Deuxième épreuve CAPES externe 1993

François Sauvageot

2 mars 2001

Remarques. Sont centrales dans ce sujet les notions d'angles et d'orientation. Rappelons qu'au niveau du CAPES on entend par angle un angle de vecteurs au sein d'un plan orienté. On ne peut donc parler d'angle que si l'on s'est placé préalablement dans un plan et qu'on l'a orienté.

Rappelons quelques définitions.

Orientation de l'espace. Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie, orienter E c'est choisir une base B de E. On dit qu'une base de E est directe si son déterminant par rapport à B est positif. En particulier si f est un endomorphisme, $f(B)$ est une base de déterminant $det(f)$ par rapport à B. Rappelons que $det(f)$ est le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque (ce nombre ne dépend pas de la base choisie). Aussi une orientation est en fait une classe d'équivalence de bases modulo les endomorphismes de déterminant positif, noté $GL^+(E)$.

Orientation d'un sous-espace. Soit maintenant F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E, i.e. $E = F \oplus G$. Fixons une orientation de E et de G. Autant dire que l'on se donne deux bases B_E et B_G de E et G respectivement. Si maintenant B est une base de F, l'ensemble des vecteurs de B et de B_G forme une base de E. Néanmoins pour pouvoir dire si elle est directe par rapport à B_E, il faut l'ordonner. Si l'on choisit (B, B_G) ou (B_G, B), il peut y avoir une différence. En fait le signe de l'un et de l'autre diffèrent de $(-1)^{\dim(F)\dim(G)}$.

Orientation en dimension 3. Supposons maintenant E de dimension 3 ; si on se donne un plan P et un vecteur v en dehors de P, ce vecteur engendre une droite G supplémentaire de P et, si $B = (u_1, u_2)$ est une base de P, les bases (u_1, u_2, v) et (v, u_1, u_2) ont même orientation. Aussi on peut orienter le plan P en fixant un vecteur v en dehors de P.

Angle de vecteurs. Soit maintenant P un plan orienté (soit parce qu'on est initialement en dimension 2, soit qu'on est en dimension 3 et qu'on a fixé une orientation de l'espace et un vecteur en dehors de P, soit enfin que la situation est générale mais qu'on a fixé une orientation de P). Un angle de vecteurs est par définition une classe d'équivalence de couples (u_1, u_2) de vecteurs non nuls de P modulo transformation par des similitudes directes. Autrement dit, étant donné quatre vecteurs u_1, u_2, v_1 et v_2 de P, on a, en notant $GO^+(P)$ le groupe des similitudes directes de P,

$$(\widehat{u_1, u_2}) = (\widehat{v_1, v_2}) \Leftrightarrow \exists s \in GO^+(P) \qquad s(u_1) = v_1 \quad \text{et} \quad s(u_2) = v_2 \ .$$

Similitudes directes du plan. Rappelons qu'une similitude directe est tout simplement un endomorphisme de déterminant positif tel qu'il existe un scalaire positif λ, appelé rapport de la similitude, tel que

$$\forall v \in P \qquad ||s(v)|| = \lambda ||v|| \ ;$$

Dans le cas de la dimension 2 on a la possibilité de donner une réduction de s. Une similitude est un endomorphisme s de P tel que, dans toute base orthogonale directe de P, la matrice de s soit

$$\lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec λ un réel positif et θ un réel défini modulo 2π. Les quantités λ et θ sont indépendantes de la base choisie et se nomment le rapport et l'angle de la similitude s.

Mesure des angles de vecteurs. Si maintenant (u_1, u_2) est un couple de vecteurs non nuls de P, il existe une unique similitude envoyant u_1 sur u_2. La mesure de l'angle $(\widehat{u_1, u_2})$ est l'angle de cette similitude, i.e. une classe d'équivalence de réels modulo 2π. Une mesure de cette angle est l'un des représentants de cette classe. Comme on peut additionner des réels, on peut additionner des angles. En fait, si u_1, u_2, v_1 et v_2 sont quatre vecteurs de P et si s est l'unique similitude directe envoyant v_1 sur u_2, on a

$$(\widehat{u_1, u_2}) + (\widehat{v_1, v_2}) = (\widehat{u_1, u_2}) + (\widehat{s(v_1), s(v_2)}) = (\widehat{u_1, u_2}) + (\widehat{u_2, s(v_2)}) = (\widehat{u_1, s(v_2)}) \ .$$

Mises en garde. On voit donc que la notion d'angle de vecteurs n'a de sens que lorsque l'on se place *a priori* dans un plan **orienté**. Comme on l'a vu la notion d'angle de vecteurs est liée à la classification des similitudes directes du plan ou plus simplement des isométries positives (i.e. ici des rotations). Or la réduction d'une isométrie positive dans un espace de dimension strictement supérieure à 2 n'est pas unique, même à l'ordre des facteurs près, et il est donc impossible de définir canoniquement un angle dans l'espace. Il est nécessaire de restreindre préalablement l'étude à un plan.

Par exemple, en termes d'angle de vecteurs, dire que les angles au sommet d'un tétraèdre régulier sont égaux entre eux n'a aucun sens. Tout simplement parce que la notion même d'angle n'a pas de sens. Pourtant on connaît ce théorème ! Il est lié à la notion d'angle géométrique. C'est la notion élémentaire d'angle vue en collège. **Attention !** Par défaut, au niveau du CAPES ce n'est pas cette notion qui prévaut lors de l'étude d'angles. Si vous voulez parler d'angle géométrique : **il faut le préciser**. Mais pour cela il faut bien entendu comprendre la différence entre ces deux notions !

Angle géométrique. Un angle géométrique, c'est un angle non orienté. Autrement dit c'est un angle dans le plan, vu indépendemment de l'orientation. Or il n'est pas bien dur de voir que changer l'orientation d'un plan se fait en prenant comme base de référence du plan P la même base dans l'ordre inverse. Par conséquent une similitude, écrite dans cette nouvelle base, a comme matrice la matrice transposée de sa matrice dans l'ancienne base. L'effet est tout simplement de changer θ en $-\theta$. En effet

$$\mu \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \mu \quad \text{et} \quad \phi \equiv -\theta \ [2\pi] \ .$$

Mesure d'un angle géométrique. Ainsi un angle géométrique est une classe d'équivalence d'angles modulo la relation d'identification d'un angle avec son opposé (l'opposé de l'angle $(\widehat{u, v})$ est par exemple l'angle $(\widehat{v, u})$). Il est d'usage (en collège) d'appeler mesure de cet angle son unique représentant dans $[0; \pi]$. **Attention !** Même si cette mesure ressemble à celle d'un angle de droites, elle n'a rien en commun. Pour la trouver, on prend une mesure de l'angle de vecteurs dans $]-\pi; \pi]$, ce qui est possible puisque une telle mesure est définie modulo 2π, puis on en prend la valeur absolue. En particulier les angles 0 et π sont distincts et, plus généralement, la mesure d'un angle géométrique **n'est pas** une classe de congruence modulo π.

