

Préliminaires

Question 1 On a $\sigma_i = (-1)^i a_i / a_0$ pour tout entier i entre 1 et 4.

Question 2.1 On a

$$\frac{z_2}{z_1} e^{i\theta} \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \theta [2\pi] .$$

Question 2.2 On en déduit

$$\frac{z_2}{z_1} e^{i\theta} \in \mathbf{R}^* \Leftrightarrow (D_1, D_2) = \theta [\pi] .$$

Question 3.1 Si λ est distinct de 1, ϕ est une homothétie de rapport λ et de centre $\left(\frac{\alpha}{1-\lambda}, \frac{\beta}{1-\lambda}\right)$.

Si λ vaut 1 et (α, β) n'est pas nul, ϕ est la translation de vecteur $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$.

Enfin si λ vaut 1 et si α et β sont nuls, ϕ est l'identité.

Question 3.2 Par définition un point M du plan appartient à Γ' si et seulement si $\phi(M)$ appartient à Γ . Comme ϕ est bijective, il en résulte que Γ' est l'image de Γ par ϕ^{-1} .

Partie I

Question I.1 Appelons θ l'angle (D, D_1) . D'après les préliminaires $\frac{z_1}{z_2} e^{-i\theta}$ est un nombre réel non nul. De plus on a

$$(D, D_2) = -(D, D_1) \Leftrightarrow (D, D_2) = -\theta \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} e^{i\theta} \in \mathbf{R}^* .$$

Comme $\frac{z_1}{z_2} e^{-i\theta}$ est un nombre réel non nul, un nombre complexe a est réel (non nul) si et seulement si $a \frac{z_1}{z_2} e^{-i\theta}$ est réel (non nul). Il en résulte

$$(D, D_2) = -(D, D_1) \Leftrightarrow \frac{z_1 z_2}{z^2} \in \mathbf{R}^*$$

Par conséquent D_1 et D_2 sont symétriquement inclinées sur D si et seulement si $\frac{z_1 z_2}{z^2}$ est réel (car il ne peut être nul).

Lorsque D_1 et D_2 sont parallèles, l'angle (D_1, D_2) est nul et donc z_2/z_1 est réel (et non nul). On a encore : un nombre complexe a est réel (non nul) si et seulement si $a z_2/z_1$ est réel (non nul). Il en résulte

$$(D, D_2) = -(D, D_1) \Leftrightarrow \left(\frac{z_2}{z}\right)^2 \in \mathbf{R}^*$$

et cette dernière propriété s'écrit

$$\text{Arg} \left(\left(\frac{z_2}{z} \right)^2 \right) = 0 [\pi]$$

soit

$$2 \text{Arg} \left(\frac{z_2}{z} \right) = 0 [\pi]$$

ou, finalement,

$$\text{Arg} \left(\frac{z_2}{z} \right) = 0 \left[\frac{\pi}{2} \right] .$$

Par conséquent

$$(D, D_2) = -(D, D_1) \Leftrightarrow (D, D_2) = 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

i.e. D_1 et D_2 sont symétriquement inclinées sur D si et seulement si D_2 et D sont perpendiculaires ou parallèles. Comme D_1 est parallèle à D_2 , cette dernière propriété est équivalente à D_1 et D_2 sont soit parallèles, soit perpendiculaires à D . Ce qui est le résultat cherché.

Question I.2.1 C'est le critère de cocyclicité classique : quatre points sont cocycliques ou alignés si et seulement si le birapport de leurs affixes est réel.

En fait, si A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques, alors A_2 et A_3 voient la corde A_1A_4 sous le même angle (modulo π), i.e.

$$(A_4A_3, A_1A_3) = (A_4A_2, A_1A_2) \pmod{\pi}.$$

En termes d'affixes on a donc

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_4} \right) = \operatorname{Arg} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_4} \right) \pmod{\pi}$$

i.e.

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_1} \right) = 0 \pmod{\pi}$$

ce qui signifie que

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_1}$$

est réel.

