

i.e., par unicité de l'écriture des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}$,

$$aa' = 0 \ , \qquad ac' + a'c = 0 \ , \qquad ab' + a'b + cc' = 1 \ , \qquad cb' + c'b = 0 \qquad \text{et} \qquad bb' = 0 \ .$$

La première condition impose que a ou a' soit nul.
Si les deux sont nuls, la troisième condition montre que c et c' sont non nuls et donc les deux dernières imposent que b et b' soient nuls. Autrement dit ψ est une application constante à valeur dans $\mathcal{L}$.
Si seul a est nul, alors la seconde condition impose $c = 0$, la troisième $b = 1/a'$, la quatrième $c' = 0$ et la dernière $b' = 0$. Autrement dit ψ envoie (X, Y) sur $(bY, X/b)$ pour un certain réel non nul b.
Enfin si seul a' est nul, on déduit successivement $c' = 0$, $b' = 1/a$, $c = 0$ et $b = 0$. Par conséquent ψ envoie (X, Y) sur $(aX, Y/a)$.
Réciproquement toutes ces applications préservent $\mathcal{L}$. En résumé les applications affines préservant $\mathcal{L}$ sont les applications constantes à valeurs dans $\mathcal{L}$ ainsi que les applications fixant les axes dans leur globalité et de déterminant 1.

Question II.B.2
Soit (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives de A et B dans le repère fixé en II.B.1. D'après la question précédentes les trois applications qui préservent $\mathcal{L}$ et envoient A sur B sont : l'application constante égale à B, l'application $(X, Y) \mapsto (x'X/x, y'Y/y)$ et l'application $(X, Y) \mapsto (x'Y/y, y'X/x)$.
La troisième application admet pour carré l'application $(X, Y) \mapsto (x'y'X/(xy), y'x'Y/(xy)$, i.e. l'identité puisque $xy = x'y' = 1$. Par conséquent la troisième application est involutive.

Question II.B.3
Une application constante ne peut contenir dans son image une hyperbole et donc il existe au plus une application affine non involutive envoyant une hyperbole donnée sur elle-même et envoyant un point fixé A de celle-ci sur un autre point fixé B de l'hyperbole. Ceci montre l'unicité d'une application affine envoyant $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$, non involutive, et envoyant S_0 sur S_1.

Partie III

Question III.A
On a $m \wedge n = 15$ et on trouve $u_{15} = -89$, $u_{30} = -24475$ et $u_{45} = -3814273$. Par conséquent $u_{m \wedge n} = -u_m \wedge u_n$.

Question III.B.1
Soit k un entier naturel, n dans $k\mathbf{N}$ et j un entier compris entre 0 et n. On a

$$n - j \in k\mathbf{N} \Leftrightarrow k|j \Leftrightarrow n + j \in k\mathbf{N}$$

et donc $k\mathbf{N}$ est auto-symétrique.

Question III.B.2
Soit A une partie auto-symétrique non réduite à $\{0\}$. Alors $A \setminus \{0\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$ et admet donc un plus petit élément. Notons-le k.
Pour n entier naturel non nul, soit (H_n) la propriété kn et $k(n-1)$ appartiennent à A.

La propriété (H_1) est vraie puisque A contient 0 et k par hypothèse. Soit maintenant n un entier naturel non nul tel que (H_n) soit vraie. Alors par auto-symétrie appliquée à kn et $kn-k$, A contient $kn+n$ et donc la propriété (H_n) est héréditaire. Par le principe de récurrence on déduit, en particulier que $k\mathbf{N}$ est inclus dans A. Supposons que $A \setminus k\mathbf{N}$ soit non vide; comme c'est une partie de $\mathbf{N}$ elle admet un plus petit élément. Notons-le a. Puisque k est le plus petit élément non nul de A, on a nécessairement $k < a$. Soit maintenant n la partie entière de a/k. On a $n \geq 1$ et $kn < a < k(n+1)$.
On a $0 \leq a - kn < k \leq kn$ et donc, par auto-symétrie $2kn - a$ appartient à A. Comme k ne divise pas a mais divise $2kn$, il ne divise pas $2kn - a$. Mais on a $2kn - a < kn < a$ et ceci contredit la définition de a. Il en résulte $A = k\mathbf{N}$.