Angle de droites. Puisqu'on a parlé d'angles de droites, force est dire ce que c'est ! Il s'agit cette fois encore d'une notion orientée et donc il est encore une fois nécessaire de se placer dans un plan orienté. Soit P un tel plan. Comme les droites sont formées de vecteurs, on imagine que l'on peut parler d'angle de droites en se raccrochant à la notion d'angle de vecteurs. Soit d_1 et d_2 deux droites de P et u_1 et u_2 des vecteurs non nuls appartenant respectivement à ces droites. L'angle $(\widehat{u_1, u_2})$ est bien défini, mais il dépend a priori du choix des vecteurs. Voyons comment. Choisir d'autres vecteurs c'est en fait se donner λ_1 et λ_2 deux scalaires non nuls et considérer l'angle de vecteurs $(\widehat{\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2})$. Notons ϖ l'angle plat, c'est-à-dire l'angle de mesure π modulo 2π, ou encore la classe des angles de la forme $(\widehat{u, -u})$, pour u un vecteur non nul quelconque de P. On a alors

$$(\widehat{\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2}) = \begin{cases} (\widehat{u_1, u_2}) & \text{si } \ \lambda_1 \lambda_2 > 0 \\ (\widehat{u_1, u_2}) + \varpi & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

Par conséquent la classe de $(\widehat{u_1, u_2})$ modulo addition de ϖ est bien définie. C'est ce que l'on appelle l'angle de droites $(\widehat{d_1, d_2})$.

Mesure d'un angle de droites. La mesure de l'angle est donc la mesure de l'angle de vecteurs modulo la mesure de l'angle plat, i.e. c'est un élément de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ défini modulo $\pi\mathbf{Z}/2\pi\mathbf{Z}$, c'est donc un élément de $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$. Concrètement on mesure un angle de vecteurs pris au hasard sur les droites et on prend sa classe modulo π. Il est à noter que l'on peut donc prendre un représentant dans $[0;\pi[$ et que l'on voit ici la différence avec les angles géométriques : l'intervalle est ouvert en π, les angles de mesure 0 et π sont identiques et, d'une façon générale, la mesure est définie modulo π.

Voyons maintenant comment les notions habituelles sur les angles (qui sont donc des angles de vecteurs dans un plan orienté) se comportent vis-à-vis du passage au quotient que sont les angles géométriques et les angles de droites.

1. La première notion est celle de groupe additif. On peut additionner des angles. Pour que cette notion passe au quotient il faut que la relation d'équivalence soit additive. C'est évidemment le cas des angles de droites, puisqu'elle est définie à partir de l'addition. Par contre ce n'est pas le cas des angles géométriques. En effet $\theta+\phi$ n'est pas la même chose que $\theta-\phi$ bien que ϕ et $-\phi$ le soient. Par conséquent il est possible d'additionner les angles de droites **mais pas** les angles géométriques. Quand on additionne les angles géométriques au collège on prend soin en fait de raisonner sur des angles de vecteurs en relevant les angles de façon cohérente. C'est cette vertu des angles de vecteurs qui les fait préférer aux angles géométriques. Ou plutôt c'est la nécessité de formaliser l'addition des angles qui rend incontournable la notion d'angle de vecteurs.

2. La seconde notion est celle liée aux fonctions trigonométriques. L'analyse est ici très simple. Par parité du cosinus, il est bien défini sur les angles géométriques, par opposition au sinus. Par π-périodicité de la tangente, elle est bien définie sur les angles de droites. Pour les autres fonctions on récupère en général un signe et donc seule la valeur absolue de la fonction est bien définie. Ainsi pour les angles géométriques les fonctions $\cos$, $|\sin|$ et $|\tan|$ sont bien définies, alors que pour les angles de droites ce sont les fonctions $|\cos|$, $|\sin|$ et $\tan$.

Partie A

Remarque : le cosinus d'un angle de vecteurs d'un plan est indépendant de l'orientation choisie sur ce plan. Deux droites sont donc de rapport γ si et seulement si on peut trouver des vecteurs unitaires de ces droites tels que le cosinus de l'angle entre ces vecteurs est γ. Cette notion dépend a priori d'un choix d'orientation, mais on a vu qu'en fait il n'en est rien. Remarquons qu'on peut introduire l'angle entre les deux droites. Dans ce cas le cosinus de l'angle n'est pas bien défini, mais sa valeur absolue l'est. Deux droites d_1 et d_2 sont donc de rapport de γ si et seulement si $|\cos(\widehat{d_1,d_2})|=\gamma$. Encore une fois cette notion nécessite une orientation du plan vectoriel engendré par les directions de d_1 et d_2, mais elle n'en dépend pas. On voit donc que le rapport entre deux droites est une notion un peu subtile qui mérite qu'on y réfléchisse et qu'on la manipule avec des pincettes.

Question A.1.1 Une isométrie étant en particulier une application affine, elle préserve les intersections de sous-espaces affines et donc les points de concours. Par conséquent G' est constitué de droites concourantes en l'image par f du point de concours des droites constituant G.

Si l'on a répondu à la question A.2.1 d'abord, la fin de l'argument est très simple. En effet si u et v sont des vecteurs directeurs de deux droites, $f(u)$ et $f(v)$ sont des vecteurs directeurs des images de ces droites par f. Par préservation du produit scalaire et de la norme par f, il en résulte que deux droites et leurs images par f sont de même rapport. Par conséquent G' est une gerbe de même ordre et de même rapport que G.

Si on n'a pas répondu à cette question il faut être plus précis. Soit d et d' deux droites de rapport γ et soit u et v des vecteurs unitaires directeurs de d et d' tels que $u.v=\gamma$. Les vecteurs $f(u)$ et $f(v)$ sont des vecteurs directeurs de $f(d)$ et $f(d')$ et sont unitaires puisque f préserve la norme. Comme elle préserve aussi le produit scalaire, on a $f(u).f(v)=\gamma$ et donc f envoie deux droites de rapport γ sur des droites de même rapport. On conclut de la même façon.