Question I.2.2 Puisque (A_1A_2) et (A_3A_4) admettent respectivement des vecteurs directeurs d'affixes $z_2 - z_1$ et $z_4 - z_3$, la question I.1 permet d'affirmer que $(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)/z^2$ est réel. Or la quantité

$$\frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}$$

est réelle d'après ce qui précède et est non nulle. En divisant ces deux réels l'un par l'autre on obtient que

$$\frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}{z^2}$$

est réel et donc, d'après la question I.1, (A_1A_3) et (A_2A_4) sont symétriquement inclinées sur D .

Appliquons ce qui précède au quadruplet de points cocycliques (A_1, A_2, A_4, A_3) . Puisque (A_1A_2) et (A_3A_4) sont symétriquement inclinées sur D , il en va de même pour (A_1A_4) et (A_2A_3) . Aussi (A_1A_4) et (A_2A_3) sont symétriquement inclinées sur D .

Question I.3.1 Le théorème de l'angle inscrit dans le cas de la tangente fournit immédiatement le résultat, tout comme dans la question I.2.1. On peut également le trouver ainsi : si A_4 tend vers A_1 en restant sur le cercle, alors la droite (A_1A_4) tend vers T et donc l'angle de droites (A_1A_4, A_2A_4) tend vers (T, A_2A_1) . Par cocyclicité l'angle (A_1A_4, A_2A_4) est toujours égal à (A_1A_3, A_2A_3) et donc

$$(A_1A_3, A_2A_3) = (T, A_2A_1) \pmod{\pi}$$

ce qui fournit, en passant par l'interprétation complexe,

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \right) = \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1 - z_2}{t} \right) \pmod{\pi}$$

ou encore

$$\frac{(z_3 - z_2)t}{(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)} \in \mathbf{R}^*$$

ce qui est l'assertion cherchée.

Question I.3.2 Comme les nombres $\frac{(z_3 - z_2)t}{(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)}$ et $\frac{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}{z^2}$ sont réels, l'un de par la question précédente et l'autre de par la question I.1, leur quotient l'est, i.e.

$$\frac{(z_3 - z_2)t}{z^2}$$

est réel, ce qui signifie, encore par la question I.1, que T et (A_2A_3) sont symétriquement inclinées sur D .

Partie II

Question II.1.1 Si B est distinct de A' , les trois points A , B et A' sont distincts et forment donc un triangle rectangle en B et les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B}$ sont orthogonaux. Cette propriété reste vraie si B et A' sont confondus. De plus le vecteur $\vec{SA}$ est proportionnel à $\vec{AB}$ et donc il est orthogonal à $\vec{A'B}$. Par conséquent

$$\vec{SA}\vec{A'} = \vec{SA}(\vec{SB} + \vec{BA'}) = \vec{SA}\vec{SB} = \overline{SA} \cdot \overline{SB} ||\vec{u}||^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$$

i.e. $p = \vec{SA}\vec{A'}$.

Comme A et A' sont diamétralement opposés, I est leur milieu et donc

$$\vec{SA}\vec{A'} = (\vec{SI} + \vec{IA})(\vec{SI} + \vec{IA'}) = (\vec{SI} + \vec{IA})(\vec{SI} - \vec{IA}) = SI^2 - IA^2 = SI^2 - R^2.$$

Soit $p = SI^2 - R^2$.

Question II.1.2 Puisque Δ est tangente à Γ en M_0 , elle est perpendiculaire à (IM_0) . Par conséquent si S est distinct de M_0 , le triangle (SIM_0) est rectangle en M_0 et le théorème de Pythagore montre que SM_0^2 est égal à $SI^2 - IM_0^2$. Cette formule est encore valable lorsque S est confondu avec M_0 . On a donc $SM_0^2 = SI^2 - R^2$, ce qui est la formule de $\Gamma(S)$ que l'on vient de trouver.

