**UNIVERSITE PARIS7 DENIS DIDEROT**

**<u>Préparation au CAPES</u>**

# <u>CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DU CAPES 2003</u>

## I Opérateurs linéaires positifs. Propriétés et exemples

**I.1** Soit $f \in H$, pour tout réel $x$ de $J$, on a $|f(x)| \geq f(x)$, soit $|f| - f \geq 0$ sur $J$ et $u(|f| - f) \geq 0$, soit encore $u(|f|) \geq u(f)$. De même, pour tout réel $x$ de $J$, on a $|f(x)| \geq -f(x)$, soit $|f| + f \geq 0$ sur $J$ et $u(|f| + f) \geq 0$, soit encore $u(|f|) \geq -u(f)$, or $\forall x \in J, |u(f)(x)| = \max(u(f)(x), -u(f)(x))$, on en conclut que :

$$\forall f \in H, |u(f)| \leq u(|f|).$$

**I.2** Si $u$ est l'endomorphisme nul, alors $u(e_0) = 0$. Réciproquement, supposons que $u(e_0) = 0$ et soit $f \in C(I)$, $f$ est une fonction continue sur le compact $I$, elle y est donc bornée et $\forall x \in I, |f(x)| \leq \|f\|_\infty$, on en déduit que $|f| \leq \|f\|_\infty e_0$ et en utilisant la positivité et la linéarité de $u$ $|u(f)| \leq u(|f|) \leq \|f\|_\infty u(e_0)$, soit comme $u(e_0) = 0$ $|u(f)| \leq 0$, or $\forall x \in I, |u(f)(x)| \geq 0$, donc $|u(f)| \geq 0$, on en conclut que $\forall f \in C(I), |u(f)| = 0$, soit $u(f) = 0$. On a ainsi montré que $u$ est l'endomorphisme nul si et seulement si $u(e_0) = 0$.
On peut faire la même démonstration pour tout $f$ appartenant à $F$, en effet $f$ est une fonction continue $2\pi$-périodique sur R, donc $\forall x \in R, \exists k \in Z, \exists x' \in [0, 2p], f(x) = f(x' + 2kp) = f(x')$ et donc $\underset{x \in R}{Sup}|f(x)| = \underset{x \in [0,2p]}{Sup}|f(x)|$ or $f$ étant une fonction continue sur le compact $[0, 2p]$, elle y est bornée et $\forall x \in R, |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ ; on montre alors de la même façon que précédemment que $u$ est l'endomorphisme nul si et seulement si $u(e_0) = 0$.

**I.3** $u$ étant un endomorphisme, il suffit pour démontrer la continuité de $u$ de démontrer sa continuité à l'origine (en effet, $|u(f) - u(g)| = |u(f - g)|$ ). On a vu précédemment que $\forall f \in H$ $|u(f)| \leq \|f\|_\infty u(e_0)$, de plus $u(e_0)$ est une fonction continue positive sur $I$ ou continue positive $2\pi$-périodique sur R, donc $\|u(e_0)\|_\infty$ est un réel strictement positif ; on a donc $\|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|u(e_0)\|_\infty$ et donc $u$ est lipschitzien de rapport $\|u(e_0)\|_\infty$, il est donc uniformément continu donc continu sur $H$.

**1.4** On a vu que $\forall f \in H - \{0\}, \|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|u(e_0)\|_\infty$ et donc l'ensemble $\left\{ \dfrac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}, f \in H - \{0\} \right\}$ est une partie des réels non vide (car elle contient $\dfrac{\|u(e_0)\|_\infty}{\|e_0\|_\infty}$ ) et majorée, donc elle admet une borne supérieure : $\underset{f \in H - \{0\}}{Sup} \dfrac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \|u\|_\infty$ ; On a déjà montré que $\|u\|_\infty \leq \|u(e_0)\|_\infty$, mais $e_0 \in H - \{0\}$ donc $\|u\|_\infty \geq \dfrac{\|u(e_0)\|_\infty}{\|e_0\|_\infty} = \|u(e_0)\|_\infty$, on en déduit que $\|u\|_\infty = \|u(e_0)\|_\infty$.

**1.5** Si toutes les fonctions $u_{n,k}$ sont positives ou nulles sur $I$, il est clair que $u_n$ est positif sur $C(I)$. Réciproquement, si $u_n$ est positif sur $C(I)$, notons $f_k$ la fonction définie sur $[a, b]$ par :

$$\begin{cases} f_k(x) = 0, \ x \in [a, x_{n,k-1}] \\ f_k(x) = 0, \ x \in [x_{n,k+1}, b] \\ f_k(x_{n,k}) = 1 \end{cases}$$

et $f_k$ est affine sur $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ et sur $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$. Alors $f_k$ est continue et positive sur I, donc $u_n(f_k)=u_{n,k}$ est positive sur I. La même démonstration peut être faite pour tout $k$ strictement compris entre 0 et $n$.

Pour $k=0$, on définit $f_0$ sur $[a,b]$ par :

$$\begin{cases} f_0(x_{n,0})=1 \\ f_0(x)=0,\ x\in[x_{n,1},b] \end{cases} \quad \text{donc } u_n(f_0)=u_{n,0} \text{ est positive sur I.}$$

Pour $k=n$, on définit $f_n$ sur $[a,b]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x_{n,n})=1 \\ f_n(x)=0,\ x\in[a,x_{n,n-1}] \end{cases} \quad \text{donc } u_n(f_n)=u_{n,n} \text{ est positive sur I.}$$

On en conclut que si $u_n$ est positif sur $C(I)$, alors toutes les fonctions $u_{n,k}$, pour $k$ compris entre 0 et $n$, sont positives ou nulles sur $I$.

**1.6.1** Soit $x\in[0,1]$, $B_n(f_y)(x)=\sum_{k=0}^{n} f_y\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)$, soit $B_n(f_y)(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{\frac{ky}{n}} x^k(1-x)^{(n-k)}$ et en utilisant la formule du binôme de Newton $B_n(f_y)(x)=\left(xe^{\frac{y}{n}}+1-x\right)^n=\boldsymbol{j}_n(x,y)$.

**1.6.2** Soit $x$ et $y$ deux réels, on a $\frac{\partial^j \boldsymbol{j}_n(x,y)}{\partial y^j}=\frac{\partial^j \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{ky}{n}} B_{n,k}(x)}{\partial y^j}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^j e^{\frac{ky}{n}}}{\partial y^j}B_{n,k}(x)$ (la dérivée de la somme, c'est la somme des dérivées). On va montrer par récurrence que $\frac{\partial^j e^{\frac{ky}{n}}}{\partial y^j}=\left(\frac{k}{n}\right)^j e^{\frac{ky}{n}}$, il est clair que cette égalité est vraie pour $j=0$, soit $j$ un indice pour lequel elle est vraie, montrons qu'elle est vraie pour $j+1$ ; $\frac{\partial^{j+1} e^{\frac{ky}{n}}}{\partial y^{j+1}}=\frac{\partial\left(\left(\frac{k}{n}\right)^j e^{\frac{ky}{n}}\right)}{\partial y}$, soit $\frac{\partial^{j+1} e^{\frac{ky}{n}}}{\partial y^{j+1}}=\left(\frac{k}{n}\right)^j\frac{\partial\left(e^{\frac{ky}{n}}\right)}{\partial y}=\left(\frac{k}{n}\right)^{j+1}e^{\frac{ky}{n}}$ et la propriété étant héréditaire et vraie pour $j=0$, elle est vraie pour tout $j$. On en déduit que $\frac{\partial^j \boldsymbol{j}_n(x,y)}{\partial y^j}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^j e^{\frac{ky}{n}}B_{n,k}(x)$ et donc que :

$$\forall x\in[0,1],\ \frac{\partial^j \boldsymbol{j}_n(x,0)}{\partial y^j}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^j B_{n,k}(x)=B_n(e_j)(x).$$

**1.6.3** On a $\forall x\in[0,1]$, $B_n(e_0)(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{(n-k)}=(x+1-x)^n=1$ soit $B_n(e_0)=e_0$ de plus $\frac{\partial^j \boldsymbol{j}_n(x,0)}{\partial y^j}=B_n(e_j)(x)$ or $\frac{\partial \boldsymbol{j}_n(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(xe^{\frac{y}{n}}+1-x\right)^n}{\partial y}=xe^{\frac{y}{n}}\left(xe^{\frac{y}{n}}+1-x\right)^{n-1}$, on en tire $\frac{\partial \boldsymbol{j}_n(x,0)}{\partial y}=x$ et donc $\forall x\in[0,1]$, $B_n(e_1)(x)=x$ soit encore $B_n(e_1)=e_1$.