Si on souhaite raisonner en termes d'angles, il faut se rappeler qu'une isométrie ne préserve pas les angles de vecteurs, mais les angles géométriques. Par conséquent une isométrie préserve le cosinus des angles de vecteurs et donc la valeur absolue du cosinus des angles de droites, i.e. le rapport des droites.

Enfin remarquons que le fait que, à i et j donnés dans $[1;n]$, il existe u_i et u_j des vecteurs directeurs unitaires de d_i et d_j tels que $u_i.u_j=\gamma$ **ne permet pas** d'exhiber une suite $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ de tels vecteurs ayant ces propriétés. C'est très clair si on pris le temps de lire la suite du problème : en B.3.1 l'égalité des trois produits scalaires est manifestement disjointe du fait qu'ils puissent valoir γ ou pas, en C.2.1 on n'impose cette condition que par rapport à un des indices, en A.2.5.e on montre même que l'égalité des trois produits scalaires n'a lieu que pour une certaine fonction $\varphi(h)$ qui ne semble pas être γ.

On rencontre ici un problème typique d'interversion de quantificateurs. Dire que G est une gerbe de rapport γ c'est en particulier affirmer

$$\forall (i,j) \in [1;n]^2 \qquad \exists (u_i, u_j) \in (\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}) \qquad ||u_i|| = ||u_j|| = 1 \quad \text{et} \quad u_i.u_j = \gamma$$

et donc le couple (u_i, u_j) dépend du couple (i,j). En particulier u_i dans la phrase précédente **dépend** de j. Cette phrase n'est donc pas équivalente à cette version plus optimiste :

$$\exists (u_i)_{1\le i\le n} \in (\overrightarrow{d_i})_{1\le i\le n} \qquad \forall (i,j) \in [1;n]^2 \quad ||u_i|| = ||u_j|| = 1 \quad \text{et} \quad u_i.u_j = \gamma\ .$$

Question A.1.2 Soit G et G' deux gerbes et f une isométrie telle que G' soit l'image de G par f. Comme f est une isométrie, elle est injective donc bijective et son application réciproque est une isométrie. Comme G est l'image de G' par f^{-1}, il en résulte que G est isométrique à G'.

Question A.2.1 Si on a déjà fait l'interprétation géométrique de γ en terme de valeur absolue du cosinus d'un angle de droite, il n'y a rien à démontrer.

Sinon voici comment on procède. Il faut noter que le quantificateur $\exists$ implicite dans la définition du rapport de deux droites empêche de travailler par équivalences. Enfin il est à noter qu'ici les droites **ne sont pas** supposées sécantes.

Supposons donc d_1 et d_2 de rapport γ. Soit v_1 et v_2 deux vecteurs directeurs unitaires de d_1 et d_2 tels que $v_1.v_2 = \gamma$. Puisque ces vecteurs engendrent les directions des droites, il existe deux scalaires non nuls λ_1 et λ_2 tels que $u_1 = \lambda_1 v_1$ et $u_2 = \lambda_2 v_2$. En prenant les normes il vient $||u_1|| = |\lambda_1|$, $||u_2|| = |\lambda_2|$ et donc

$$|u_1.u_2| = |\lambda_1\lambda_2\gamma| = \gamma|\lambda_1|.|\lambda_2| = \gamma||u_1||.||u_2||\ .$$

Réciproquement si u_1 et u_2 vérifient $|u_1.u_2| = \gamma||u_1||.||u_2||$, posons $v_1 = u_1/||u_1||$ et $v_2 = \varepsilon u_2/||u_2||$ avec ε pris égal à 1 si $u_1.u_2$ est positif ou nul et égal à -1 sinon. On a alors $u_1.u_2 = \varepsilon\gamma||u_1||.||u_2||$ et donc $v_1.v_2 = \gamma$. Il en résulte que les droites d_1 et d_2 sont de rapport γ.

Question A.2.2 Remarquons que les trois droites considérées sont concourantes en A. De plus l'angle géométrique entre chacune des droites (AB), (AC) et (AD) est le même, égal à $\pi/3$, puisque les faces d'un tétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux. Il en résulte que la valeur absolue du cosinus de l'angle de droites entre ces droites est constant égal à $|\cos(\pi/3)|$, i.e. $1/2$. En conséquence les trois droites forment une gerbe de centre A et de rapport $1/2$.

Si on veut se passer de l'interprétation géométrique de γ, voici comment faire. Soit XYZ un triangle équilatéral, on a $\overrightarrow{XY}\ .\ \overrightarrow{XZ} = XY.XZ/2$ puisque l'angle géométrique en X vaut $\pi/3$. La question A.2.1 permet donc de conclure que les droites (XY) et (XZ) sont de rapport $1/2$. Il en résulte que les droites (AB), (AC) et (AD) sont deux à deux de rapport $1/2$.

Remarque : les trois droites considérées sont trivialement concourantes. Néanmoins cette propriété fait partie des points imposés à une gerbe. Il est donc nécessaire de la constater pour répondre pleinement à la question et donc en marquer tous les points ...

Question A.2.3 Les trois droites considérées sont concourantes en O.

Le triangle OAB est isocèle en O puisque O est le centre du cercle circonscrit à (ABC), et son angle géométrique en A est $\pi/6$ puisque (OA) est bissectrice intérieure de $((AB),(AC))$. Par conséquent l'angle géométrique en O est $2\pi/3$. Il en résulte $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = -OA.OB/2$ et donc (OA) et (OB) sont de rapport $1/2$, d'après la question A.2.1. En appliquant ce résultat aux triangles OAC et OBC, il en résulte que (OA), (OB) et (OC) forment une gerbe de centre O et de rapport $1/2$.

Question A.2.4 Considérons d'une part un tétraèdre régulier et sa gerbe G associée par la question A.2.2 et, d'autre part, un triangle équilatéral et sa gerbe G' associée par la question A.2.3. On a ainsi deux gerbes de mêmes ordre et rapport.

Les droites formant G' sont incluses dans un certain plan, noté P. Si f est une isométrie quelconque, elle envoie P dans un autre plan et donc l'image des droites de G' appartiennent toutes à un plan ; elles ne peuvent donc former la gerbe G puisque cette dernière n'est pas incluses dans un plan.

L'énoncé proposé est donc inexact.

Question A.2.5.a

Préambule. La notion d'axe d'une rotation dans l'espace est une notion non orientée. En effet c'est tout simplement l'espace propre associé à la valeur propre 1. Par contre l'angle d'une rotation, comme toute notion d'angle, est une notion orientée. Cet angle est en fait l'angle d'une rotation plane dans le plan perpendiculaire à l'axe de la rotation. Ce plan n'est pas canoniquement orienté, même si l'espace ambiant a été orienté. Une façon de choisir une orientation de ce plan est de fixer un vecteur en dehors du plan, par exemple un vecteur de l'axe. Aussi une orientation de l'axe de la rotation définit une orientation du plan. Il ya deux façons de dire ces choses d'une façon concrète. Soit r une rotation d'axe d orienté selon u et d'angle θ. Soit P le plan orthogonal à d.