Question II.2.1 Puisque $D = (Ox)$ est un axe de symétrie de Γ , toute équation cartésienne définissant Γ doit être un polynôme impair en y . Comme Γ n'est pas dégénérée une telle équation doit nécessairement être de degré 2 en y (sinon y n'apparaîtrait pas dans l'équation et on aurait affaire à une droite verticale ou à un couple de droites verticales). Quitte à multiplier par un scalaire non nul, on peut donc se donner Γ par une équation cartésienne $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme de degré 2 à coefficients réels, unitaire et impair en y , i.e. de la forme

$$P(X, Y) = Y^2 + (u_0X^2 + u_1X + u_2).$$

Si u_0 est strictement négatif, on a affaire à une hyperbole. Comme son axe focal est l'axe des abscisses, sa forme normale est donc $(-u_0)X^2 - Y^2 = 1$ et donc son excentricité est $\sqrt{1 + (-u_0)}$. Si u_0 est nul, Γ est une parabole et la formule $e = \sqrt{1 + (-u_0)}$ est encore valable. Enfin si u_0 est strictement positif, il ne peut être égal à 1 sinon Γ serait un cercle, ni strictement supérieur à 1 sinon son axe focal serait parallèle à l'axe des ordonnées. Par conséquent la forme normale de l'ellipse Γ est $u_0X^2 + Y^2 = 1$ et son excentricité est $\sqrt{1 - u_0}$. Dans tous les cas on a donc montré que u_0 n'est rien d'autre que $1 - e^2$, ce qui achève de démontrer l'existence de f .

On peut aussi voir les choses plus géométriquement. On se donne Γ par foyer et directrice. Notons F et Δ ces données. Comme D est l'axe focal de Γ , F appartient à D . Notons $(\phi, 0)$ ses coordonnées. Comme Δ est perpendiculaire à D , elle est parallèle à l'axe des ordonnées. Notons $x = a$ une équation la définissant. Soit e l'excentricité de Γ , M un point du plan et H son projeté orthogonal sur Δ . Si M admet (x, y) comme coordonnées, celles de H sont (a, y) et on a

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = e \\ &\Leftrightarrow MF = e.MH \\ &\Leftrightarrow MF^2 = e^2.MH^2 \\ &\Leftrightarrow (x - \phi)^2 + y^2 = e^2(x - a)^2 \\ &\Leftrightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2(a - \phi)x + \phi^2 - a^2 = 0. \end{aligned}$$

Ce qui est bien une équation de la forme recherchée.

Question II.2.2 Puisque l'angle de droite (D, Δ) vaut θ , c'est que l'angle de vecteurs $(\vec{i}, \vec{u})$ vaut θ modulo π et donc $\vec{u}$ admet pour coordonnées $\pm(\cos \theta, \sin \theta)$. Par conséquent

$$\vec{OM} = \vec{OS} + \vec{SM} = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j}) + \lambda\vec{u} = (x_0 \pm \lambda \cos \theta)\vec{i} + (y_0 \pm \lambda \sin \theta)\vec{j}$$

avec un même choix de signe dans les deux alternatives. Les coordonnées de M sont donc $(x_0 \pm \lambda \cos \theta, y_0 \pm \lambda \sin \theta)$, avec un même choix de signe dans les deux alternatives.

Il en résulte

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow f(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x_0 \pm \lambda \cos \theta, y_0 \pm \lambda \sin \theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow ((1 - e^2) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \lambda^2 \pm (2(1 - e^2)x_0 \cos \theta + 2y_0 \sin \theta + u_1 \cos \theta) \lambda + f(x_0, y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - e^2 \cos \theta) \lambda^2 \pm (2(1 - e^2)x_0 \cos \theta + 2y_0 \sin \theta + u_1 \cos \theta) \lambda + f(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}$$

et l'assertion en résulte en prenant

$$\begin{cases} \beta &= \pm (2(1 - e^2)x_0 \cos \theta + 2y_0 \sin \theta + u_1 \cos \theta) \\ \text{et} \\ \gamma &= f(x_0, y_0) = (1 - e^2)x_0^2 + y_0^2 + u_1x_0 + u_2. \end{cases}$$

