Première épreuve CAPES externe 1988

François Sauvageot

2 mars 2001

Partie I

Question I.1.a La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, la formule de la moyenne donne, pour tout entier naturel non nul p :

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p}$$

et, par conséquent, pour tout tel entier

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \ .$$

Il en résulte que la série Σu_p est une série à termes positifs et donc la suite de ses sommes partielles, $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante.

Soit maintenant n un entier naturel non nul, en sommant les inégalités précédentes pour p entier variant entre 1 et n, on obtient

$$0 \leq \gamma_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}$$

et donc $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite croissante, majorée par 1. Elle est donc convergente.

Le théorème d'encadrement des limites permet d'affirmer, au vu de l'inégalité que l'on vient d'obtenir, que γ est compris entre 0 et 1.

Question I.1.b Soit p un entier naturel non nul, par définition de u_p, on a

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$$

et donc, en effectuant le changement de variable (affine) $t = u + p$,

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{du}{u+p} \ .$$

Il en résulte

$$u_p = \frac{1}{p} \left(\int_0^1 \left(1 - \frac{p}{u+p} \right) du \right)$$

soit encore

$$u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+u} du \ .$$

La fonction identité étant positive, il résulte de la première formule de la moyenne

$$\frac{1}{p+1} \int_0^1 u \, du \leq \int_0^1 \frac{u}{p+u} du \leq \frac{1}{p} \int_0^1 u \, du$$

et donc

$$\frac{1}{2p(p+1)} \leq u_p \leq \frac{1}{2p^2} .$$

Par conséquent, si p est supérieur à 2, on a aussi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2p(p+1)} \leq u_p \leq \frac{1}{2p^2} \leq \frac{1}{2p(p-1)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) ,$$

ce qui est l'encadrement recherché.

Soit maintenant n un entier naturel non nul et N un autre entier strictement supérieur à n. Par sommation des inégalités précédentes, on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}\right) \leq \sum_{p=n+1}^{N} u_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) .$$

Chacune des quantités précédentes ayant une limite lorsque N tend vers l'infini, le théorème d'encadrement des limites assure

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n} .$$

Question I.1.c Soit ε un réel strictement positif. Par définition, pour tout entier naturel non nul n, on a $\gamma - \gamma_n = r_n$. Par conséquent γ_n approche γ à ε près si et seulement si $|r_n| \leq \varepsilon$ et comme, d'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \frac{1}{2n} \leq \varepsilon \Rightarrow |r_n| \leq \varepsilon$$

il en résulte que l'on est sûr d'approcher γ par γ_n avec une précision ε pour n supérieur à $1/2\varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = 10^{-2}$, $n = 50$ convient et, pour $\varepsilon = 10^{-8}$, $n = 50000000$ convient.

Question I.1.d Soit n un entier naturel non nul, on a

$$\gamma - \gamma_{n,1} = \gamma - \gamma_n - \frac{1}{2(n+1)} = r_n - \frac{1}{2(n+1)}$$

et donc l'encadrement obtenu en I.1.b permet d'affirmer

$$0 \leq \gamma - \gamma_{n,1} \leq \frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^2} .$$

Question I.1.e D'après ce qui précède pour tout réel strictement positif ε et tout entier naturel non nul

$$\frac{1}{2n^2} \leq \varepsilon \Rightarrow |\gamma - \gamma_{n,1}| \leq \varepsilon$$

et on est donc sûr d'approcher γ par $\gamma_{1,n}$ avec une précision ε pour n supérieur à $1/\sqrt{2\varepsilon}$. En particulier, pour $\varepsilon = 10^{-2}$, $n = 8$ convient et, pour $\varepsilon = 10^{-8}$, $n = 7072$ convient.

Pour calculer $\gamma_{8,1}$ remarquons que, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$\gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1) .$$

Il en résulte

$$\gamma_{8,1} = \gamma_8 + \frac{1}{18} = \frac{761}{280} - 2\ln(3) + \frac{1}{18} = \frac{6989}{2520} - 2\ln(3)$$

et donc, d'après la calculatrice, $0.576 \leq \gamma_{8,1} \leq 0.577$.

Il en résulte

$$0.57 \le \gamma_{8,1} \le \gamma \le \gamma_{8,1} + 10^{-2} \le 0.587 \le 0.59$$

et donc 0.58 est une valeur de γ approchée à 10^{-2}.