1. Soit (v, w) une base de P telle que (u, v, w) soit directe. La matrice de r dans cette base est donnée par
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} .$$
Une façon efficace (et très physicienne) de trouver une telle base est de choisir un vecteur v quelconque dans P et de prendre pour w le vecteur $u \wedge v$ puisque la base $(u, v, u \wedge v)$ est directe. Il faut se rappeler néanmoins que le produit vectoriel se calcule relativement à une base et que cette base doit être directe pour que ce qui précède soit exact (mais en général il s'agit de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et elle est le plus souvent prise directe).

2. Soit (v, w) une base de P telle que (v, w, u) soit directe (c'est la même condition que précédemment mais elle plus naturelle : on complète la base de P par la donnée u). La matrice de r dans cette base est donnée par
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Comme il n'existe que deux orientations possibles du plan P (obtenue chacune grâce aux deux orientations possibles de l'axe d), on voit qu'il y a au plus deux possibilités d'obtenir une rotation sous la forme réduite précédente. Mais il faut garder à l'esprit qu'il y a effectivement **deux** formes réduites possibles (pour $sin(\theta)$ non nul) qui sont obtenues en changeant θ en son opposé. Il est d'ailleurs manifeste que $\cos(\theta)$ est un invariant de la matrice puisqu'il est lié à sa trace : $tr(r) = 1+2\cos(\theta)$.

Revenons à la question. Puisque l'axe a été orienté selon e_3, que le plan perpendiculaire à e_3 admet (e_1, e_2) comme base et que la base (e_1, e_2, e_3) est directe, la restriction des rotations considérés au plan $(O; e_1, e_2)$ sont des rotations d'angles $2\pi/3$ et $4\pi/3$ dans ce plan orienté selon (e_1, e_2). Il en résulte $J = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ et $K = (-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$.

Question A.2.5.b Notons r la rotation d'axe $(O; e_3)$ orienté selon e_3 et d'angle $2\pi/3$. On a donc $J = r(I)$ et $K = r^2(I) = r(J)$. Puisque Ω appartient à l'axe de r, il en résulte $v = r(u)$ et $w = r(v) = r^2(u) = r^{-1}(u)$. Par conséquent
$$u.v = r(u).r(v) = v.w = r(v).r(w) = w.u \,.$$

Calculons cette quantité. On a $\Omega I = \sqrt{1+h^2}$ et $\Omega J = \Omega I$. Enfin, puisque $h^2 + 1$ est une quantité strictement positive et donc, a fortiori, non nulle,
$$u.v = \frac{1}{1+h^2}(1, 0, -h).\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -h\right) = \frac{h^2 - 1/2}{h^2+1} = 1 - \frac{3}{2(h^2+1)} \,.$$

On a donc, pour tout réel h, $\varphi(h) = 1 - 3/2(1+h^2)$.

Question A.2.5.c La fonction φ est définie sur $\mathbf{R}$, comme on l'a déjà remarqué. C'est une fraction rationnelle sans pôle, elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Comme elle est paire on peut restreindre son étude à $\mathbf{R}_+$. La fonction carré y est strictement croissante et donc φ l'est aussi. En 0, φ vaut $-1/2$ et, en $+\infty$, elle tend vers 1. D'où le tableau de variations suivant

	$-\infty$		0		$+\infty$
φ	1	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

Puisque φ est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, elle réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[-1/2;1[$. Par parité on en déduit que l'image de φ est $[-1/2;1[$.

Question A.2.5.d Soit h un réel. Les droites (ΩI), (ΩJ) et (ΩK) sont concourantes en Ω et, d'après ce qui précède et la question A.2.1, sont deux à deux de rapport $|\varphi(h)|$. Il en résulte qu'elle forment une gerbe de centre Ω, d'ordre 3 et de rapport $|\varphi(h)|$.

Question A.2.5.e Puisque u_1, v_1 et w_1 sont unitaires, on peut trouver ε_1, ε_2 et ε_3 dans $\{-1,+1\}$ tels que $u_1 = \varepsilon_1 u$, $v_1 = \varepsilon_2 v$ et $w_1 = \varepsilon_3 w$. Soit c un scalaire. On a donc

$$u_1.v_1 = v_1.w_1 = w_1.u_1 = c \Leftrightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2\varphi(h) = \varepsilon_2\varepsilon_3\varphi(h) = \varepsilon_3\varepsilon_1\varphi(h) = c\ .$$

Comme on a trois scalaires $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et seulement deux valeurs possibles pour chacun d'entre eux, deux au moins d'entre eux sont égaux. Il en résulte que le produit de ces deux scalaires vaut 1 et donc

$$u_1.v_1 = v_1.w_1 = w_1.u_1 = c \Rightarrow c = \varphi(h)\ .$$

Question A.2.5.f Supposons G et G' isométriques et notons u, v et w les vecteurs associés à G par la question A.2.5.b. On a donc $u.v = v.w = w.u = \varphi(h)$.

Soit maintenant f une isométrie envoyant G sur G'. Notons u_1, v_1 et w_1 les images de u, v et w par f. Ce sont des vecteurs directeurs unitaires de $(\Omega' I)$, $(\Omega' J)$ et $(\Omega' K)$ et on a

$$u_1.v_1 = f(u).f(v) = u.v \qquad v_1.w_1 = v.w \qquad \text{et} \qquad w_1.u_1 = w.u\ .$$

Par conséquent

$$u_1.v_1 = v_1.w_1 = w_1.u_1 = \varphi(h)\ .$$

Il en résulte $\varphi(h) = \varphi(h')$ d'après la question précédente.

Réciproquement, par stricte monotonie sur $\mathbf{R}_+$ et parité de la fonction φ, on a

$$\varphi(h) = \varphi(h') \Leftrightarrow |h| = |h'|\ .$$

Supposons donc $\varphi(h) = \varphi(h')$. Si $h = h'$, alors $G = G'$ et ces deux gerbes sont isométriques via l'identité. Si $h = -h'$, la symétrie orthogonale par rapport au plan (IJK) échange Ω et Ω' et donc aussi G et G'. Dans tous les cas G et G' sont donc isométriques.