Question II.2.3 Si Δ coupe Γ en deux points distincts c'est que l'équation précédente admet au moins deux racines : $\overline{SA}$ et $\overline{SB}$. Par conséquent le polynôme $(1 - e^2 \cos \theta)X^2 + \beta X + \gamma$ est soit nul, soit de degré exactement 2. Dans le premier cas p est nul. Dans le second cas, d'après les relations entre coefficients et racines, on a $(1 - e^2 \cos \theta)\overline{SA}.\overline{SB} = \gamma$. Cette formule est encore valable dans le premier cas et on a donc

$$(1 - e^2 \cos \theta)\overline{SA}.\overline{SB} = f(x_0, y_0) = (1 - e^2)x_0^2 + y_0^2 + u_1x_0 + u_2.$$

Question II.2.4 Si Γ est une ellipse, e est strictement inférieur à 1 et la quantité $1 - e^2 \cos^2 \theta$ n'est jamais nulle. Si Γ est une parabole, e vaut 1 et $1 - e^2 \cos^2 \theta$ n'est nul que si θ est nul modulo π , i.e. Δ parallèle à D . Mais dans ce cas Δ ne peut être tangente à Γ . Enfin si Γ est une hyperbole, $1 - e^2 \cos^2 \theta$ est nul lorsque θ vaut $\pm \arccos(\frac{1}{e})$, i.e. lorsque Δ est parallèle à l'une des asymptotes de Γ . Mais dans ce cas Δ ne peut être tangente à Γ .

Par conséquent si Δ est tangente à Γ , $1 - e^2 \cos^2 \theta$ ne peut être nul.

L'équation $(1 - e^2 \cos \theta)X^2 + \beta X + \gamma = 0$ ayant une seule racine réelle, c'est nécessairement une racine double puisque c'est une équation de degré exactement 2 dans le corps des réels. C'est donc que $\overline{SM_0}$ est racine double de cette équation et on a, d'après les relations entre coefficients et racines,

$$(1 - e^2 \cos \theta)\overline{SM_0}^2 = \gamma = \Gamma(S).$$

Partie III

Question III.1 Soit S un point du plan et r un réel, on a $\Gamma(S) = SI^2 - R^2$ et donc Γ_r est formé des points S du plan tels que $SI^2 = R^2 + r$. Par conséquent Γ_r est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{R^2 + r}$ si $R^2 + r$ est strictement positif, le point I si $R^2 + r$ est nul et est vide si $R^2 + r$ est strictement négatif.

Il résulte de cette étude que U est l'intervalle $]-\infty; -R^2[$, V le singleton $\{-R^2\}$ et W l'intervalle $]-R^2; +\infty[$. Qui plus est lorsque r appartient à W , Γ_r est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{R^2 + r}$.

Question III.2.1 Soit S un point du plan de coordonnées (x, y) et f une équation de Γ comme dans la question II.2. D'après la question II.2.3, $\Gamma(S)$ est donné par $f(x, y)$ et donc $\Gamma(S)$ est nul si et seulement si S appartient à Γ , i.e. $\Gamma_0 = \Gamma$.

Comme Γ n'est pas dégénérée, elle contient au moins deux points et donc 0 appartient à W .

Question III.2.2 L'équation normalisée de Γ est donc $(1 - e^2)x^2 + y^2 - b^2 = 0$ et est obtenue en multipliant la forme normale par b^2 .

Soit S un point du plan de coordonnées (x, y) et r un réel, S appartient à Γ_r si et seulement si

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = b^2 + r.$$

Comme $1 - e^2$ est strictement positif, on a affaire à une ellipse si $b^2 + r$ est strictement positif, un singleton réduit à l'origine si $b^2 + r$ est nul et à l'ensemble vide si $b^2 + r$ est strictement négatif. Il en résulte que U est l'intervalle $] -\infty; -b^2[$, V le singleton $\{-b^2\}$ et W l'intervalle $] -b^2; +\infty[$.

Dans ce dernier cas on a, pour S un point du plan de coordonnées (x, y) ,

$$S \in \Gamma_r \Leftrightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 = b^2 + r = b^2 \left(1 + \frac{r}{b^2}\right)$$

et donc

$$S \in \Gamma_r \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{1 + \frac{r}{b^2}}}, \frac{y}{\sqrt{1 + \frac{r}{b^2}}} \right) \in \Gamma.$$

D'après les préliminaires (3.2), Γ_r est donc l'image de Γ par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{1 + \frac{r}{b^2}}$.