Question III.C.1.a
Pour k un entier compris entre 0 et n, soit (H_k) la propriété d divise $u_{n+k} + (-q)^k u_{n-k}$.
Les propriétés (H_0) et (H_1) s'écrivent respectivement $d|2u_n$ et $d|(u_{n+1} - qu_{n-1})$, i.e. $d|2u_n$ et $d|pu_n$ et elles sont donc vraies par hypothèse.
Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n, on a

$$\begin{aligned} u_{n+k+1} + (-q)^{k+1} u_{n-k-1} &= pu_{n+k} + qu_{n+k-1} + (-q)^k pu_{n-k} - (-q)^k u_{n-k+1} \\ &= p(u_{n+k} + (-q)^k u_{n-k}) + q(u_{n+k-1} + (-q)^{k-1} u_{n-k+1}) \end{aligned}$$

Il en résulte que si les propriétés (H_n) et $(H_{n-1}$ sont vraies, il en est de même de (H_{n+1}) et donc, par le principe de récurrence

$$\forall k \in [0; n] \qquad d|(u_{n+k} + (-q)^k u_{n-k}) \ .$$

Question III.C.1.b
D'après ce qui précède il vient, pour d divisant u_n,

$$\forall k \in [0; n] \qquad d|u_{n+k} \Leftrightarrow d|(-q)^k u_{n-k}$$

et donc, si d est premier à q,

$$\forall k \in [0; n] \qquad d|u_{n+k} \Leftrightarrow d|u_{n-k} \ .$$

En d'autres termes si n appartient à $A(d)$, on a

$$\forall k \in [0; n] \qquad n + k \in A(d) \Leftrightarrow u_{n-k} \in A(d) \ .$$

Comme $u_0 = 0$, 0 appartient à $A(d)$ pour tout d et donc, si d est premier à q, $A(d)$ est auto-symétrique.

Question III.C.2.a
Soit n un entier naturel non nul et c un diviseur premier de q. On a $u_{n+1} - pu_n = qu_{n-1}$ et donc c divise $u_{n+1} - pu_n$.
Par conséquent, si c divise u_{n+1}, il divise pu_n. Mais c divise q et q est premier à p. Par conséquent c est premier à p et le lemme de Gauß entraîne donc que si c divise u_{n+1}, il divise u_n.
Il en résulte que si c divise un terme u_n avec n entier naturel non nul, il divise aussi u_1. Mais ceci n'est pas vrai puisque $u_1 = 1$. Par conséquent c ne divise aucun terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ excepté le premier, qui est nul.

Question III.C.2.b
Si d et q ne sont pas premiers entre eux, soit c un diviseur premier commun à d et q. Par définition on a $A(d) \subset A(c)$ et, d'après la question précédente, $A(c) = \{0\}$. Il en résulte $A(d) = \{0\}$ puisqu'on a déjà souligné que 0 appartient à $A(d)$.

Question III.D.1
Comme D divise u_m et u_n, $A(D)$ contient m et n. Par conséquent $A(D)$ est une partie auto-symétrique de $\mathbf{N}$ non réduite à $\{0\}$. C'est donc une partie de la forme $k\mathbf{N}$ pour k entier naturel non nul. Puisque $A(D)$ contient n et m, k est un diviseur commun à n et m, i.e. k divise d et donc d appartient à $A(D)$, ou encore D divise u_d.

Question III.D.2
Par définition $A(u_d)$ contient d, c'est donc une partie de $\mathbf{N}$ auto-symétrique, non réduite à $\{0\}$ et est donc de la forme $k\mathbf{N}$ pour k entier naturel divisant d. A fortiori k divise n et m et donc u_d divise u_n et u_m. Il en résulte que u_d divise D.

Question III.D.3
On en conclut $D = |u_d|$.