Question A.3.1 Les quatre droites considérées sont concourantes en O. On a de plus

$$OA = OB = OC = OD = \sqrt{3} \qquad \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OD} = 1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}\,.\,\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD}\,.\,\overrightarrow{OB} = -1$$

et donc la question A.2.1 montre que (OA), (OB), (OC) et (OD) forment une gerbe de rapport $1/3$.

Question A.3.2.a Comme z est distinct de 1, on a

$$z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2 = z^{-2}\frac{1-z^5}{1-z} = 0\ .$$

Comme z est de module 1, on a $z^{-2} = \overline{z^2}$ et $z^{-1} = \bar{z}$ et donc

$$z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2 = 2\Re(z^2) + 2\Re(z) + 1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1$$

et, par conséquent,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}\,.$$

Pour conclure on peut chercher une équation du second degré vérifiée par les cosinus cherchés. On peut utiliser la formule de duplication du cosinus, ce qui permet de trouver la valeur de $\cos(2\pi/5)$ comme solution d'une équation du second degré, puis celle de $\cos(4\pi/5)$ en reportant dans l'équation précédente. Mais on peut aussi trouver directement une équation satisfaite par les deux ! En effet, on a, puisque $6\pi/5 = 2\pi - 4\pi/5$,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = -\frac{1}{4}\,.$$

Par conséquent $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$ sont les deux racines du trinôme $X^2 + X/2 - 1/4$. Comme $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, $\cos(2\pi/5)$ est positif et les formules attendues en résulte :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\,.$$

Question A.3.2.b Remarquons que l'on sait tracer la médiatrice de deux points. En effet il suffit de tracer deux cercles de même rayon et sécants, centrés l'un sur un point et l'autre sur l'autre. La droite qui joint les deux points d'intersection de ces cercles est la médiatrice des deux points.

En particulier l'intersection de cette médiatrice et de la droite joignant les deux points fournit le milieu de deux points.

Si maintenant A et B sont deux points distincts et si on veut tracer la perpendiculaire à (AB) passant par A, il suffit de tracer le cercle de centre A passant par B. Son intersection avec (AB) est un point C tel que A soit milieu de $[BC]$ et donc la médiatrice de $[BC]$ est la perpendiculaire cherchée.

On se donne maintenant le cercle unité Γ ainsi que les points O, centre du repère, et A_1 d'affixe 1. Soit A le second point d'intersection de (OA) avec Γ, son affixe est -1. On sait construire des milieux, on peut donc construire les points B et C milieux de $[AO]$ et de $[BO]$ repsectivement. Leurs affixes sont $-1/2$ et $-1/4$. La médiatrice de $[AA_1]$ fournit, par intersection avec Γ, les points D et E d'affixes i et $-i$. Puis, en prenant le milieu de $[OD]$, on trouve le point F d'affixe $i/2$. Comme $CF = \sqrt{5}/4$, l'intersection du cercle de centre C et de rayon CF avec la droite OA_1 fournit deux points H et I d'affixes $(-1+\sqrt{5})/4$ et $(-1-\sqrt{5})/4$. Par conséquent la perpendiculaire en H à (OA_1) coupe Γ en A_2 et A_5. En reportant la distance A_1A_2 sur Γ à partir de A_2 et A_5, on construit A_3 et A_4.

Question A.3.2.c Soit r la rotation d'axe $(O; e_3)$ orienté selon e_3 et d'angle $2\pi/5$. On a, pour tout entier i entre 1 et 5, $A_i = r^{i-1}(A_1)$. Comme Ω et O appartiennent à l'axe de r, il en résulte que ΩA_i et $\overrightarrow{\Omega O}\cdot\overrightarrow{\Omega A_i}$ ne dépendent pas de l'entier i entre 1 et 5.

On a $\Omega O = 1/2$ et $\Omega A_1 = \sqrt{5}/2$.

De plus $\overrightarrow{\Omega O}$ est orthogonal au plan $(O; e_1, e_2)$ et donc

$$\overrightarrow{\Omega O} \,.\, \overrightarrow{\Omega A_1} = \Omega O^2 = 1/4 \,.$$

Comme r^5 est l'identité, pour i et j entiers

$$\overrightarrow{\Omega r^i(A_1)} \,.\, \overrightarrow{\Omega r^j(A_1)} = \overrightarrow{\Omega A_1} \,.\, \overrightarrow{\Omega r^{j-i}(A_1)} = \overrightarrow{\Omega A_1} \,.\, \overrightarrow{\Omega r^k(A_1)}$$

où k est le reste de la division euclidienne de $j-i$ par 5. En utilisant l'orthogonalité de $\overrightarrow{\Omega O}$ à $(O; e_1, e_2)$, il vient

$$\overrightarrow{\Omega A_1} \,.\, \overrightarrow{\Omega r^k(A_1)} = \Omega O^2 + \overrightarrow{OA_1} \,.\, \overrightarrow{Or^k(A_1)} = \frac{1}{4} + \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$$

puisque r^k est une rotation de centre O et d'angle $2k\pi/5$ dans le plan $(O; e_1, e_2)$. Au final

$$\left|\overrightarrow{\Omega A_1} \,.\, \overrightarrow{\Omega r^k(A_1)}\right| = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

si k n'est pas nul. Par conséquent, pour i et j entiers distincts entre 1 et 5

$$\left|\overrightarrow{\Omega A_i} \,.\, \overrightarrow{\Omega A_j}\right| = \frac{\sqrt{5}}{4} \,.$$

Il en résulte, pour tous entiers i et j distincts entre 1 et 5

$$\left|\overrightarrow{\Omega O} \,.\, \overrightarrow{\Omega A_i}\right| = \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Omega O . \Omega A_i$$

et

$$\left|\overrightarrow{\Omega A_i} \,.\, \overrightarrow{\Omega A_j}\right| = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Omega A_i . \Omega A_j$$

et donc, d'après A.2.1, les six droites (ΩO), (ΩA_1), (ΩA_2), $\Omega A_3)$, (ΩA_4) et (ΩA_5) forment une gerbe d'ordre 6, de centre Ω et de rapport $1/\sqrt{5}$.

En retirant l'une quelconque des six droites, on obtient une gerbe d'ordre 5, de mêmes centre et rapport.

De même en en retirant deux, on obtient une gerbe d'ordre 4, de même centre et rapport. Comme ce rapport, $1/\sqrt{5}$, est distinct du rapport de la gerbe construite en A.3.1, à savoir $1/3$, ces deux gerbes d'ordre 4 ne sont pas isométriques.