Question III.2.3 L'équation normalisée de Γ est $y^2 - 2ax = 0$ et donc, si S est un point du plan de coordonnées (x, y) et r un réel, S appartient à Γ_r si et seulement si

$$y^2 = 2a \left(x + \frac{r}{a} \right)$$

et Γ_r est donc une parabole d'axe focal D , de paramètre a et de sommet de coordonnées $(-r/a, 0)$. Il en résulte immédiatement que U et V sont vides, W est $\mathbf{R}$ et pour tout r Γ_r est l'image de Γ par la translation de vecteur $-r/a\vec{e}$.

Question III.2.4.a L'équation normalisée de Γ est donc $(1 - e^2)x^2 + y^2 + b^2 = 0$ et est obtenue en multipliant la forme normale par $-b^2$.

Il en résulte immédiatement que Γ_{b^2} admet pour équation $y^2 = (e^2 - 1)x^2$ et est donc formée des deux droites $y = \pm\sqrt{e^2 - 1}x$ qui ne sont rien d'autre que les asymptotes de Γ .

Question III.2.4.b Γ_{2b^2} admet pour équation $y^2 - (e^2 - 1)x^2 = b^2$ ou encore

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Γ_{2b^2} est donc la symétrique de Γ par l'une des deux symétries d'axe l'une des deux asymptotes de Γ parallèlement à l'autre asymptote.

Question III.2.4.c Soit r un réel distinct de b^2 ; Γ_r admet comme équation $(1 - e^2)x^2 + y^2 = r - b^2$ soit encore

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{r}{b^2}.$$

Si r est strictement inférieur à b^2 , c'est donc l'image de Γ par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{1 - \frac{r}{b^2}}$. Si maintenant r est strictement supérieur à b^2 , on écrit cette équation sous la forme

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{r}{b^2} - 1$$

et on reconnaît l'image de Γ' par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{\frac{r}{b^2} - 1}$.

Partie IV

Question IV.1.1 Comme les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 sont distincts les droites (A_1A_2) et (A_3A_4) coupent Γ exactement en $\{A_1, A_2\}$ et $\{A_3, A_4\}$ respectivement. Elles ne peuvent donc se rencontrer sur Γ et a fortiori S est distinct des quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 .

Question IV.1.2 Si les quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques, par définition de la puissance de S par rapport au cercle qu'ils définissent, les quantités $\overline{SA_1 \cdot SA_2}$ et $\overline{SA_3 \cdot SA_4}$ sont toutes deux égales à cette puissance.

Réciproquement, comme les trois points A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés (sinon S serait égal à A_3), ils définissent un unique cercle (C) . La puissance de S par rapport à ce cercle est $\overline{SA_1 \cdot SA_2}$. La droite $(SA_3) = (A_3A_4)$ coupe ce cercle en A_3 et un autre point B éventuellement confondu avec A_3 et alors $\overline{SA_3 \cdot SB}$ est la puissance de S par rapport à (C) . Comme $\overline{SA_3}$ est non nul, il en résulte

$$\overline{SB} = \frac{\overline{SA_3 \cdot SB}}{\overline{SA_3}} = \frac{\overline{SA_1 \cdot SA_2}}{\overline{SA_3}} = \overline{SA_4}$$

et donc $B = A_4$. Par conséquent A_4 appartient à (C) et A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques.

Question IV.1.3 Soit θ et θ' les angles (D, A_1A_2) et (D, A_3A_4) et e l'excentricité de Γ , la puissance de S par rapport à Γ vaut

$$\Gamma(S) = (1 - e^2 \cos^2 \theta) \overline{SA_1 \cdot SA_2} = (1 - e^2 \cos^2 \theta') \overline{SA_3 \cdot SA_4}.$$

Comme S n'appartient pas à Γ , cette puissance n'est pas nulle et on a donc

$$1 - e^2 \cos^2 \theta = 1 - e^2 \cos^2 \theta' \Leftrightarrow \overline{SA_1 \cdot SA_2} = \overline{SA_3 \cdot SA_4}$$

soit

$$\theta = \pm \theta' [\pi] \Leftrightarrow \overline{SA_1 \cdot SA_2} = \overline{SA_3 \cdot SA_4}.$$

Or θ et θ' sont distincts modulo π puisque les droites (A_1A_2) et (A_3A_4) ne sont pas parallèles. La propriété de gauche est donc exactement le fait que (A_1A_2) et (A_3A_4) sont symétriquement inclinées sur D . La question précédente permet donc de conclure.