$\frac{\partial^2 \boldsymbol{j}_n(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial xe^{\frac{y}{n}}\left(xe^{\frac{y}{n}}+1-x\right)^{n-1}}{\partial y}=\frac{(n-1)x^2}{n}e^{\frac{2y}{n}}\left(xe^{\frac{y}{n}}+1-x\right)^{n-2}+\frac{x}{n}e^{\frac{y}{n}}\left(xe^{\frac{y}{n}}+1-x\right)^{n-1}$, on en tire $\frac{\partial^2 \boldsymbol{j}_n(x,0)}{\partial y^2}=(n-1)\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}$, et donc $\forall x\in[0,1]$, $B_n(e_2)(x)=(n-1)\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}$ soit encore :

$$B_n(e_2) = \frac{e_1}{n} + \frac{(n-1)e_2}{n}$$ , la formule reste valide pour $n = 1$.

**1.7.1** Dans l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$, faisons le changement de variable $v = x - t$, on obtient $u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(v)K(x-v)dv$, on intègre une fonction de période $2\pi$, donc l'intégrale a la même valeur sur n'importe quel intervalle de longueur $2\pi$ et $u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(v)K(x-v)dv$. En effet, si g est une fonction intégrable de période $2\pi$, on a $\int_{\pi}^{\pi+x} g(t)dt = \int_{-\pi}^{-\pi+x} g(u)du$, il suffit de poser $t = u + 2\pi$ et alors :

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)dt = \int_{-\pi+x}^{\pi} g(t)dt + \int_{\pi}^{\pi+x} g(t)dt = \int_{-\pi+x}^{\pi} g(t)dt + \int_{-\pi}^{-\pi+x} g(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$$ , en utilisant la relation de Chasles.

**1.7.2** $K$ est un polynôme trigonométrique, donc $K(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \left(\alpha_k (\cos kt) + \beta_k \sin(kt)\right)$ de par les formules d'addition pour cosinus et sinus $K(x-t)$ est un polynôme trigonométrique en $x$, dont les coefficients sont des fonctions continues en $t$ (en fait des polynômes trigonométriques)

$u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(x-t)dt$ est un polynôme trigonométrique en $x$ à coefficients réels.

**1.7.3** Si $K$ est un polynôme trigonométrique positif, il est clair que $u$ est positif sur $F$ car l'intégrale est une forme linéaire positive. Réciproquement, si $u$ est positif sur $F$, alors $\forall f \in F, u(f)$ est positive sur R ; posons $f = |K(-t)| - K(-t)$, alors $f \in F$ et $f \geq 0$, de plus $u(f(0)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)K(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(|K(t)|K(t) - K^2(t)\right)dt$, soit $u(f(0)) \leq 0$ or $u$ est positif sur $F$, donc $u(f(0)) = 0$. La fonction $t \to |K(t)|K(t) - K^2(t)$ étant de signe constant et continue sur $[-\pi,\pi]$, on en conclut qu'elle est nulle sur $[-\pi,\pi]$ et donc pour tout $t$ de $[-\pi,\pi]$, on a $|K(t)|K(t) = K^2(t)$, et donc pour tout $t$ de $[-\pi,\pi]$, on a $K(t) \geq 0$, et par périodicité $K \geq 0$.

**1.8.1** Montrons que l'on peut prolonger la fonction $x \to \frac{\sin px}{\sin x}$ en une fonction $\theta_p$ $2\pi$-périodique continue sur R.

Posons $x = k\pi - h, k \in Z$

$\frac{\sin(kp\pi - ph)}{\sin(k\pi - h)} = \frac{(-1)^{kp+1}\sin(ph)}{(-1)^{k+1}\sin(h)} \underset{0}{\approx} (-1)^{k(p-1)} p$, et donc $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(kp\pi - ph)}{\sin(k\pi - h)} = (-1)^{k(p-1)} p$ on définit alors $\theta_p$ par : $\begin{cases} \theta_p(x) = \dfrac{\sin px}{\sin x}, x \notin Z\pi \\ \theta_p(k\pi) = (-1)^{k(p-1)} p \end{cases}$ .La fonction, ainsi définie, est continue sur R. De plus, il est clair que $x \to \frac{\sin px}{\sin x}$ est $2\pi$-périodique sur $R - Z\pi$ et $\theta_p(k\pi + 2k'\pi) = (-1)^{k(p-1)+2k'(p-1)} p = (-1)^{k(p-1)} p = \theta_p(k\pi)$

$\theta_p$ est donc une fonction $2\pi$-périodique continue sur R.

**1.8.2** Soit $x$ un réel quelconque, $\sum_{k=1}^{k=n} \cos kx + i\sum_{k=1}^{k=n} \sin kx = \sum_{k=1}^{k=n} e^{ikx}$ or $\sum_{k=1}^{k=n} e^{ikx} = e^{ix}\left(\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)$ et

$\sum_{k=1}^{k=n} e^{ikx} = \frac{e^{ix} e^{-\frac{ix}{2}} (e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}})}{e^{-\frac{inx}{2}} (e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}})} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, d'où $\sum_{k=1}^{k=n} \cos kx = \cos\frac{(n+1)x}{2} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ pour $x \neq 2r\pi$, soit

$\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\cos kx=\frac{2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$ et pour $x\neq 2r\pi$ :

$\displaystyle\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{k=n}\cos kx=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$, pour $x=2r\pi$ $\displaystyle\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{k=n}\cos 2kr\pi=\frac{(2n+1)}{2}$, $\displaystyle\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{k=n}\cos 2kr\pi=\frac{\sin\frac{(2n+1)2r\pi}{2}}{2\sin\frac{2r\pi}{2}}$ on en conclut que pour tout réel $x$, on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{k=n}\cos kx\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}.$$

**1.8.3** Soit $f$ une fonction appartenant à $F$, pour tout réel $x$, on a :

$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\theta_{2n+1}(\frac{x-t}{2})dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\left((2n+1)(\frac{x-t}{2})\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}dt$, on en déduit d'après la question précédente :

$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\theta_{2n+1}(\frac{x-t}{2})dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{k=n}\cos k(x-t)\right)dt$, soit encore en développant le cosinus :

$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\theta_{2n+1}(\frac{x-t}{2})dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt)dt$, ce qui s'écrit encore :

$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\theta_{2n+1}(\frac{x-t}{2})dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\sum_{k=1}^{k=n}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\cos kt)dt\right)\cos kx+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\sin kt)dt\right)\sin kx\right)$

$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\theta_{2n+1}(\frac{x-t}{2})dt=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{k=n}\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right)$. On en conclut que pour tout $f$ appartenant à $F$ et pour tout réel $x$, on a : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\theta_{2n+1}(\frac{x-t}{2})dt=S_n(f)(x)$.