Partie B

Question B.1.1 Pour tout entier i entre 1 et 3, on a

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{3} (u_i . u_j) x_j = u_i . \left(\sum_{j=1}^{3} x_j u_j\right) = u_i . v$$

et donc

$$MX = \begin{pmatrix} u_1 . v \\ u_2 . v \\ u_3 . v \end{pmatrix} \,.$$

De plus

$$\sum_{i=1}^{3} x_i(u_i.v) = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i u_i\right).v = ||v||^2$$

et donc

$${}^tXMX = ||v||^2 \ .$$

Supposons donc v nul. Pour tout entier i entre 1 et 3, on a alors $u_i.v = 0$ et la formule précédente pour MX montre que MX est nul.

Réciproquement si $MX = 0$, alors ${}^tXMX$ est nul, i.e. $||v|| = 0$ et donc v est nul.

On peut reformuler l'équivalence précédente sous la forme suivante

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in Ker(M) \Leftrightarrow x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

et donc

$$Ker(M) = 0 \Leftrightarrow \big(\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \quad x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)\big) \ ,$$

i.e. M est inversible si et seulement si (u_1, u_2, u_3) est libre.

Question B.1.2 M est une matrice symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable et en particulier ses valeurs propres sont réelles.

Soit λ une de ces valeurs propres et X un vecteur propre non nul associé. On a, d'après la question précédente,

$$0 \leq {}^tXMX = \lambda {}^tXX = \lambda ||X||^2$$

et, comme X est non nul, il en résulte que λ est positif ou nul.

Question B.2.1 Puisque (u_1, u_2, u_3) est libre, c'est une base de E. Il existe donc un unique endomorphisme de E envoyant (u_1, u_2, u_3) sur (u'_1, u'_2, u'_3).

Il reste à voir que c'est un automorphisme orthogonal, i.e. une isométrie. Pour cela il suffit de voir qu'elle préserve le produit scalaire ; mais, par bilinéarité de ce produit scalaire, il suffit de faire cette vérification sur une base. L'hypothèse faite est exactement cette condition.

Remarque : on pourrait montrer que c'est un automorphisme sans savoir qu'une isométrie est nécessairement bijective (en dimension finie). En effet (u_1, u_2, u_3) étant une base, sa matrice de Gram est inversible. Comme cette dernière est aussi celle de (u'_1, u'_2, u'_3), il en résulte que ce dernier triplet est libre et forme donc une base de E.

Question B.2.2 Prenons u_3 un vecteur non nul orthogonal au plan engendré par u_1 et u_2 et u'_3 un vecteur non nul orthogonal au plan engendré par u'_1 et u'_2 de même norme que u_3. Une fois u_3 fixé, on a donc deux choix possibles pour u'_3. Pour la suite on fixe définitivement un choix de u_3 et on autorise pour u'_3 l'un quelconque des choix possibles.

Les relations $u_i.u_j = u'_i.u'_j$ sont vraies lorsque $1 \leq i, j \leq 2$ par hypothèse, mais également lorsque l'un seulement des deux indices est 3 puisqu'alors ces deux quantités sont nulles et enfin elle l'est lorsque les deux indices sont 3 par hypothèse sur les normes de u_3 et u'_3.

La question B.2.1 permet donc, pour chaque choix de u'_3, de construire un automorphisme orthogonal envoyant (u_1, u_2, u_3) sur (u'_1, u'_2, u'_3). Il y a donc en particulier existence d'un automorphisme orthogonal envoyant (u_1, u_2) sur (u'_1, u'_2).

Par contre il n'y a pas unicité. Un tel automorphisme est déterminé par ses valeurs sur une base de E, par exemple (u_1, u_2, u_3) et on a vu qu'il y a en fait deux choix possibles pour l'image de cette base. Il y a donc en fait deux automorphismes orthogonaux envoyant (u_1, u_2) sur (u'_1, u'_2). Il est à noter que l'un d'eux est de déterminant positif et l'autre négatif. Par conséquent il existe en fait un unique automorphisme orthogonal direct qui envoie (u_1, u_2) sur (u'_1, u'_2).

Question B.3.1.a Puisque G est une gerbe de rapport γ, si v_2 et v_3 sont des vecteurs directeurs unitaires quelconques de d_2 et d_3, on a, d'après la question A.2.1,

$$|u_1.v_2| = |u_1.v_3| = |v_2.v_3| = \gamma \ .$$

Si γ est nul, v_2 et v_3 conviennent.

Sinon soit ε_2, ε_3 et ε les signes respectifs de $u_1.v_2$, $u_1.v_3$ et $v_2.v_3$ (ce signe est un élément de $\{-1,+1\}$). Posons $u_2=\varepsilon\varepsilon_3 v_2$ et $u_3=\varepsilon\varepsilon_2 v_3$. On a alors

$$u_1.u_2=u_1.u_3=u_2.u_3=\varepsilon\varepsilon_2\varepsilon_3\gamma\ .$$

Question B.3.1.b Soit (x,y,z) les coordonnées d'un vecteur de E dans la base canonique.

Le plan d'équation $x+y+z=0$ est propre pour M, pour la valeur propre $1-c$, et la droite d'équation $x=y=z$ l'est pour la valeur propre $1+2c$.

Par conséquent si c est non nul, $1-c$ est valeur propre double de M et $1+2c$ en est valeur propre simple. Si c est nul, M est l'identité et admet 1 comme valeur propre triple.

Dans tous les cas les valeurs propres de M sont positives, d'après B.1.2, et en particulier $1+2c$ l'est, i.e. $c\geq -1/2$.

Question B.3.1.c Comme G est de rapport $|c|$, d'après A.2.1 ou B.3.1.a, on a $c<1$. Par conséquent c appartient à l'image de φ, définie en A.2.5.b.

Soit h un de ses deux antécédents et G' la gerbe associé à cet h par la question A.2.5. On note également u, v et w les vecteurs construits pour cet h en A.2.5.b. La matrice de Gram de la famille (u,v,w) est donc exactement M. D'après B.2.1, il existe donc un unique automorphisme orthogonal envoyant (u,v,w) sur (u_1,v_1,w_1). Notons Ω le centre G et $\Omega'=\Omega(h)$ celui de G'. Il existe une unique isométrie envoyant Ω' sur Ω de partie linéaire égale à l'automorphisme orthogonal que l'on vient de citer. Cette isométrie envoie la gerbe G' sur la gerbe G et donc G est isométrique à la gerbe associée à l'un des antécédents de c par φ, construite en A.2.5.

Question B.3.1.d Si $c=-1/2$, 0 est valeur propre de M puisque c'est aussi $1+2c$, d'espace propre associé d'équation $x=y=z$ d'après B.3.1.b. En particulier $(1,1,1)$ est dans le noyau de M. La question B.1.1 permet donc de conclure que $u_1+u_2+u_3$ est nul.