Question I.2.a En tant que quotient partout défini de fonctions continues sur $\mathbf{R}^*$, f est continue sur $\mathbf{R}^*$. De plus, pour tout t non nul,

$$f(t) = \frac{exp(-t) - exp(0)}{-t - 0}$$

est le taux d'accroissement entre $-t$ et 0 de la fonction exponentielle. Par dérivabilité de cette dernière, il en résulte

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} f(t) = exp'(0) = 1 = f(0) \; .$$

Par conséquent f est continue en 0 et donc, au final, sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Question I.2.b Pour tout réel x, on a

$$S(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \int_0^x f(t) dt \; .$$

Comme f est une fonction continue, elle est intégrable sur tout intervalle compact de $\mathbf{R}$ et donc S est bien définie et est une primitive de f. C'est en fait la primitive de f s'annulant en 0. Il en résulte que S est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée f et, par conséquent, S est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

Soit maintenant x un réel strictement positif et g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par la formule $g(t) = e^{-t}/t$. Celle-ci est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc localement intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus, au voisinage de $+\infty$, on a $g(t) = o(1/t^2)$ et donc g est aussi localement intégrable au voisinage de $+\infty$. Il en résulte que R est une intégrale convergente.

Soit de plus G une primitive de la fonction continue g sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout réel strictement positif y, on a, d'après le théorème fondamental du calcul intégral

$$\int_x^y g(t) dt = G(y) - G(x)$$

et donc, d'après ce qui précède G admet une limite en $+\infty$ et on a

$$R(x) = \left(\lim_{y \to +\infty} G(y) \right) - G(x) \; .$$

Il en résulte que R est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée $-g$ et est donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$.

Question I.2.c Soit v un réel non nul, n un entier naturel non nul ; la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $1 - v$ et de terme initial 1 est donnée par la formule

$$1 + (1 - v) + \ldots + (1 - v)^{n-1} = \frac{1 - (1 - v)^n}{1 - (1 - v)} = \frac{1 - (1 - v)^n}{v} \; .$$

Il résulte de cette formule que la fonction de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ $v \mapsto \frac{1-(1-v)^n}{v}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur n. On peut donc considérer son intégrale sur le segment $[0; 1]$ et on a, par linéarité de l'intégrale et par le changement de variable affine $u = 1 - v$,

$$\int_0^1 \frac{1 - (1 - v)^n}{v} dv = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1 - v)^k dv = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 u^k du = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k + 1}$$

soit

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (1 - v)^n}{v} dv \; .$$

Question I.2.d Soit n un entier naturel non nul ; faisons le changement de variable $v = t/n$ dans l'intégrale précédente. On obtient

$$\int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}dv = \int_0^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt$$

et donc

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n) &= \int_0^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt - \int_1^n \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + \int_1^n \left(\frac{1-e_n(t)}{t}-\frac{1}{t}\right)dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \end{aligned}$$

Question I.2.e La fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbf{R}$, sa courbe est au-dessus de ses tangentes. En particulier celle en l'origine, d'équation $y = 1+x$ puisque $exp(0) = exp'(0) = 1$. Par conséquent, pour tout réel v,

$$e^v \geq 1+v\ .$$

Question I.2.f Soit n un entier naturel non nul et t un réel compris entre 0 et n. En appliquant ce qui précède on a

$$0 \leq 1-\frac{t}{n} \leq e^{-t/n} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq 1+\frac{t}{n} \leq e^{t/n}$$

et donc, par croissance de l'élévation à la puissance n-ième sur $\mathbf{R}_+$,

$$0 \leq e_n(t) \leq e^{-t} \qquad \text{et} \qquad \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t\ .$$

Il en résulte, par positivité de $e_n(t)e^{-t}$,

$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e_n(t)e^{-t} \leq e_n(t)$$

et donc

$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq e_n(t) \leq e^{-t}\ .$$

Ce dernier encadrement peut se récrire

$$0 \leq e^{-t}-e_n(t) \leq \left(1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)e^{-t}\ .$$

Or la fonction d'élévation à la puissance n-ième est convexe sur $\mathbf{R}_+$ et sa courbe est donc au-dessus de sa tangente en 1. Il en résulte que, pour tout réel x strictement positif

$$x^n \geq 1+n(x-1)$$

puisque les valeur et dérivée en 1 de cette fonction sont respectivement 1 et n. En appliquant cette remarque à $x = 1-t^2/n^2$, on obtient

$$1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq n\frac{t^2}{n^2} = \frac{t^2}{n}$$

et, par conséquent,

$$0 \leq e^{-t}-e_n(t) \leq \frac{t^2}{n}e^{-t}\ .$$

Question I.2.g Soit n un entier naturel non nul, on a

$$\gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1) \ .$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
\gamma_n - S(1) + R(1) &= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - S(1) + R(1) \\
&= \int_0^1 \frac{e^{-t}-e_n(t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)-e^{-t}}{t}dt - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \\
&= \int_0^n \frac{e^{-t}-e_n(t)}{t}dt - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt
\end{aligned}$$

Or, par intégration de l'inégalité précédente,

$$0 \leq \int_0^n \frac{e^{-t}-e_n(t)}{t}dt \leq \frac{1}{n}\int_0^n te^{-t} \leq \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \frac{1}{n}$$

et donc

$$\int_0^n \frac{e^{-t}-e_n(t)}{t}dt$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il en est de même de la quantité $\ln(1+1/n)$ par continuité du logarithme et aussi de

$$\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$$

puisque c'est le reste d'une intégrale convergente.