**1.8.4** Soit $x$ un réel quelconque, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\cos\frac{2k+1}{2}x+i\sum_{k=0}^{k=n-1}\sin\frac{2k+1}{2}x=\sum_{k=0}^{k=n-1}e^{i\frac{(2k+1)}{2}x}$ or

$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}e^{i\frac{(2k+1)}{2}x}=e^{\frac{ix}{2}}\left(\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)$, soit pour $x\neq 2r\pi$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}e^{i\frac{2k+1}{2}x}=\frac{e^{\frac{ix}{2}}e^{-\frac{ix}{2}}(e^{-\frac{inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}})}{e^{-\frac{inx}{2}}(e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}})}=e^{\frac{inx}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ d'où l'on tire que pour $x\neq 2r\pi$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\sin(2k+1)x=\sin\frac{nx}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, on en conclut que pour tout réel $x$, car c'est trivialement vrai pour $x=2r\pi$, on a $\displaystyle\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sum_{k=0}^{k=n-1}\sin(2k+1)x\right)=\sin^2\frac{nx}{2}$.

**1.8.5** Soit $f$ une fonction appartenant à $F$, pour tout réel $x$, on a :

$\displaystyle T_n(f)(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(f)(x)$ or $\displaystyle S_k(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\theta_{2k+1}(\frac{x-t}{2})dt$, on en déduit que :

$T_n(f)(x)=\dfrac{1}{2n\boldsymbol{p}}\displaystyle\int_{-p}^{p}\dfrac{f(t)}{\sin\left(\dfrac{x-t}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\dfrac{2k+1}{2}(x-t)\right)dt=\int_{-p}^{p}f(t)\dfrac{\sin^2\dfrac{n(x-t)}{2}}{2n\boldsymbol{p}\sin^2\left(\dfrac{x-t}{2}\right)}dt$ . Il reste à montrer que

$\dfrac{\sin^2\dfrac{nx}{2}}{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ est un polynôme trigonométrique positif. C'est à l'évidence une fonction positive, il reste à montrer que

c'est un polynôme trigonométrique, or $\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\cos kx\right)=\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ et donc $\dfrac{\sin^2\dfrac{nx}{2}}{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}=\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\cos kx\right)^2$ .

On va montrer par récurrence que $\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\cos kx\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}+u_n(x)\right)^2$ est un polynôme trigonométrique. Pour $n$=1,

on a $\left(\dfrac{1}{2}+u_1(x)\right)^2=\dfrac{3}{4}+\cos x+\dfrac{\cos 2x}{2}$, on nomme H(n-1) la propriété $\left(\dfrac{1}{2}+u_{n-1}(x)\right)^2=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2}a_{(n-1),k}\cos kx$,
H(1) est vraie, soit n un indice tel que H(n-1) soit vraie on a alors :

$\left(\dfrac{1}{2}+u_n(x)\right)^2=\left(\left(\dfrac{1}{2}+u_{n-1}(x)\right)+\cos nx\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}+u_{n-1}(x)\right)^2+\cos nx+2u_{n-1}(x)\cos nx+\cos^2 nx$, soit

$\left(\dfrac{1}{2}+u_n(x)\right)^2=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2}a_{(n-1),k}\cos kx+\cos nx+\sum_{k=1}^{n-1}\left(2\cos kx\cos nx\right)+\cos^2 nx$ or

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2\cos kx\cos nx+\cos^2 nx=\dfrac{\cos 2nx+1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos(k+n)x-\cos(n-k)x\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos 2nx}{2}+\sum_{k=0}^{2n-1}\cos kx-\cos nx$ on en tire :

$\left(\dfrac{1}{2}+u_n(x)\right)^2=\left(a_{n-1,0}+\dfrac{1}{2}\right)+\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-2}\left(a_{(n-1),k}+1\right)\cos kx-2\cos nx+\cos(2n-1)x+\dfrac{\cos 2nx}{2}=\sum_{k=0}^{2n}b_{n,k}\cos kx$,
on en conclut que la propriété est héréditaire et comme elle est vraie pour $n$=1, elle est vraie pour tout $n$ positif strict et

$\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\cos kx\right)^2$ est un polynôme trigonométrique positif, donc aussi $\dfrac{\sin^2\dfrac{nx}{2}}{2n\boldsymbol{p}\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

**1.8.6** Soit $f$ une fonction appartenant à $F$, pour tout réel $x$, on a :

$T_n(f)(x)=\displaystyle\int_{-p}^{p}f(t)\dfrac{\sin^2\dfrac{n(x-t)}{2}}{2n\boldsymbol{p}\sin^2\left(\dfrac{x-t}{2}\right)}dt$ et d'après la question précédente et la question 1.7.3, on peut affirmer que

$T_n(f)$ est un opérateur linéaire positif.

**1.8.7** On a $a_k(c_j)=\dfrac{1}{\boldsymbol{p}}\displaystyle\int_{-p}^{p}\cos jt\cos kt\,dt=\dfrac{1}{2\boldsymbol{p}}\int_{-p}^{p}\cos(j+k)t\,dt+\dfrac{1}{2\boldsymbol{p}}\int_{-p}^{p}\cos(j-k)t\,dt$ , soit $a_k(c_j)=0,\ k\neq j$

et $a_j(c_j)=\dfrac{1}{\boldsymbol{p}}\displaystyle\int_{-p}^{p}(\cos jt)^2\,dt=1$ et $\dfrac{a_0(c_0)}{2}=\dfrac{1}{2\boldsymbol{p}}\displaystyle\int_{-p}^{p}dt=1$ .

On a $b_k(c_j)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos jt\sin kt\,dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(j+k\right)t\,dt-\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(j-k\right)t\,dt=0$ , soit $b_k(c_j)=0, \forall k$. Des résultats précédents, on déduit que $\begin{cases} j>n\Rightarrow S_n(c_j)=0 \\ 0\le j\le n\Rightarrow S_n(c_j)=c_j \end{cases}$ et de ces derniers résultats, on déduit que :

$$\begin{cases} j\ge n\Rightarrow T_n(c_j)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}S_k(c_j)=0 \\ 0< j<n\Rightarrow T_n(c_j)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}S_k(c_j)=\dfrac{(n-j)}{n}c_j \end{cases}$$

On a $a_k(s_j)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin\ jt\cos kt\,dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(j+k\right)t\,dt-\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(j-k\right)t\,dt=0$ , soit $a_k(s_j)=0, \forall k$ et

$b_k(s_j)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin\ jt\sin kt\,dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(j-k)t\,dt-\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(j+k)t\,dt=0$, soit $b_k(s_j)=0, \forall k\neq j$.