Partie IV

Question IV.A
L'unique Z-représentation de 37 est : $\overline{10000100}$, .
Les autres F-représentations de 37 sont : $\overline{10000011}$, $\overline{1100100}$, $\overline{1100011}$, $\overline{1011100}$, $\overline{1011011}$.

Question IV.B
Pour n entier naturel, notons (H_n) la propriété

$$\sigma_n = \nu_{n+1} - 1 \qquad \text{et} \qquad S_n = \nu_{n+2} - 2 \ .$$

La propriété (H_0) s'écrit $1 = \nu_0 = \nu_1 - 1 = 2 - 1$ et $1 = \nu_0 = \nu_2 - 2 = 3 - 2$ et (H_0) est donc vraie. Soit maintenant n un entier naturel quelconque. On a

$$\sigma_{n+1} = S_n - \sigma_n + \nu_{n+1} \qquad \text{et} \qquad S_{n+1} = S_n + \nu_{n+1}$$

et donc la propriété (H_n) est héréditaire. Par le principe de récurrence on conclut

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \sigma_n = \nu_{n+1} - 1 \qquad \text{et} \qquad S_n = \nu_{n+2} - 2 \ .$$

Question IV.C.1.a
Soit s la partie entière de $n/2$ et k un entier entre 0 et s. On a, en convenant $a_{-1} = \nu_{-1} = 0$,

$$a_{n-2k}\nu_{n-2k} + a_{n-2k-1}\nu_{n-2k-1} \leq \nu_{n-2k}$$

puisque l'un au plus parmi a_{n-2k} et a_{n-2k-1} est non nul, et vaut alors 1, et qu'on a $\nu_{n-2k-1} \leq \nu_{n-2k}$. Par sommation sur k, il vient

$$m = \sum_{k=0}^{s} (a_{n-2k}\nu_{n-2k} + a_{n-2k-1}\nu_{n-2k-1}) \leq \sum_{k=0}^{s} \nu_{n-2k} = \sigma_n \ .$$

Question IV.C.1.b
On déduit de la question précédente et du fait que a_n vaut 1

$$\nu_n \leq m \leq \sigma_n < \nu_{n+1}$$

et donc ν_n est le plus grand des nombres de Fibonacci qui sont inférieurs ou égaux à m, puisque la suite $(\nu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite strictement croissante.

Question IV.C.2
Pour m entier naturel, soit (H_m) la propriété : m admet une unique Z-représentation.
La propriété (H_0) est vraie par convention puisque $0 = \overline{0}$ est l'unique F-représentation et Z-représentation de 0.
Soit maintenant m un entier naturel non nul tel que (H_n) soit vraie pour tout entier naturel inférieur strictement à m. Si une Z-représentation de m existe elle doit s'écrire $\sum_{k=0}^{n} a_k\nu_k$ où $a_n = 1$ et ν_n est le plus grand des nombres de Fibonacci qui sont inférieurs ou égaux à m.

Or on a $m-\nu_n \leq \sigma_n - \nu_n = \nu_{n-1}-1$ et donc, d'après la question précédente et l'hypothèse faite sur m, $m-\nu_n$ admet une Z-représentation et celle-ci commence par un terme ν_k pour un certain k strictement inférieur à $n-1$. Par conséquent m admet une Z-représentation obtenue par adjonction de ν_n à la Z-représentation de $m-\nu_n$.
Si on avait deux Z-représentations de m, elles commenceraient toutes les deux par ν_n et donc $m-\nu_n$ admettrait deux Z-représentations, obtenues en enlevant ν_n de la Z-représentation de m. Ceci ne se peut, par hypothèse, et donc m admet une unique Z-représentation.
Le principe de récurrence permet de conclure que tout entier naturel admet une unique Z-représentation.

Question IV.C.3
On se donne m. S'il est nul on affiche 0 comme Z-représentation. Sinon on cherche le plus grand nombre Fibonacci inférieur ou égal à m et on note n son rang. La Z-représentation de m est alors celle de $m-\nu_n$ à laquelle on rajoute un 1 au début et autant de 0 ensuite de sorte à ce que la longueur de la représentation trouvée soit $n+1$.