Il en résulte que $\gamma_n - S(1) + R(1)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et donc

$$\gamma = S(1) - R(1) \ .$$

Question I.3.a Soit x un nombre réel strictement positif et g_x la fonction de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g_x(t) = e^{-t}t^{x-1}$. Cette fonction est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et y est donc localement intégrable. En 0 on a $g_x(t) \sim t^{x-1}$ et donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives et le critère de Riemann, g_x est localement intégrable en 0. Enfin, en $+\infty$, on a $g_x(t) = o(1/t^2)$ et donc g_x est localement (absolument) intégrable en $+\infty$. Par conséquent $\Gamma(x)$ est une intégrale convergente.

Question I.3.b Soit g_n la fonction de $[1/n; n] \times \mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ qui au couple (t,x) associe $e^{-t}t^{x-1}$. C'est une fonction dérivable par rapport à la seconde variable, de dérivée donnée par la formule

$$\frac{\partial g_n}{\partial x}(t,x) = e^{-t}t^{x-1}\ln(t)$$

et donc g_n et $\partial g_n/\partial x$ sont des fonctions continues par rapport aux deux variables t et x. Ceci assure l'existence de Γ_n et le fait qu'elle soit de classe C^1. De plus on a la formule

$$\Gamma_n'(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\partial g_n}{\partial x}(t,x)dt \ .$$

Question I.3.c Soit t un réel strictement positif, la fonction qui à x associe t^{x-1} est décroissante, constante ou croissante selon que t est inférieur, égal ou supérieur à 1.

Soit donc $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbf{R}_+^*$, x un de ses points et n un entier naturel non nul. Il résulte de la remarque précédente

$$|\Gamma(x)-\Gamma_n(x)| = \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{x-1}dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{a-1}dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}dt \ .$$

Puisque $\Gamma(a)$ et $\Gamma(b)$ sont des intégrales convergentes, la quantité précédente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et donc il en est de même de

$$\sup_{x\in[a,b]} |\Gamma(x)-\Gamma_n(x)|$$

i.e. la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers Γ sur tout intervalle compact de $\mathbf{R}_+^*$.

Question I.3.d Soit x un nombre réel strictement positif et h_x la fonction de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ définie par $h_x(t) = e^{-t}t^{x-1}\ln(t)$. Cette fonction est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et y est donc localement intégrable. En 0 on a $h_x(t) \sim t^{x-1}\ln(t)$ et donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions négatives et le critère de Bertrand, h_x est localement intégrable en 0. Enfin, en $+\infty$, on a $h_x(t) = o(1/t^2)$ et donc h_x est localement intégrable en $+\infty$. Par conséquent $F(x)$ est une intégrale convergente.

On va montrer que la suite de fonctions $(\Gamma'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers F sur tout intervalle compact de $\mathbf{R}_+^*$.

Soit donc $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbf{R}_+^*$, x un de ses points et n un entier naturel non nul. Il résulte de la remarque faite en I.3.c

$$|F(x)-\Gamma'_n(x)| = \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{x-1}|\ln(t)|dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln(t)dt \leq -\int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{a-1}\ln(t)dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}\ln(t)dt \ .$$

Puisque $F(a)$ et $F(b)$ sont des intégrales convergentes, la quantité précédente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et donc il en est de même de

$$\sup_{x\in[a,b]} |F(x)-\Gamma'_n(x)| \ .$$

Par conséquent sur tout intervalle compact I de $\mathbf{R}_+^*$, la suite de fonctions de classe C^1 sur I $(\Gamma_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est simplement convergente en au moins en point de I (d'après I.3.c) et la suite de ses dérivées converge uniformément sur I vers F. Il en résulte qu'elle converge (simplement) vers une fonction de classe C^1 sur I dont la dérivée est F. Par conséquent, d'après I.3.c, Γ est de classe C^1 sur I et sa dérivée y est égale à F.

La continuité et la dérivabilité étant des phénomènes locaux, il en résulte que Γ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée F.