$b_j(s_j)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\sin\ jt)^2\,dt=1$. Des résultats précédents, on déduit que $\begin{cases} j>n\Rightarrow S_n(s_j)=0 \\ 0<j<n\Rightarrow S_n(s_j)=s_j \end{cases}$ et de ces derniers résultats, on déduit que :

$$\begin{cases} j\ge n\Rightarrow T_n(s_j)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}S_k(s_j)=0 \\ 0< j<n\Rightarrow T_n(s_j)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}S_k(s_j)=\dfrac{(n-j)}{n}s_j \end{cases}.$$

## II Théorème de Korovkin sur $C(I)$

**II.1** $f$ étant continue sur le compact $I$, elle y est uniformément continue, donc étant donné $\varepsilon>0$ , on peut trouver $\eta>0$ , tel que $\forall(t,x)\in I\times I, 0<|t-x|\le\eta\Rightarrow|f(t)-f(x)|\le\varepsilon$ et donc tel que :

$$|f(t)-f(x)|\le\varepsilon+2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t-x)^2.$$

Etudions maintenant le cas où $|t-x|>\eta$, on a aussi $|t-x|^2>\eta^2$ , soit encore $\dfrac{|t-x|^2}{\eta^2}>1$ , or en utilisant l'inégalité triangulaire, on a $|f(t)-f(x)|\le|f(t)|+|f(x)|\le 2\|f\|_\infty$ , on en conclut aisément que :

$\forall(t,x)\in I\times I, |t-x|>\eta\Rightarrow|f(t)-f(x)|\le 2\dfrac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t-x)^2\le\varepsilon+2\dfrac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t-x)^2$ . En conclusion :

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall(t,x)\in I\times I,|f(t)-f(x)|\le\varepsilon+2\dfrac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t-x)^2$.

**II.2** Soit $x$ fixé appartenant à $I$ , on a $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall t\in I,|f(t)-f(x)|\le\varepsilon+2\dfrac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t^2-2xt+x^2)$ et donc $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in I,\ |f-f(x)e_0|\le\varepsilon e_0+2\dfrac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(e_2-2xe_1+x^2e_0)$ , car $\eta$ ne dépend pas de $x$.

**II.3** Soit $u$ un opérateur linéaire positif sur $C(I)$ , d'après I.1, on a

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in I,\ |u(f-f(x)e_0)|\le\varepsilon u(e_0)+2\dfrac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(u(e_2)-2xu(e_1)+x^2u(e_0))$.

**II.4.1** Des hypothèses, on déduit que $\forall i\in\{0,1,2\}$ la suite $(u_n(e_i))_{n\in N}$ converge uniformément vers $e_i$ . De plus, remarquons que $\forall x\in I, \left(e_2-2(e_1)^2+e_2e_0\right)(x)=x^2-2x^2+x^2=0$. Il s'ensuit que :

$\|g_n - 0\|_\infty = \left\|u_n(e_2) - 2e_1 u_n(e_1) + e_2 u_n(e_0) - e_2 + 2(e_1)^2 - e_2 e_0\right\|_\infty$, soit en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que la norme du produit est inférieure au produit des normes:
$\|g_n\|_\infty \le \|u_n(e_2) - e_2\|_\infty + 2\|e_1\|_\infty \|u_n(e_1) - e_1\|_\infty + \|e_2\|_\infty \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty$.
La convergence uniforme de $(u_n(e_2))_{n\in N}$ vers $e_2$ permet d'affirmer $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n(e_2) - e_2\|_\infty = 0$, la convergence uniforme de $(u_n(e_1))_{n\in N}$ vers $e_1$ permet d'affirmer $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n(e_1) - e_1\|_\infty = 0$, la convergence uniforme de $(u_n(e_0))_{n\in N}$ vers $e_0$ permet d'affirmer $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty = 0$, on en conclut en utilisant le théorème d'encadrement des limites que $\|g_n\|_\infty$ est compris entre 0 et une suite qui converge vers 0 donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty = 0$, ce qui démontre la convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\in N}$ vers $0$.

**II.4.2** Soit $\dfrac{e}{4} > 0$, d'après la question II.3, on a : soit en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\exists h > 0, \forall x \in I, |h_n(x)| = |(u_n(f - f(x)e_0))(x)| \le \frac{e}{4} u_n(e_0)(x) + 2\frac{\|f\|_\infty}{h^2}(u_n(e_2)(x) - 2x u_n(e_1)(x) + x^2 u_n(e_0)(x))$$

$\exists h > 0, \forall x \in I, |h_n(x)| \le \dfrac{e}{4}|u_n(e_0)(x)| + 2\dfrac{\|f\|_\infty}{h^2}|g_n(x)| \le \dfrac{e}{4}\|u_n(e_0)\|_\infty + 2\dfrac{\|f\|_\infty}{h^2}\|g_n\|_\infty$ et la borne supérieure étant le plus petit des majorants, $\exists h > 0,\ \|h_n\|_\infty \le \dfrac{e}{4}\|u_n(e_0)\|_\infty + 2\dfrac{\|f\|_\infty}{h^2}\|g_n\|_\infty$. Soit $e' = 1$, la convergence uniforme de $(u_n(e_0))_{n\in N}$ vers $e_0$ permet d'affirmer $\exists N_0, \forall n, n \ge N_0 \Rightarrow \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty \le 1$, ce qui se traduit par $\forall x \in I, |u_n(e_0)(x) - e_0(x)| \le 1$, soit encore $\forall x \in I, -1 + e_0(x) \le u_n(e_0)(x) \le 1 + e_0(x)$, et enfin $\forall x \in I, 0 \le u_n(e_0)(x) \le 2$, d'autre part la convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\in N}$ vers $0$ permet d'affirmer

$\exists N_1, \forall n, n \ge N_1 \Rightarrow \|g_n\|_\infty \le \dfrac{eh^2}{4\|f\|_\infty}$, on en conclut en posant $N = \max(N_0, N_1)$ que

$\forall e, \exists N, \forall n, n \ge N\ \ \|h_n\|_\infty \le \dfrac{e}{4}\|u_n(e_0)\|_\infty + 2\dfrac{\|f\|_\infty}{h^2}\|g_n\|_\infty \le \dfrac{e}{4}2 + 2\dfrac{\|f\|_\infty}{h^2}\dfrac{eh^2}{4\|f\|_\infty} = e$, ceci démontre la convergence uniforme de la suite $(h_n)_{n\in N}$ vers $0$.

**II.4.3** Soit $f \in C(I) - \{0\}$, on a :
$\forall x \in I, u_n(f)(x) - f(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x) + f(x)u_n(e_0)(x) - f(x)e_0(x)$, soit
$\forall x \in I, u_n(f)(x) - f(x) = h_n(x) + f(x)(u_n(e_0) - e_0)(x)$ et en utilisant l'inégalité triangulaire,
$\forall x \in I, |u_n(f)(x) - f(x)| \le |h_n(x)| + |f(x)||(u_n(e_0) - e_0)(x)| \le \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty$ et la borne supérieure étant le plus petit des majorants, $\|u_n(f) - f\|_\infty \le \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty$. La convergence uniforme de $(u_n(e_0))_{n\in N}$ vers $e_0$ permet d'affirmer $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty = 0$, la convergence uniforme de la suite $(h_n)_{n\in N}$ vers $0$ permet d'affirmer $\lim\limits_{n\to+\infty} \|h_n\|_\infty = 0$, on en conclut en utilisant le théorème d'encadrement des limites que $\|u_n(f) - f\|_\infty$ est compris entre 0 et une suite qui converge vers 0 donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n(f) - f\|_\infty = 0$, ce qui démontre la convergence uniforme de la suite $(u_n(f))_{n\in N}$ vers $f$ sur $I$.
Si $f = 0$, on a : $\forall n, \|u_n(0) - 0\|_\infty = 0$, il y a donc convergence uniforme de la suite $(u_n(0))_{n\in N}$ vers la fonction nulle sur $I$.