Considérons G' la gerbe associée à 0 en A.2.5 (ce qui n'est autre que la gerbe construite en A.2.3) et u, v, w les vecteurs construits en A.2.5.b pour h nul. Comme $u_1.u_2=u.v=-1/2$, la question B.2.2 permet d'affirmer l'existence d'un automorphisme orthogonal envoyant u et v sur u_1 et u_2. De plus, lorsque h est nul, on est dans la situation A.2.3, i.e. $\Omega=O$, $OI=OJ=OK=1$ et $u+v+w=0$ puisque O est isobarycentre de I, J et K. L'automorphisme précédent envoie donc $w=-u-v$ sur $-u_1-u_2=u_3$.

La conclusion de la question précédente reste donc valide et G est isométrique à la gerbe de A.2.3, qui est celle construite en A.2.5 pour h nul.

Question B.3.2 Puisque φ admet $[-1/2;1[$ comme image, $|\varphi|$ admet $[0;1[$ comme image et donc tout γ de $[0;1[$ est le rapport d'au moins une gerbe d'ordre 3.

La question B.3.1 permet d'affirmer que les gerbes d'ordre 3, à isométrie près, sont celles de la forme construite en A.2.5. Deux telles gerbes sont non isométriques si h varie dans $\mathbf{R}_+$. Comme elles sont de rapport $|\varphi(h)|$, il en résulte que pour γ nul ou strictement supérieur à $1/2$, il existe une unique gerbe d'ordre 3 et de rapport γ, à isométrie près ; tandis que pour γ dans $]0;1/2]$, il existe deux telles gerbes.

Partie C

Question C.1.1.a Soit H un sous-groupe de T d'ordre m, c'est-à-dire de cardinal m.

D'après le théorème de Lagrange si t est un élément de H, son ordre divise m et donc $t^m=1$. Par conséquent H est inclus dans l'ensemble des racines m-ièmes de l'unité. Comme ce dernier ensemble est exactement de cardinal m, c'est tout H.

Autrement dit l'unique sous-groupe de T d'ordre m est

$$T_m=\{z\in T \mid z^m=1\}=\{e^{2ik\pi/m}\mid 0\leq k\leq m-1\}\ .$$

Question C.1.1.b Orientons l'axe d. On définit alors un isomorphisme de T sur R_d en associant à tout complexe t la rotation d'axe orienté d et d'angle l'argument de t. Remarquons que l'on s'autorise donc à considérer l'identité comme une rotation d'axe d.

Cet isomorphisme induit une bijection entre les sous-groupes de T et ceux de R_d, préservant les ordres. Par conséquent la question C.1.1.a permet d'affirmer que R_d possède un unique sous-groupe d'ordre m, à savoir l'image de T_m.

Question C.1.1.c Soit σ dans $R_{d,m}$, comme $\det(f \circ \sigma \circ f^{-1}) = \det(\sigma) = 1$, l'application $f \circ \sigma \circ f^{-1}$ est directe. Comme c'est une composée d'isométries, c'en est une. Enfin comme elle laisse fixe point par point la droite $f(d)$, c'est une rotation d'axe $f(d)$ ou bien l'identité. En tout cas c'est un élément de $R_{f(d)}$.

De plus l'application $u \mapsto f \circ u \circ f^{-1}$ est un automorphisme (intérieur) du groupe des isométries affines. Il envoie donc un sous-groupe de ces isométries sur un autre sous-groupe. On peut évidemment le vérifier directement : soit σ et σ' dans $R_{d,m}$, alors $\sigma' \circ \sigma^{-1}$ appartient à $R_{d,m}$ et on a

$$(f \circ \sigma' \circ f^{-1}) \circ (f \circ \sigma \circ f^{-1})^{-1} = f \circ \sigma' \circ \sigma^{-1} \circ f^{-1}$$

ce qui prouve que

$$\{f \circ \sigma \circ f^{-1} \mid \sigma \in R_{d,m}\}$$

est un sous-groupe du groupe des isométries affines.

De plus l'automorphisme intérieur est en particulier injectif et donc préserve les ordres. Autrement dit

$$\{f \circ \sigma \circ f^{-1} \mid \sigma \in R_{d,m}\}$$

est de cardinal m. D'après C.1.1.b c'est donc nécessairement $R_{f(d),m}$.

Question C.1.2 Puisque $d'_0 = f(d_0)$,

$$R_{d'_0,m} = \{f \circ \sigma \circ f^{-1} \mid \sigma \in R_{d_0,m}\}$$

et donc

$$\{d'_1, \ldots, d'_m\} = \{f \circ \sigma \circ f^{-1}(d'_1) \mid \sigma \in R_{d_0,m}\} = f\left(\{\sigma(d_1) \mid \sigma \in R_{d_0,m}\}\right) = f\left(\{d_1, \ldots, d_m\}\right) \ .$$

Comme on a aussi $f(d_0) = d'_0$, il vient F' est l'image de F par f.

Question C.1.3 La matrice associée à ρ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et est donc celle d'une isométrie, de déterminant 1 donc directe. La droite $x = y = z$ est fixe, notons-la d. Avec les conventions de C.1.1.b, ρ est donc un éléḿent de R_d. Comme de plus $\rho^3 = Id$, tandis que ρ et ρ^2 ne sont pas l'identité, l'ensemble $\{Id, \rho, \rho^2\}$ est le sous-groupe engendré par ρ, dans le groupe des isométries affines. Comme c'est un sous-groupe d'ordre 3 de R_d, c'est donc $R_{d,3}$.

Question C.2.1 Deux droites sont de rapport nul si et seulement si elles sont orthogonales. Une famille orthogonale de vecteurs étant libre, il ne peut exister de famille orthogonale de vecteurs de cardinal 4 ou plus. Comme tout choix de vecteurs directeurs des droites d'une gerbe de rapport nul fournit une telle famille, on en conclut, puisque l'ordre de la gerbe est au moins 4, que γ ne saurait être nul.

Pour tout entier k entre 1 et m, il existe deux choix de vecteurs directeurs unitaires sur d_k conduisant à des produits scalaires avec u_0 de valeur absolue γ, d'après A.2.1, et de signes opposés (puisque γ est non nul). L'assertion en résulte.

Question C.2.2 Le plan Π peut être défini comme l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{IM}\,.u_0 = 0$ ou encore $\overrightarrow{\Omega M}\,.u_0 = \overrightarrow{\Omega I}\,.u_0 = \gamma$. Comme $\overrightarrow{\Omega A_k} = u_k$ et $u_k.u_0 = \gamma$, les points A_k appartiennent bien à Π pour tout k entier entre 1 et m.