En particulier

$$\Gamma'(1) = F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt \ .$$

Question I.3.e D'après ce qui précède et par intégration par parties

$$\begin{aligned}
\Gamma'(1) &= \lim_{n\to+\infty} \Gamma'_n(1) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t}\ln(t)dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{-t}\ln(t)dt + \int_1^n e^{-t}\ln(t)dt\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(-(1-e^{-1/n})\ln\left(\frac{1}{n}\right) - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1-e^{-t}}{t}dt - e^{-n}\ln(n) + \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt\right) \\
&= 0 - S(1) - 0 + R(1) \\
\Gamma'(1) &= -\gamma
\end{aligned}$$

d'après I.2.g.

Partie II

Question II.1.a Soit n un entier naturel non nul, la somme partielle au rang n de la série $\sum \alpha_p$ est donnée par

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_p = f(1) - f(n+1)$$

et donc, puisque f appartient à E, cette quantité admet $f(1)$ comme limite lorsque n tend vers l'infini. Il en résulte que la série $\sum \alpha_p$ converge et est de somme $f(1)$.

De plus le calcul précédent montre que le reste est donné par la formule

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \alpha_p = \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha_p - \sum_{p=1}^{n} \alpha_p = f(1) - (f(1) - f(n+1)) = f(n+1)\ .$$

Cette formule est encore valable lorque l'on remplace n par 0 et donc, pour tout entier naturel n, le reste à l'ordre n de la série $\sum \alpha_p$ est égal à $f(n+1)$.

Question II.1.b Soit k un entier naturel non nul. Remarquons tout d'abord d'une part que ϕ_{k-1} appartient à E et par conséquent que $\Delta\phi_{k-1}$ a un sens et, d'autre part, que l'expression générale de ϕ_n coïncide pour $n=0$ avec l'expression donnée pour ϕ_0. Par conséquent il n'y a pas lieu de distinguer entre le cas $k=1$ et le cas $k>1$.

Soit t dans $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$\Delta\phi_{k-1}(t) = \frac{1}{t\dots(t+k-1)} - \frac{1}{(t+1)\dots(t+k)} = \frac{t+k-t}{t\dots(t+k)} = k\phi_k(t)$$

et donc $\Delta\phi_{k-1}$ est égal à $k\phi_k$.

La série de terme général $\phi_k(p)$ est donc convergente si et seulement si celle de terme général $\Delta\phi_{k-1}$ l'est. Comme ϕ_{k-1} est un élément de E, cette dernière résulte de la question précédente. Donc $\sum \phi_k(p)$ est convergente et pour tout entier naturel n on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \phi_k(p) = \frac{1}{k} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \Delta\phi_{k-1}(p) = \frac{1}{k}\phi_{k-1}(n+1) = \frac{1}{k}\frac{n!}{(n+k)!}\ .$$

Question II.2.a Soit p un entier naturel non nul et u un réel positif, on a

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1}\frac{1-u}{p+u} = \frac{1}{p+1}\frac{p+u+1-u}{p+u} = \frac{1}{p+u}$$

et donc, en tenant compte de l'expression de u_p obtenue en I.1.b, on a

$$u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \left(\frac{u}{p+1} + \frac{1}{p+1}\frac{u(1-u)}{p+u}\right) du = \frac{1}{2p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 \frac{N_2(u)}{p+u} du\ .$$

Question II.2.b La série de terme général u_p est convergente et celle de terme général $1/p(p+1)$ l'est aussi puisque c'est la série de terme général $\phi_1(p)$. Il en résulte que la série de terme général

$$\frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 \frac{N_2(u)}{p+u} du$$

est aussi convergente, en tant que différence de deux séries convergentes.

Si maintenant n est un entier naturel non nul, on a

$$r_n = \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{+\infty} \phi_1(p) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 \frac{N_2(u)}{p+u} du\ .$$

Or
$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \phi_1(p) = \frac{1}{1}\phi_0(n+1)$$
et donc
$$r_n = \frac{1}{2(n+1)} + r_{n,1}$$
où
$$r_{n,1} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p(p+1)} \int_0^1 \frac{N_2(u)}{p+u} du \; .$$

Or, pour tout entier naturel non nul p, on a d'après la formule de la moyenne et par positivité de N_2 sur $[0;1]$,
$$\frac{1}{p+1}\int_0^1 N_2(u)du \le \int_0^1 \frac{N_2(u)}{p+u}du \le \frac{1}{p}\int_0^1 N_2(u)du$$
soit
$$\frac{1}{6(p+1)} \le \int_0^1 \frac{N_2(u)}{p+u}du \le \frac{1}{6p} \; .$$
A fortiori, si p est supérieur à 2,
$$0 \le \frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 \frac{N_2(u)}{p+u}du \le \frac{1}{6(p-1)p(p+1)} = \frac{1}{6}\phi_2(p-1)$$
et donc, par sommation de ces inégalités en tenant compte de la convergence de la série de terme général $\phi_2(p)$ et de l'expression de son reste
$$0 \le r_{n,1} \le \frac{1}{6}\frac{1}{2}\phi_1(n) = \frac{1}{12n(n+1)} \; .$$