**II.5** D'après la question I.5, $B_n$ est un opérateur linéaire positif sur $C([0,1])$, pour utiliser les résultats de II.4, on va montrer que $\forall i \in \{0,1,2\}$, la suite $(B_n(e_i))_{n\in N}$ converge uniformément vers $e_i$. On a vu en I.6.3 que $B_n(e_0) = e_0$, $B_n(e_1) = e_1$ et $B_n(e_2) = \dfrac{e_1}{n} + \dfrac{n-1}{n}e_2$. Il est clair que

$\lim\limits_{n\to+\infty}\|B_n(e_0)-e_0\|_\infty=\lim\limits_{n\to+\infty}\|B_n(e_1)-e_1\|_\infty=0$, d'autre part $\|B_n(e_2)-e_2\|_\infty=\dfrac{\|e_1-e_2\|_\infty}{n}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\|B_n(e_2)-e_2\|_\infty=0$, on en conclut que $\forall i\in\{0,1,2\}$, la suite $(B_n(e_i))_{n\in N}$ converge uniformément vers $e_i$.

En utilisant le résultat de 4.1.3, on peut alors affirmer que $\forall f\in C([0,1])$, la suite $(B_n(f))_{n\in N}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

**II.6** D'après la question précédente, $\forall f\in C([0,1])$, la suite $(B_n(f))_{n\in N}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

Soit $g\in C([a,b])$ et soit $\begin{cases} h:[0,1]\to[a,b] \\ x\mapsto a+(b-a)x\end{cases}$ $h$ est une bijection de $[0,1]\to[a,b]$. D'autre part $g\circ h\in C([0,1])$ et donc la suite $(B_n(g\circ h))_{n\in N}$ converge uniformément vers $g\circ h$ sur $[0,1]$.

$\|B_n(g\circ h)\circ h^{-1}-g\|_\infty=\|B_n(g\circ h)\circ h^{-1}-(g\circ h)\circ h^{-1}\|_\infty$, or

$\|B_n(g\circ h)\circ h^{-1}-(g\circ h)\circ h^{-1}\|_\infty=\sup\limits_{x\in[a,b]}|B_n(g\circ h)\circ h^{-1}(x)-(g\circ h)\circ h^{-1}(x)|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|B_n(g\circ h)(x)-(g\circ h)(x)|$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|B_n(g\circ h)(x)-(g\circ h)(x)|=0$

implique $\lim\limits_{n\to+\infty}\|B_n(g\circ h)\circ h^{-1}-(g\circ h)\circ h^{-1}\|_\infty=\lim\limits_{n\to+\infty}\|B_n(g\circ h)\circ h^{-1}-g\|_\infty=0$, la suite $(B_n(g\circ h)\circ h^{-1})_{n\in N}$ converge donc uniformément vers $g$ sur $[a,b]$. Il reste à montrer que $B_n(g\circ h)\circ h^{-1}(x)$ est bien un polynôme.

$B_n(g\circ h)(y)=\sum\limits_{k=1}^{n}g(h(\frac{k}{n}))C_n^k(1-h(y))^k h(y)^{(n-k)}$ et $y=h^{-1}(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$ soit

$B_n(g\circ h)(h^{-1}(x))=\sum\limits_{k=1}^{n}g(h(\frac{k}{n}))C_n^k\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^k\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^{(n-k)}=\sum\limits_{k=1}^{n}g(h(\frac{k}{n}))\dfrac{C_n^k}{(b-a)^n}(b-x)^k(x-a)^{(n-k)}$, c'est bien un polynôme à coefficients réels.

On a ainsi montré que $R[x]$ est dense dans $C([a,b])$ muni de la convergence uniforme.

**II.7.1** Soit $f\in C([0,b])$, on a pour tout $x\in[0,b]$, $u_n(f)(x)=e^{-nx}\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(\frac{k}{n})\frac{n^k}{k!}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-nx}f(\frac{k}{n})\frac{n^k}{k!}x^k$,

posons $v_k(x)=e^{-nx}f(\frac{k}{n})\frac{n^k}{k!}x^k$, on a $\forall x\in I,\ u_n(f)(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}v_k(x)$ ; étudions la série de terme général $v_k(x)$ et montrons que cette série converge uniformément sur $I$. $\sup\limits_{x\in R^+}|f(x)|=\sup\limits_{x\in I}|f(x)|=\|f\|_\infty$ est un réel positif et

$\sup\limits_{x\in I}|v_k(x)|\le\|f\|_\infty\dfrac{n^k}{k!}|b|^k=w_k$. La série de terme général $w_k$ est une série numérique à termes positifs, on peut donc utiliser le critère de D'Alembert : $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{w_{k+1}}{w_k}=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\|f\|_\infty|b|^{k+1}n^{k+1}k!}{\|f\|_\infty|b|^k n^k(k+1)!}=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{n|b|}{k+1}=0$. La série de terme général $w_k$ étant une série numérique convergente, la série de terme général $v_k(x)$ est normalement donc uniformément convergente sur $I$. Chaque fonction $v_k$ étant définie et continue sur $I$, la somme de la série est elle-même définie et continue sur $I$ et $u_n(f)\in C(I)$.

**II.7.2** On va d'abord montrer que $u_n$ est un opérateur linéaire positif sur $C(I)$, puis que $(u_n(e_0))_{n\in N},(u_n(e_1))_{n\in N},(u_n(e_2))_{n\in N}$ convergent uniformément respectivement vers $e_0,e_1,e_2$, ensuite, on utilisera la conclusion de la question II.4.3.

$u_n(f)(x)=e^{-nx}\sum\limits_{k=0}^{nb}f(\frac{k}{n})\frac{n^k}{k!}x^k+e^{-nx}\sum\limits_{k>nb}f(b)\frac{n^k}{k!}x^k$ et $u_n$ étant somme de deux opérateurs linéaires positifs est un opérateur linéaire positif sur $C(I)$.

$\forall n\in N,\forall x\in I,\ u_n(e_0)(x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}x^k=e^{-nx}e^{nx}=e_0(x)$ et $(u_n(e_0))_{n\in N}$ converge uniformément vers $e_0$.

$\forall n\in N,\forall x\in I,\ u_n(e_1)(x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^k}{k!}x^k=e^{-nx}x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}=xe^{-nx}e^{nx}=e_1(x)$ et $(u_n(e_1))_{n\in N}$ converge uniformément vers $e_1$.

$\forall n\in N,\forall x\in I,\ u_n(e_2)(x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{n^k}{k!}x^k=e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)+1}{(k-1)!}n^{k-2}x^k$ soit encore

$\forall n\in N,\forall x\in I,\ u_n(e_2)(x)=e^{-nx}\left(\frac{x}{n}+x^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n^{k-2}x^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{x}{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n^{k-1}x^{k-1}}{(k-1)!}\right)$, soit

$\forall n\in N,\forall x\in I,\ u_n(e_2)(x)=e^{-nx}\left(\frac{x}{n}+x^2e^{nx}+\frac{x}{n}e^{nx}+\frac{x}{n}\right)=x^2+2\frac{x}{n}e^{-nx}+\frac{x}{n}$, on a donc

$\forall n\in N,\sup_{x\in I}|u_n(e_2)(x)-e_2(x)|=\sup_{x\in I}\left|2\frac{x}{n}e^{-nx}+\frac{x}{n}\right|\le 3\frac{b}{n}$, on en déduit que

$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in I}|u_n(e_2)(x)-e_2(x)|\right)=0$ et que $(u_n(e_2))_{n\in N}$ converge uniformément vers $e_2$.

En utilisant la conclusion de la question II.4.3., on peut affirmer que $\forall f\in C(I),(u_n(f))_{n\in N}$ converge uniformément vers $f$.