Pour $1 \leq k \leq \ell \leq m$, on a

$$\overrightarrow{IA_k}\,.\,\overrightarrow{IA_\ell} = (u_k - \gamma u_0).(u_\ell - \gamma u_0) = u_k.u_\ell - 2\gamma^2 + \gamma^2 = u_k.u_\ell - \gamma^2 \ .$$

En particulier $IA_k^2 = 1 - \gamma^2$ et donc les points A_k appartiennent au cercle de Π, de centre I et de rayon $\sqrt{1 - \gamma^2}$.

Question C.2.3 Pour tout couple d'entiers distincts (k, ℓ) entre 1 et m, on a $u_k.u_\ell = \pm\gamma$ d'après A.2.1 et donc, d'après C.2.2, pour tout entier k entre 1 et m, S_k contient tous les points A_ℓ, pour $1 \leq \ell \leq m$.

L'intersection d'une droite et d'un cercle est constituée d'au plus deux points. Or, l'équation (dans le plan Π) $\overrightarrow{IA_k} \,.\, \overrightarrow{IM} = a$ définit une droite perpendiculaire à (IA_k) pour toute valeur du scalaire a. Par conséquent, à k fixé, S_k contient au plus cinq points. Il en résulte $m \leq 5$ et donc $n = m + 1 \leq 6$.

Question C.2.4 Parmi les trois quantités $u_1.u_2$, $u_1.u_3$ et $u_2.u_3$, deux au moins sont de même signe (puisqu'elles ont toutes même valeur absolue). Quitte à renuméroter on peut supposer que ce sont $u_1.u_2$ et $u_1.u_3$ et alors on aura $u_1.u_2 = u_1.u_3$.

Question C.2.5 D'après l'hypothèse faite en C.2.4, A_2 et A_3 appartiennent à la même droite perpendiculaire à (IA_1). Puisque (IA_1) est un diamètre du cercle il en résulte que A_2 et A_3 sont symétriques par rapport à (IA_1) et donc l'angle $(\widehat{A_1IA_3})$ vaut $-\alpha$. Et par conséquent $(\widehat{A_2IA_3})$ vaut -2α.

D'après les calculs faits en C.2.2 les angles $(\widehat{A_kIA_\ell})$ admettent pour cosinus $(\pm\gamma - \gamma^2)/(1-\gamma^2)$, i.e. $\gamma/(\gamma \pm 1)$. C'est donc en particulier le cas pour α et 2α par parité du cosinus.

Question C.2.6.a Puisque $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, on a $2\cos^2(\alpha) - \cos(\alpha) - 1 = 0$ et donc $\cos(\alpha)$ est soit 1, soit $-1/2$, i.e. α est un multiple entier de $2\pi/3$. Il ne peut pas être nul (modulo 2π), sinon A_2 et A_1 seraient confondus. Il en résulte que c'est $\pm 2\pi/3$ modulo 2π. Comme A_2 et A_3 sont symétriques par rapport à (IA_1) le triangle $(A_1A_2A_3)$ est alors équilatéral.

De plus $\gamma/(\gamma \pm 1) = 1 - 1/(1 \pm \gamma)$ et donc on a

$$1 - \frac{1}{1+\gamma} = -\frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad 1 - \frac{1}{1-\gamma} = -\frac{1}{2}$$

i.e.

$$1 + \gamma = \frac{2}{3} \qquad \text{ou} \qquad 1 - \gamma = \frac{2}{3} \,.$$

Comme γ est positif, on a nécessairement $\gamma = 1/3$.

Question C.2.6.b Pour $\gamma = 1/3$, d'après C.2.2, $\overrightarrow{IA_k} \,.\, \overrightarrow{IA_\ell}$ peut donc prendre comme valeurs $2/9$ ou $-4/9$ et, à k fixé, au plus deux indices ℓ donnent une valeur donnée. Pour k dans $\{1,2,3\}$ la valeur $-4/9$ est obtenue pour les deux autres indices parmi $\{1,2,3\}$; par conséquent M donne naissance à la valeur $2/9$ pour A_1, A_2 et A_3.

Comme I est l'isobarycentre de A_1, A_2 et A_3, $\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{IA_2} + \overrightarrow{IA_3} = 0$ et donc

$$0 = \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{IA_i} \,.\, \overrightarrow{IM} = \frac{2}{3}$$

et on obtient une contradiction.

Question C.2.6.c Posons d'_0 la droite d'équation $x = y = z$, la gerbe de droites construite en A.3.1 est constituée de d'_0 et des $\sigma(d'_1)$ pour d'_1 la droite $-x = y = z$ et σ variant dans $R_{d'_0,3}$.

Pour montrer que G est isométrique à cette gerbe, il suffit, d'après C.1.2, de montrer qu'il existe une isométrie envoyant d_0 sur d'_0 et d_1 sur d'_1. Pour cela il suffit, en étudiant la partie linéaire, de trouver un automorphisme orthogonal de E transformant u_0 et u_1 en deux vecteurs unitaires directeurs de d'_0 et d'_1. D'après B.2.2 c'est possible si et seulement si on peut trouver de tels vecteurs ayant un produit scalaire égal à γ, i.e. ici $1/3$. Mais c'est le cas comme on la vu en A.3.1.

Question C.2.7.a On a

$$a + b = \frac{\gamma(1-\gamma) - \gamma(1+\gamma)}{1-\gamma^2} = -2\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} = 2ab \,.$$

Il en résulte, puisque $\{a, b\} = \{\cos(\alpha), \cos(2\alpha)\}$,

$$\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\cos(2\alpha) = \cos(3\alpha) + \cos(\alpha)$$

et donc

$$\cos(2\alpha) = \cos(3\alpha) \,.$$

Question C.2.7.b Il en résulte $2\alpha \equiv \pm 3\alpha\ [2\pi]$ et donc $5\alpha \equiv 0\ [2\pi]$ (l'autre cas étant inclus dans ce dernier). Une fois encore α ne peut être nul modulo 2π et donc S_1 est l'intersection des droites $x = \cos(\alpha)$ et $x = \cos(2\alpha)$ avec le cercle, ainsi que A_1. Dans tous les cas S_1 est donc l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier centré en I et ayant A_1 comme sommet.

On a vu $a + b = 2ab = -2\gamma^2/(1-\gamma^2)$. Or $a + b = \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) = -1/2$ et donc $5\gamma^2 = 1$, soit (par positivité de γ)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$