Question II.3.a Soit k et p deux entiers naturels non nuls et u un réel positif. On a
$$\frac{1}{p+k} + \frac{1}{p+k}\frac{k-u}{p+u} = \frac{1}{p+k}\frac{p+u+k-u}{p+u} = \frac{1}{p+u}$$
et donc
$$\int_0^1 \frac{N_k(u)}{p+u}du = \frac{1}{p+k}\lambda_k + \frac{1}{p+k}\int_0^1 \frac{N_{k+1}(u)}{p+u}du \; .$$

p restant fixé, établissons maintenant la propriété suivante par récurrence sur l'entier naturel non nul k :
$$(P_k) \qquad u_p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i(p) + \phi_k(p)\int_0^1 \frac{N_{k+1}(u)}{p+u}du \; .$$

La véracité de P_1 est le résultat de la question 2.a. De plus, pour tout entier naturel non nul k, le calcul précédent entraîne
$$\phi_k(p)\int_0^1 \frac{N_{k+1}(u)}{p+u}du = \phi_k(p)\frac{1}{p+k+1}\lambda_{k+1} + \phi_k(p)\frac{1}{p+k+1}\int_0^1 \frac{N_{k+2}(u)}{p+u}du$$
soit
$$\phi_k(p)\int_0^1 \frac{N_{k+1}(u)}{p+u}du = \lambda_{k+1}\phi_{k+1}(p) + \phi_{k+1}(p)\int_0^1 \frac{N_{k+2}(u)}{p+u}du$$
et il en résulte que la propriété P_k est héréditaire.

Par conséquent, d'après le principe de récurrence, pour tous entiers naturels non nul p et k, on a

$$u_p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i(p) + \rho_{p,k} \ .$$

Question II.3.b Les séries de termes généraux u_p et $\phi_i(p)$ pour i supérieur à 1 étant toutes convergentes, il résulte de la question précédente que, pour tout entier naturel non nul k la série de terme général $\rho_{p,k}$ est convergente.

De plus, pour tous entiers naturels non nuls k et n, on a

$$r_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{1}{i} \phi_{i-1}(n+1) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \rho_{p,k}$$

soit

$$r_n = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{i(n+1)\dots(n+i)} + r_{n,k}$$

en notant

$$r_{n,k} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \rho_{p,k} \ .$$

De plus, par positivité de N_{k+1} sur $[0;1]$ et par la formule de la moyenne on a, pour tout entier naturel non nul p

$$\frac{\phi_k(p)}{p+1} \lambda_{k+1} \leq \rho_{p,k} \leq \frac{\phi_k(p)}{p} \lambda_{k+1}$$

et donc, a fortiori, si p est au moins égal à 2,

$$0 \leq \rho_{p,k} \leq \lambda_{k+1} \phi_{k+1}(p-1) \ .$$

Il en résulte, puisque la série de terme général $\phi_{k+1}(p-1)$ est convergente,

$$0 \leq r_{n,1} \leq \lambda_{k+1} \frac{1}{k+1} \phi_k(n) = \frac{\lambda_{k+1}}{(k+1)n\dots(n+k)} \ .$$

Question II.3.c Posons, pour tous entiers naturels non nuls n et k

$$\gamma_{n,k} = \gamma_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{i(n+1)\dots(n+i)} \ .$$

On a alors, dans les mêmes conditions,

$$\gamma - \gamma_{n,k} = r_n - \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{i(n+1)\dots(n+i)} = r_{n,k}$$

et a fortiori

$$0 \leq \gamma - \gamma_{n,k} \leq r_{n,k}$$

par positivité de $r_{n,k}$.

Question II.4.a Pour tout u dans l'intervalle $[0;1]$ et pour tout entier naturel non nul n, on a

$$(n-1)! = 1.2\dots(n-1) \leq (2-u)\dots(n-u) \leq 2.3\dots n = n!$$

et donc, par intégration

$$(n-1)!\lambda_2 \leq \lambda_{n+1} \leq n!\lambda_2 \; .$$

De plus

$$\lambda_2 = \int_0^1 u(1-u)du = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

et donc

$$\frac{(n-1)!}{6} \leq \lambda_{n+1} \leq \frac{n!}{6} \; .$$

Pour tout entier naturel n au moins égal à 2, on a

$$\frac{1}{6n(n-1)} \leq \left|(-1)^{n-1}\frac{\lambda_n}{n!}\right| \leq \frac{1}{6n} \; .$$