**II.8.1** Le système : $\begin{cases} a_0q_0(x_0)+a_1q_1(x_0)+a_2q_2(x_0)=0\\ a_0q_0(x_1)+a_1q_1(x_1)+a_2q_2(x_1)=0\\ a_0q_0(x_2)+a_1q_1(x_2)+a_2q_2(x_2)=0\end{cases}$ a au moins une racine non nulle $(a_0,\ a_1,\ a_2)$, si on note $u$, l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & q_2(x_0)\\ q_0(x_1) & q_1(x_1) & q_2(x_1)\\ q_0(x_2) & q_1(x_2) & q_2(x_2)\end{pmatrix}$, cela veut dire que $\ker u\neq\{0\}$. On veut montrer que le système : $\begin{cases} a_0q_0(x_0)+a_1q_0(x_1)+a_2q_0(x_2)=0\\ a_0q_1(x_0)+a_1q_1(x_1)+a_2q_1(x_2)=0\\ a_0q_2(x_0)+a_1q_2(x_1)+a_2q_2(x_2)=0\end{cases}$ a une solution non nulle, or ce système est associé à l'endomorphisme $u^*$ endomorphisme adjoint de $u$. Les endomorphismes $u^*$ et $u$ peuvent être considérés comme des endomorphismes de $R^3$. Comme $\ker u\neq\{0\}$, on a $\mathbf{dim}\ker u\ge 1$ soit $\mathbf{dim}\mathbf{Im}u\le 2$ et donc la dimension de l'orthogonal de $\mathbf{Im}u$ est supérieure ou égale à $3-2=1$, il n'est pas réduit à 0 et comme il est égal à $\ker u^*$, on a $\ker u^*\neq\{0\}$, le système a donc une solution non nulle appartenant à $R^3$ que l'on note $(b_0,\ b_1,\ b_2)$ ; on pose $b'_0=\frac{b_0}{2\max(|b_0|,|b_1|,|b_2|)}$, $b'_1=\frac{b_1}{2\max(|b_0|,|b_1|,|b_2|)}$ et $b'_2=\frac{b_2}{2\max(|b_0|,|b_1|,|b_2|)}$, vue la construction de ces trois nombres réels, ils sont solutions du système et ils sont de module strictement inférieur à 1, si au moins deux d'entre eux sont positifs ou nuls, on a trouvé $l_0=b'_0$, $l_1=b'_1$ et $l_2=b'_2$. Si au plus un des trois est positif ou nul, les deux autres sont négatifs et on a trouvé $l_0=-b'_0$, $l_1=-b'_1$ et $l_2=-b'_2$, dans tous les cas on a trouvé trois réels non tous nuls, répondant à la question.

Au besoin en modifiant la numérotation des racines de $q$, on a bien $-1<\ l_0\le l_1\le\ l_2,\ \ l_1\ge 0$.

**II.8.2** On a $\forall n\in N,\ \forall x\in I, u_n(f)(x)=(e_0(x)-d_n(x))f(x)+((1+\ l_0)f(x_0)+\ l_1f(x_1)+\ l_2f(x_2))d_n(x)$, or $\forall x\in I,\ (e_0(x)-d_n(x))\ge 0$ car $0\le d_n(x)\le 1$, donc $(e_0-d_n)f$ est un opérateur linéaire positif, de même $((1+\ l_0)f(x_0)+\ l_1f(x_1)+\ l_2f(x_2))d_n$ est un opérateur linéaire positif, d'après I.5 et $u_n$ étant somme de deux opérateurs linéaires positifs est un opérateur linéaire positif sur $C(I)$.

**II.8.3** On a $\forall k\in\{0,1,2\},\ u_n(q_k)=(e_0-d_n)q_k+((1+\ l_0)q_k(x_0)+\ l_1q_k(x_1)+\ l_2q_k(x_2))d_n$ or $\forall k\in\{0,1,2\},\ (l_0q_k(x_0)+\ l_1q_k(x_1)+\ l_2q_k(x_2))=0$, donc,

$\forall k \in \{0,1,2\},\ u_n(q_k) = (e_0 - d_n)q_k + q_k(x_0)d_n = q_k + (q_k(x_0) - q_k)d_n$, d'où l'on tire
$\forall k \in \{0,1,2\},\ u_n(q_k) - q_k = (q_k(x_0) - q_k)d_n$, on a donc
$\forall k \in \{0,1,2\},\ \sup\limits_{x\in I}|u_n(q_k)(x) - q_k(x)| = \sup\limits_{x\in I}|q_k(x_0) - q_k(x)||d_n(x)|$. De plus $\forall k \in \{0,1,2\}, q_k$ est continue sur $I$,
donc étant donné $e > 0$ il existe $a_k$ tel que $\forall x \in I\ |x - x_0| \le a_k \Rightarrow |q_k(x_0) - q_k(x)| \le e$. De plus,
$\forall k \in \{0,1,2\}, \sup\limits_{x\in I}|q_k(x_0) - q_k(x)||d_n(x)| = \sup\limits_{x\in\left[x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right]}|q_k(x_0) - q_k(x)||d_n(x)| \le \sup\limits_{x\in\left[x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right]}|q_k(x_0) - q_k(x)|$ soit $N$ tel

que $\frac{1}{N} \le \min(a_0, a_1, a_2)$, alors $\forall k \in \{0,1,2\}, \forall n \ge N\ \sup\limits_{x\in\left[x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right]}|q_k(x_0) - q_k(x)| \le e$, on en conclut que

$\forall e > 0\ \forall k \in \{0,1,2\}, \exists N\ \forall n \ge N\ \sup\limits_{x\in I}|u_n(q_k)(x) - q_k(x)| \le \sup\limits_{x\in\left[x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right]}|q_k(x_0) - q_k(x)| \le e$, ce qui prouve que

$\forall k \in \{0,1,2\},\ (u_n(q_k))_{n\in N}$ converge uniformément vers $q_k$ sur $I$.

**II.8.4** On suppose que $a \le x_0 < x_1 < x_2 \le b$, sinon on adapte la démonstration. On note $f$ continue sur $I$, définie par $f(a) = 0$, $f(x_0) = l_0$ et $f$ affine sur $[a, x_0]$, puis $f(x_1) = l_1$ et $f$ affine sur $[x_0, x_1]$, ensuite $f(x_2) = l_2$ et $f$ affine sur $[x_1, x_2]$, enfin $f(b) = 0$ et $f$ affine sur $[x_2, b]$.
Pour tout $x \in [a,b] - \{x_0\}$ $u_n(f)(x) = (1 - d_n(x))f(x) + ((1 + l_0)f(x_0) + l_1 f(x_1) + l_2 f(x_2))d_n(x)$ or pour $x$ fixé, $x \in [a,b] - \{x_0\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(f)(x) = f(x)$. Or on a
$u_n(f)(x_0) = (1 - d_n(x_0))f(x_0) + ((1 + l_0)f(x_0) + l_1 f(x_1) + l_2 f(x_2))d_n(x_0)$, soit
$u_n(f)(x_0) - f(x_0) = l_0 f(x_0) + l_1 f(x_1) + l_2 f(x_2)$, donc $u_n(f)(x_0) - f(x_0) = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2$, on en déduit que
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(f)(x_0) = f(x_0) + l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 > f(x_0)$, on a trouvé $f$ continue sur $I$, telle que $(u_n(f))_{n\in N}$ ne converge pas simplement, donc pas uniformément vers $f$.