Question IV.C.4
On a

$$272 = \overline{100010001000}\ , \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \overline{101010\dots}\ ,$$

où l'écriture de σ_n comporte $n+1$ chiffres.
On a $S_0 = \overline{1}$ et, pour n entier naturel supérieur non nul, $S_n = \sigma_{n+1}-1$. D'où : si n est impair, l'écriture de S_n comporte $n+2$ chiffres et

$$S_n = \overline{1010\dots100}$$

(10 $(n+1)/2$ suivi d'un 0) et si n est pair, l'écriture de S_n comporte aussi $n+2$ chiffres et on a

$$S_n = \overline{1010\dots1001}$$

(10 $n/2$ fois suivi de 01).

Question IV.C.5.a
D'après le calcul explicite des nombres de Fibonacci et le fait que $(1-\sqrt{5})/2$ a une valeur absolue inférieure à 1, il vient

$$\frac{\varphi^{n+2}-1}{\sqrt{5}} \leq \nu_n \leq m < \nu_{n+1} \leq \frac{\varphi^{n+3}+1}{\sqrt{5}}$$

et donc

$$\frac{\log(\sqrt{5}m-1)}{\log(\varphi)} - 2 < n+1 \leq \frac{\log(\sqrt{5}m+1)}{\log(\varphi)} - 1$$

et il vient

$$n+1 = z(m) \sim \frac{\log(m)}{\log(\varphi)}$$

lorsque m tend vers l'infini.

Question IV.C.5.b
On a

$$10^{d(m)-1} \leq m < 10^{d(m)}$$

et donc $d(m) \sim \log(m)/\log(10)$ lorsque m tend vers l'infini. Il en résulte

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{z(m)}{d(m)} = \frac{\log(10)}{\log(\varphi)} \simeq 4.785\ .$$

Question IV.D.1

Soit m un entier naturel. Si la Z-représentation de m admet deux 0 consécutifs, on peut remplacer la séquence $\overline{100}$ par $\overline{011}$ et former une nouvelle F-représentation de m. Par conséquent les seuls entiers ayant une seule F-représentation sont ceux dont la Z-représentation est une suite alternée de 1 et de 0, i.e. les entiers de la forme σ_n pour un certain entier naturel n.

Question IV.D.2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. La Z-représentation de ν_n est ν_n. Toute autre F-représentation ne peut faire intervenir ν_n et doit faire intervenir ν_{n-1} puisque $S_{n-2} = \nu_n - 2 < \nu_n$.
Comme $\nu_n - \nu_{n-1} = \nu_{n-2}$, toute F-représentation de ν_n commençant par ν_{n-1} s'obtient en ajoutant ν_{n-1} à une F-représentation de ν_{n-2}. Il en résulte $\delta(\nu_n) = 1 + \delta(\nu_{n-2})$.
Comme $\delta(1) = \delta(2) = 1$, il vient

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \delta(\nu_n) = E(n/2) + 1$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Question IV.D.3

Soit n un entier naturel. Deux points m et m' symétriques par rapport au centre de l'intervalle $[\nu_n - 1; \nu_{n+1} - 1]$ vérifient $m + m' = S_n$ puisque $\nu_n - 1 + \nu_{n+1} - 1 = \nu_{n+2} - 2$. De plus les F-représentations de m et m' ne contiennent pas de ν_k pour k strictement supérieur à n.
Si maintenant $\sum_{k=0}^{n} a_k \nu_k$ est une F-représentation de m (en autorisant pour une fois de commencer par 0), alors $\sum_{k=0}^{n}(1 - a_k)\nu_k$ est une F-représentation de m'. La réciproque étant vraie, on a ainsi construit une bijection entre l'ensemble des F-représentations de m et celles de m'. Il en résulte $\delta(m) = \delta(m')$, i.e. δ prend la même valeur en des points symétriques par rapport au centre de l'intervalle $[\nu_n - 1; \nu_{n+1} - 1]$.