Or les séries entières $\sum x^n/6n$ et $\sum x^n/6n(n-1)$ ont toutes les deux un rayons de convergence égal à 1 d'après le critère de d'Alembert et il en est donc de même pour la série

$$1 + \lambda_1 x + \sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1}\frac{\lambda_n x^n}{n!} \; .$$

Question II.4.b Soit u un réel strictement positif. Le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^u$ est donné, pour x de valeur absolue strictement inférieure à 1, par la formule

$$(1+x)^u = 1 + ux + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-n)}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{N_n(u)}{n!}x^n \; .$$

Remarquons que la formule précédente est encore vraie pour u nul si l'on prolonge, à x fixé, la fonction h, définie sur $[0;1]$ par $u \mapsto (1+x)^u$ par continuité en 0 (i.e. par la valeur 1).

Pour pouvoir, à x fixé, intégrer terme à terme cette égalité entre 0 et 1, il suffit donc de démontrer que la série de fonctions

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} N_n$$

converge uniformément vers h sur $[0;1]$. Comme elle converge déjà simplement vers h, il suffit de prouver qu'il y a en fait convergence uniforme.

Or on a, pour entier naturel non nul n,

$$\sup_{0\leq u\leq 1}\left|\frac{(-x)^n}{n!}N_n(u)\right| \leq \frac{x^n}{n}$$

et donc la série de fonctions considérée converge normalement et, a fortiori, uniformément sur $[0;1]$.

Il en résulte, par intégration terme à terme entre 0 et 1,

$$G(x) = \int_0^1 (1+x)^u du = \frac{1+x}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{x}{\ln(1+x)} \; .$$

Question II.4.c D'après la question précédente on a, pour tout x dans $]-1;1[$,

$$\ln(1+x)G(x) = x$$

et donc, en écrivant le produit de Cauchy des développements en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de G, on obtient le système triangulaire recherché :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i} \; . \; \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^{j-1}\frac{\lambda_j x^j}{j!}\right) = x$$

soit

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\lambda_j}{j!}(-1)^{n+1-j}\frac{1}{n+1-j}+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)}=0$$

ou encore

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{(n+1-j)j!}=\frac{1}{(n+1)}\ .$$

Question II.5.a On calcule directement (mais on pourrait bien sûr utiliser le système précédent)

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \int_0^1 u du = \frac{1}{2}\\
\lambda_2 &= \int_0^1 (u-u^2)du = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\\
\lambda_3 &= \int_0^1 (2u-3u^2+u^3)du = 1-1+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\\
\lambda_4 &= \int_0^1 (8u-14u^2+7u^3-u^4)du = 4-\frac{14}{3}+\frac{7}{4}-\frac{1}{5}=\frac{19}{30}\ .
\end{aligned}$$

De plus, d'après 4.a, on a

$$\lambda_5 \leq \frac{4!}{6}=4\ .$$

Question II.5.b Soit n un entier naturel non nul. D'après la question 3.b, on a

$$r_{n,4}\leq \frac{4}{5n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

et donc

$$r_{39,4}\leq \frac{1}{144389700}\simeq 6.93\ 10^{-9}\ .$$

Par conséquent pour $n=39$, on a $r_{n,4}\leq 7.10^{-9}$.

Question II.5.c On a

$$\gamma_{39,4}=\sum_{p=1}^{39}\frac{1}{p}+\frac{1}{2.40}+\frac{1}{12.40.41}+\frac{1}{12.40.41.42}+\frac{19}{120.40.41.42.43}-\ln(40)$$

et donc

$$\gamma_{39,4}=\frac{14612676011563611773}{3425304785019062400}-\ln(40)\simeq 0.5777215661122\ .$$

Comme la calculatrice calcule avec une précision 10^{-12} (Ti 89), le résultat est en fait obtenu, compte tenu des erreurs d'arrondi à chaque opération, avec la précision 3.10^{-12}, ce qui assure bien la précision demandée de 2.10^{-9}.

Partie III

Question III.1 Soit x un nombre réel strictement positif, on a

$$S(x)-R(x)-\ln(x)=S(1)+\int_1^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt-R(1)+\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}dt-\ln(x)=S(1)-R(1)+\int_1^x\frac{dt}{t}-\ln(x)=S(1)-R(1)$$

et donc, d'après la relation (7),

$$\gamma = S(x) - R(x) - \ln(x)\ .$$

Question III.2.a Soit x un réel strictement positif. Notons que, pour tout entier naturel non nul k, $R_k(x)$ est définie par une intégrale convergente puisque la fonction intégrée est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ (donc localement intégrable sur le même domaine) et est dominée par $t \mapsto t^{-2}$ en $+\infty$.