## III Théorème de Korovkin sur $F$

**III.1** Soit $f \in F$, elle est $2p$-périodique et continue sur $R$. $f$ étant continue sur $[0,2p]$, elle y est uniformément continue. Etant donné $e > 0$ il existe $a > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0,2p]^2\ |x - y| < a \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le e$. Posons
$b = \inf\left(a, \frac{p}{2}\right)$, soit $x'$ et $y'$ deux réels quelconques tels que $|x' - y'| < b$, alors il existe $k \in Z$ tel que
$kp \le x' \le (k+2)p$ et $kp \le y' \le (k+2)p$, notons $x = x' - kp$ et $y = y' - kp$, alors $|x - y| = |x' - y'| < b$ et
$0 \le x \le 2p$ et $0 \le y \le 2p$. $f$ étant $2p$-périodique, on a $f(x) = f(x')$ et $f(y) = f(y')$. En définitive,
$\forall (x', y') \in R^2\ |x' - y'| < b \Rightarrow |f(x') - f(y')| = |f(x) - f(y)| \le e$ et $f$ est uniformément continue sur $R$.

**III.2** Soit $f \in F$, elle est uniformément continue sur $R$. Etant donné $e > 0$ il existe $a > 0$ tel que
$\forall (t,x) \in R^2\ |x - t| < a \Rightarrow |f(t) - f(x)| \le e$.
Soit $h = \inf\left(a, \frac{p}{2}\right)$, on a $\forall (t,x) \in R^2\ |x - t| < h \Rightarrow |f(t) - f(x)| \le e$ soit
$|f(t) - f(x)| \le e + \frac{2\|f\|_\infty}{y_0(h)} y_x(t)$. Soit $(t,x) \in R^2$ , $\exists k \in Z^+, \exists y \in [0,p]\ |t - x| = y + 2kp$, on a soit
$t - (x + 2kp) = y$ soit $x - (t + 2kp) = y$, dans les deux cas
$|f(t) - f(x + 2kp)| = |f(x) - f(t + 2kp)| = |f(t) - f(x)|$ et $y < h \Rightarrow |f(t) - f(x)| \le e$, soit
$|f(t) - f(x)| \le e + \frac{2\|f\|_\infty}{y_0(h)} y_x(t)$.

Supposons maintenant que $y > h$, on a $0 < \frac{h}{2} < \frac{y}{2} \leq \frac{p}{2}$, la fonction $u \to \sin^2 u$ est croissante sur $\left[0, \frac{p}{2}\right]$, et donc $0 < \sin^2 \frac{h}{2} < \sin^2 \frac{y}{2} \leq 1$, or $\sin^2 \frac{y}{2} = \sin^2\left(\frac{|t-x|-2kp}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{|t-x|}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)$ et donc

$\sin^2 \frac{h}{2} \leq \sin^2 \frac{t-x}{2}$, soit $\frac{\sin^2 \frac{t-x}{2}}{\sin^2 \frac{h}{2}} \geq 1$.

De plus, $\forall (t,x) \in R^2 \ |f(t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ et en utilisant l'inégalité précédente

$$|f(t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \frac{\sin^2 \frac{t-x}{2}}{\sin^2 \frac{h}{2}} \leq e + 2\|f\|_\infty \frac{\sin^2 \frac{t-x}{2}}{\sin^2 \frac{h}{2}} = e + 2\|f\|_\infty \frac{y_x(t)}{y_0(h)}$$ .Etant donné $e > 0$, on a montré qu'il existe $h \in ]0,p[$ tel que

$$\forall (t,x) \in R^2 \ |f(t) - f(x)| \leq e + 2\|f\|_\infty \frac{y_x(t)}{y_0(h)}.$$

**III.3** Soit $f \in F$, étant donné $e > 0$, on a montré précédemment qu'il existe $h \in ]0,p[$ tel que :

$\forall (t,x) \in R^2 \ |f(t) - f(x)c_0(t)| \leq ec_0(t) + 2\|f\|_\infty \frac{y_x(t)}{y_0(h)}$, on en tire que :

$\forall x \in R \ |f - f(x)c_0| \leq ec_0 + 2\|f\|_\infty \frac{y_x}{y_0(h)}$. D'autre part, on a

$\forall (t,x) \in R^2 \ 2y_x(t) = \sin^2 \frac{t-x}{2} = 1 - \cos t \cos x - \sin t \sin x$ que l'on peut écrire

$\forall (t,x) \in R^2 \ 2y_x(t) = c_0(t) - c_1(t)\cos x - s_1(t)\sin x$, d'où l'on tire

$\forall x \in R \ 2y_x = c_0 - c_1 \cos x - s_1 \sin x$ et en remplaçant dans l'inégalité précédente

$\forall x \in R \ |f - f(x)c_0| \leq ec_0 + \frac{\|f\|_\infty}{y_0(h)}(c_0 - c_1 \cos x - s_1 \sin x)$. En conclusion, étant donné $e > 0$, on a montré précédemment qu'il existe $h \in ]0,p[$ tel que :

$$\forall x \in R \ |f - f(x)c_0| \leq ec_0 + \frac{\|f\|_\infty}{y_0(h)}(c_0 - c_1 \cos x - s_1 \sin x).$$

**III.4** Soit $u$ un opérateur linéaire positif sur $F$ et $f \in F$, étant donné $e > 0$, on a montré précédemment qu'il existe $h \in ]0,p[$ tel que : $\forall x \in R \ |f - f(x)c_0| \leq ec_0 + \frac{\|f\|_\infty}{y_0(h)}(c_0 - c_1 \cos x - s_1 \sin x)$. Or, d'après I.1, $\forall x \in R \ |u(f - f(x)c_0)| \leq u(|f - f(x)c_0|)$ donc

$\forall x \in R \ |u(f - f(x)c_0)| \leq u\left(ec_0 + \frac{\|f\|_\infty}{y_0(h)}(c_0 - c_1 \cos x - s_1 \sin x)\right)$ et en utilisant la linéarité de $u$

$$\forall x \in R \ |u(f - f(x)c_0)| \leq eu(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{y_0(h)}(u(c_0) - u(c_1)\cos x - u(s_1)\sin x).$$

**III.5.1** On sait que $\forall x \in R \ c_1^2(x) + s_1^2(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 = c_0$ et donc $c_1^2 + s_1^2 - c_0 = 0$, on va montrer que la suite $(g_n)_{n \in N}$ converge uniformément vers $c_1^2 + s_1^2 - c_0$ sur $R$.

$$\|g_n - 0\|_\infty = \left\|g_n - c_1^2 - s_1^2 + c_0\right\|_\infty = \|u_n(c_0) - c_0 + c_1(u_n(c_1) - c_1) + s_1(u_n(s_1) - s_1)\|_\infty$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire et le produit des normes, on a
$\|g_n\|_\infty \le \|u_n(c_0)-c_0\|_\infty + \|c_1\|_\infty \|u_n(c_1)-c_1\|_\infty + \|s_1\|_\infty \|u_n(s_1)-s_1\|_\infty$ or $\|c_1\|_\infty = 1$ et $\|s_1\|_\infty = 1$, donc $\|g_n\|_\infty \le \|u_n(c_0)-c_0\|_\infty + \|u_n(c_1)-c_1\|_\infty + \|u_n(s_1)-s_1\|_\infty$ . D'après les hypothèses, pour $i \in \{0,1\}$, la suite $(u_n(c_i))_{n\in N}$ converge uniformément vers $c_i$ sur $R$, donc étant donné $e>0$, il existe $N_i$ tel que $\forall n, n \ge N_i \Rightarrow \|u_n(c_i)-c_i\|_\infty \le \dfrac{e}{3}$, et la suite $(u_n(s_1))_{n\in N}$ converge uniformément vers $s_1$ sur $R$, donc étant donné $e>0$, il existe $N_2$ tel que $\forall n, n \ge N_2 \Rightarrow \|u_n(s_1)-s_1\|_\infty \le \dfrac{e}{3}$,
notons $N = \max(N_0, N_1, N_2)$ ,on a

$$\forall n, n \ge N \Rightarrow \|g_n\|_\infty \le \|u_n(c_0)-c_0\|_\infty + \|u_n(c_1)-c_1\|_\infty + \|u_n(s_1)-s_1\|_\infty \le \frac{e}{3}+\frac{e}{3}+\frac{e}{3} = e$$

On a finalement montré que $\forall e, \exists N, \forall n, n \ge N \Rightarrow \|g_n\|_\infty \le e$ , ce qui prouve que la suite $(g_n)_{n\in N}$ converge uniformément vers $0$ sur $R$.