Montrons par récurrence sur l'entier naturel non nul k la propriété (P_k) suivante :

$$(P_k) \qquad R(x) = e^{-x} \sum_{0 \le j \le k-2} \frac{(-1)^j j!}{x^{j+1}} + R_k(x)\ .$$

Cette propriété est vraie pour $k = 1$ par convention. De plus, pour tout entier naturel non nul k et tout réel strictement positif y, on a, par intégration par parties

$$\int_x^y \frac{e^{-t}}{t^k} dt = \frac{e^{-x}}{x^k} - \frac{e^{-y}}{y^k} - k \int_x^y \frac{e^{-t}}{t^{k+1}} dt$$

et donc, en prenant la limite lorsque y tend vers l'infini

$$R_k(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{e^{-x}}{x^k} + R_{k+1}(x)$$

et il en résulte que la propriété (P_k) est bien héréditaire. Par le principe de récurrence elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul k.

Question III.2.b Soit k un entier naturel non nul et x un réel strictement positif. D'après la formule de la moyenne, par positivité de l'exponentielle, on a

$$0 \le \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^k} dt \le \frac{1}{x^k} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^k}$$

et donc

$$|R_k(x)| \le (k-1)! \frac{e^{-x}}{x^k}\ .$$

D'après la formule établie dans la démonstration de la question précédente, on a

$$\frac{x^k R_k(x)}{(k-1)! e^{-x}} = (-1)^{k-1} + \frac{x^k R_{k+1}(x)}{(k-1)! e^{-x}}$$

et donc, si x est supérieur à k, en utilisant la majoration précédente pour $R_{k+1}(x)$,

$$1 - \frac{k}{x} \le \frac{x^k |R_k(x)|}{(k-1)! e^{-x}} \le 1 + \frac{k}{x}\ .$$

Par conséquent, par le théorème d'encadrement des limites,

$$|R_k(x)| \sim_{x \to +\infty} (k-1)! \frac{e^{-x}}{x^k}\ .$$

Question III.2.c Soit k un entier naturel non nul et x un réel strictement positif. On a

$$|R_k(x)| = (k-1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^k} dt \ge (k-1)! \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t^k} dt$$

et donc, par la formule de la moyenne,

$$|R_k(x)| \ge (k-1)! x \frac{e^{-2x}}{(2x)^k}$$

et donc, par comparaison,

$$\lim_{k\to+\infty} |R_k(x)| = +\infty \ .$$

Soit toujours k un entier naturel non nul. Notons (P_k) la propriété

$$(P_k) \qquad \ln(k!) \leq (k+1)\ln(k) - k + 1 \ .$$

Pour $k=1$, elle s'écrit $0 = \ln(1!) \leq (k+1)\ln(1) - 1 + 1 = 0$ et est donc vraie.

De plus, si k est un entier naturel non nul quelconque, on a

$$\begin{aligned}((k+2)\ln(k+1)-k) - ((k+1)\ln(k)-k+1) &= \ln(k+1) + (k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - 1 \\ &= \ln(k+1) - (k+1)\left(\frac{1}{k+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\right) \ .\end{aligned}$$

Or, par concavité du logarithme, pour x réel inférieur à 1, on a $\ln(1-x) \leq -x$ (c'est aussi une autre forme de l'inégalité de I.2.e pour $v = -x$). Il en résulte

$$((k+2)\ln(k+1)-k) - ((k+1)\ln(k)-k+1) \geq \ln(k+1) = \ln((k+1)!) - \ln(k!)$$

et donc la propriété (P_k) est héréditaire. Par le principe de récurrence elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul k et il en résulte

$$k! \leq k^{k+1}e^{1-k} \ .$$

Remarquons que cette propriété est encore vraie pour k nul. Soit k un entier naturel non nul, on en déduit

$$|R_k(k)| \leq (k-1)!\frac{e^{-k}}{k^k} \leq \left(\frac{k-1}{k}\right)^k e^{2-2k} \ .$$

Or

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^k = e_k(1) \leq e^{-1}$$

d'après I.1.d et donc

$$|R_k(k)| \leq e^{1-2k} = e^{-(2k-1)} \ .$$

Question III.3.a La fonction f introduite en I.2. est en fait développable en série entière sur $\mathbf{R}$ puisque l'exponentielle l'est et que le développement de $1-e^{-t}$ n'a pas de terme constant. On a donc

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f(t) = \frac{1 - \sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k/k!}{t} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{t^{k-1}}{k!} \ .$$

Comme le rayon de convergence de cette série entière est infini, la série de fonctions qu'elle définit est normalement convergente (et a fortiori uniformément convergente) sur tout compact de $\mathbf{R}$. En particulier ce développement est intégrable terme à terme sur tout compact et donc, pour tout réel x, on a

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k.k!} \ .$$

Question III.3.b Si x est un réel supérieur à 1, la suite $(a_p(x))_{p\in\mathbf{N}^*}$ est strictement positive et on a, pour tout entier naturel p,

$$\frac{a_{p+1}(x)}{a_p(x)} = \frac{px}{(p+1)^2}$$

et, par conséquent, si $p+1$ est supérieur ou égal à x, on a

$$\frac{a_{p+1}(x)}{a_p(x)} \leq \frac{p}{p+1} < 1$$

et la suite $(a_p(x))_{p\in\mathbf{N}^*}$ est donc décroissante à partir du rang $[x]$.