**III.5.2** Soit $u$ un opérateur linéaire positif sur $F$ et $f \in F$, étant donné $e>0$, on a montré précédemment qu'il existe $h \in ]0,p[$ tel que :

$$\forall x \in R \left| u(f - f(x)c_0) \right| \le e u(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{y_0(h)}\left(u(c_0) - u(c_1)\cos x - u(s_1)\sin x\right)$$ et $h$ ne dépend que de $f$ et de $e$, on en déduit que

$$\forall n \in N, \forall x \in R \left| u_n(f - f(x)c_0) \right| \le e u_n(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{y_0(h)}\left(u_n(c_0) - u_n(c_1)\cos x - u_n(s_1)\sin x\right)$$

et donc $\forall n \in N, \|h_n\|_\infty = \|u_n(f - f(x)c_0)\|_\infty \le e\|u_n(c_0)\|_\infty + \dfrac{\|f\|_\infty}{y_0(h)}\|g_n\|_\infty$ , si $f \in F - \{0\}$
la suite $(u_n(c_0))_{n\in N}$ converge uniformément vers $c_0$ sur $R$, donc étant donné $e=1$, il existe $N_1$ tel que $\forall n, n \ge N_1 \Rightarrow \|u_n(c_0)-c_0\|_\infty \le 1$ , c'est à dire $\forall n, n \ge N_1 \Rightarrow \|u_n(c_0)\|_\infty \le 2$ . On va donc prendre $\dfrac{e}{4} > 0$, alors qu'il existe $h' \in ]0,p[$ tel que :

$$\forall n \in N, \|u_n(f - f(x)c_0)\|_\infty \le \frac{e}{4}\|u_n(c_0)\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{y_0(h')}\|g_n\|_\infty$$ et la suite $(g_n)_{n\in N}$ converge uniformément vers $0$ sur $R$, donc étant donné $\dfrac{e y_0(h')}{2\|f\|_\infty}$ , il existe $N_2$ tel que

$\forall n, n \ge N_2 \Rightarrow \|g_n\|_\infty \le \dfrac{e y_0(h')}{2\|f\|_\infty}$ . Etant donné $e>0$, il existe $N = \max(N_1, N_2)$ tel que

$$\forall n, n \ge N, \|h_n\|_\infty = \|u_n(f - f(x)c_0)\|_\infty \le \frac{e}{4}2 + \frac{\|f\|_\infty}{y_0(h')}\frac{e y_0(h')}{2\|f\|_\infty} = e$$ , ce qui prouve que la suite $(h_n)_{n\in N}$ converge uniformément vers $0$ sur $R$.

**III.5.3** Pour tout entier $n$
et $\forall x \in R, h_n(x) = u_n(f - f(x)c_0)(x) = u_n(f)(x) - f(x)u_n(c_0)(x)$ , soit encore
$\forall x \in R, h_n(x) + f(x)u_n(c_0)(x) - f(x) = u_n(f)(x) - f(x)$ soit encore
$h_n + f(c_0 - u_n(c_0)) = u_n(f) - f$ et donc
$\|u_n(f) - f\|_\infty \le \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|c_0 - u_n(c_0)\|_\infty$ . Soit $e>0$, la suite $(h_n)_{n\in N}$ converge uniformément vers $0$ sur $R$, $\exists N_1, \forall n, n \ge N_1 \Rightarrow \|h_n\|_\infty \le \dfrac{e}{2}$ , de même la suite $\left(\|c_0 - u_n(c_0)\|_\infty\right)_{n\in N}$ converge

uniformément vers $0$ sur $R$, $\exists N_2, \forall n, n \geq N_2 \Rightarrow \|c_0 - u_n(c_0)\|_\infty \leq \dfrac{e}{2\|f\|_\infty}$ ,.en notant

$N = \max(N_1, N_2)$, $\forall n, n \geq N$, $\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \dfrac{e}{2} + \|f\|_\infty \dfrac{e}{2\|f\|_\infty} = e$ , ce qui prouve que

la suite $(u_n(f))_{n\in N}$ converge uniformément vers $f$ sur $R$.

Si $f = 0$, on a : $\forall n, \|u_n(0) - 0\|_\infty = 0$, il y a donc convergence uniforme de la suite $(u_n(0))_{n\in N}$ vers la fonction nulle sur $R$.

**III.6** On a vu en 1.7.3 que $u(f)(x) = \int_{-p}^{p} f(t)K(x-t)\,dt$ est un opérateur linéaire positif sur $F$ si et seulement si $K(x-t)$ est un polynôme trigonométrique à valeurs positives ; or, on a montré en 1.8.5 que

$$K(x-t) = \frac{\sin^2 \frac{n(x-t)}{2}}{2np \sin^2 \frac{(x-t)}{2}}$$ est un polynôme trigonométrique à valeurs positives,

$$T_n(f)(x) = \int_{-p}^{p} f(t) \frac{\sin^2 \frac{n(x-t)}{2}}{2np \sin^2 \frac{(x-t)}{2}} dt$$ est donc un opérateur linéaire positif sur $F$. Pour montrer

que la suite $(T_n(f))_{n\in N}$ converge uniformément vers $f$ sur $R$, il suffit de montrer d'après III.5 que les suites $(T_n(c_0))_{n\in N}$, $(T_n(c_1))_{n\in N}$, $(T_n(s_1))_{n\in N}$ convergent uniformément respectivement vers $c_0$, $c_1$, $s_1$ sur $R$. En 1.8.7, on a montré que $\forall n\in N^*, T_n(c_0) = c_0$, $T_n(c_1) = \dfrac{n-1}{n} c_1$ et $T_n(s_1) = \dfrac{n-1}{n} s_1$.

Puisque $\forall n\in N^*, \|T_n(c_0) - c_0\|_\infty = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n(c_0) - c_0\|_\infty = 0$, d'autre part

$\forall n\in N^*, \|T_n(c_1) - c_1\|_\infty = \dfrac{\|c_1\|_\infty}{n} = \dfrac{1}{n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n(c_1) - c_1\|_\infty = 0$, enfin

$\forall n\in N^*, \|T_n(s_1) - s_1\|_\infty = \dfrac{\|s_1\|_\infty}{n} = \dfrac{1}{n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n(s_1) - s_1\|_\infty = 0$, cela prouve que les suites $(T_n(c_0))_{n\in N}$, $(T_n(c_1))_{n\in N}$, $(T_n(s_1))_{n\in N}$ convergent uniformément respectivement vers $c_0$, $c_1$, $s_1$ sur $R$ et d'après III.5, on peut affirmer que pour tout $f \in F$, la suite $(T_n(f))_{n\in N}$ converge uniformément vers $f$ sur $R$.