Question III.3.c Soit x un réel supérieur à 1 et n un entier supérieur à $[x]$, on a

$$S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k.k!} \;.$$

C'est donc la somme d'une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue. D'après le théorème sur le reste des séries alternées, il en résulte

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \left|(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n.n!}\right|$$

et donc

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^n}{n.n!} \;.$$

Démontrons par récurrence sur l'entier naturel non nul n la propriété

$$(P_n) \qquad n\ln(n) + 1 - n \leq \ln(n!) \;.$$

Pour $n=1$, elle s'écrit $0 = 1\ln(1) + 1 - n \leq \ln(1) = 0$ et elle est donc vraie.

De plus, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$((n+1)\ln(n+1) - n) - (n\ln(n) + 1 - n) = \ln(n+1) + n\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \leq \ln(n+1) = \ln((n+1)!) - \ln(n!)$$

et donc la propriété (P_n) est héréditaire. Il résulte du principe de récurrence qu'elle est vraie pour tout entier naturel non nul n et donc pour un tel n

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{e^{n-1}}{n^n}$$

et, par conséquent,

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^n e^{n-1}}{n^{n+1}} \;.$$

Question III.4.a Comme $R(x)$ est le reste d'un intégrale convergente, il existe en particulier un réel strictement positif tel que $|R(x)| \leq 10^{-100}/3$.

Choisissons un entier n supérieur à 100 et à $10ex$. On a alors

$$n(\ln(n) - \ln(ex)) \geq n\ln(10)$$

et donc

$$\frac{x^n e^{n-1}}{n^{n+1}} \leq \frac{1}{en}\left(\frac{ex}{n}\right)^n \leq \frac{1}{100e}10^{-n} \leq \frac{1}{3}10^{-100} \;.$$

Par conséquent, grâce au résultat de la question précédente, pour un tel entier n on a

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{3}10^{-100} \;.$$

Question III.4.b D'après le résultat de la question 2.c, si k est supérieur à $50\ln(10)+(1+\ln(3))/2$, alors $|R_k(k)| \leq 10^{-100}/3$. Par conséquent

$$|R_{117}(117)| \leq \frac{1}{3}10^{-100} \;.$$

De plus

$$\frac{1}{500.e}\left(\frac{117.e}{500}\right)^{500} \simeq 4.2\ 10^{-102}$$

et donc, d'après la question 3.c, on a

$$|S(117) - S_{500}(117)| \leq \frac{1}{3}10^{-100}\ .$$

Question III.4.c On fixe des entiers naturels non nuls k et n ainsi qu'un réel strictement positif x.

Si on ne se pose pas de problème d'arrondi, pour calculer $S_n(x)$ il faut être à même de calculer la suite $(a_p(x))_{1\leq p\leq n-1}$ et le plus performant est donc de calculer un terme en fonction du précédent. On stocke ainsi deux variables $S_p(x)$ et $a_p(x)$. Pour tout entier naturel non nul p on a alors

$$a_p(x) = \frac{(p-1)x}{p^2}a_{p-1}(x) \qquad \text{et} \qquad S_{p+1}(x) = S_p(x) + (-1)^{p+1}a_p(x)\ .$$

Toujours en négligeant les problèmes d'arrondis, on calcule les termes de la suite $(j!/x^{j+1})_{0\leq j\leq k-2}$ de façon récurrente et on en calcule la somme alternée au passage. *In fine* on multiplie par e^{-x} pour obtenir $R(x) - R_k(x)$. Ainsi pour tout entier naturel j au moins égal à 2, on a

$$\frac{(j-1)!}{x^j} = \frac{j-1}{x}\frac{(j-2)!}{x^{j-1}} \qquad \text{et} \qquad e^x(R(x) - R_{j+1}(x)) = e^x(R(x) - R_j(x)) + (-1)^{j-1}\frac{(j-1)!}{x^j}\ .$$

On stocke donc deux nombres sur une boucle de longueur $k-2$, puis on effectue une multiplication.

Il faut tout de même noter que, pour tenir compte des problèmes d'arrondi, il faudrait commencer par sommer les termes les plus petits et donc ces algorithmes ne conviennent pas !