Question IV.2.1 Remarquons qu'étant donné quatre points l'une au points des trois paires de droites formées par ces quatre points sont sécantes. En effet si deux de ces paires sont parallèles, c'est que l'on a affaire à un parallélogramme et la dernière paire de droites est formée des deux diagonales de ce parallélogramme.

Or la question I.2 montre que ces paires de droites sont simultanément symétriquement inclinées sur D . L'assertion IV.1.3 est donc encore valable dans le cas où les droites (A_1A_2) et (A_3A_4) sont parallèles.

Question IV.2.2 D'après la question I.1 les droites (A_1A_2) et (A_3A_4) sont symétriquement inclinées sur D si et seulement si elles sont soit parallèles soit perpendiculaires à D . L'assertion en résulte dans le second cas.

Remarquons que si Γ est une parabole une droite parallèle à D ne rencontre Γ qu'en un point et donc dans le cas de la parabole le premier cas ne peut se produire. Dans les autres cas (A_1A_2) et (A_3A_4) sont parallèles à D si et seulement si elles sont perpendiculaires au second axe de symétrie de Γ . L'assertion en résulte.

Question IV.3.1 S ne peut appartenir à Γ puisque (A_2A_3) ne rencontre Γ qu'en deux points et T_1 en un seul point. Par conséquent S est distinct de A_1, A_2 et A_3 .

Question IV.3.2 Si T_1 est tangente à C en A_1 , alors la puissance de S par rapport à C est simultanément SA_1^2 et $\overline{SA_2 \cdot SA_3}$ d'après la question II.1 et, par conséquent, ces deux quantités sont égales.

Réciproquement si ces deux quantités sont égales la puissance de S par rapport à C est $\overline{SA_2 \cdot SA_3}$ et donc aussi SA_1^2 . Si T_1 coupait C en deux points distincts A_1 et B , on aurait donc $\overline{SA_1 \cdot SB} = SA_1^2$ (en prenant les mesures algébriques sur T_1 par rapport à un vecteur unitaire) et donc B serait A_1 . Cette contradiction assure que T_1 ne rencontre C qu'en A_1 , i.e. que T_1 est tangente à C en A_1 . D'où l'équivalence recherchée.

Question IV.3.3 Soit θ et θ' les angles (D, T_1) et (D, A_2A_3) et e l'excentricité de Γ , la puissance de S par rapport à Γ vaut

$$\Gamma(S) = (1 - e^2 \cos^2 \theta)SA_1^2 = (1 - e^2 \cos^2 \theta')\overline{SA_2}.\overline{SA_3}.$$

Comme S n'appartient pas à Γ , cette puissance n'est pas nulle et on a donc

$$1 - e^2 \cos^2 \theta = 1 - e^2 \cos^2 \theta' \Leftrightarrow SA_1^2 = \overline{SA_2}.\overline{SA_3}$$

soit

$$\theta = \pm \theta' [\pi] \Leftrightarrow SA_1^2 = \overline{SA_2}.\overline{SA_3}.$$

Or θ et θ' sont distincts modulo π puisque les droites T_1 et (A_2A_3) ne sont pas parallèles. La propriété de gauche est donc exactement le fait que T_1 et (A_2A_3) sont symétriquement inclinées sur D . La question précédente permet donc de conclure.

Question IV.4.1 S ne pouvant pas appartenir à Γ puisque T_1 et T_2 rencontrent chacune Γ en un unique point, S est distinct de A_1 et A_2 .

Question IV.4.2 Soit C le cercle tangent à T_1 en A_1 et passant par A_2 . S'il est tangent à T_2 en A_2 alors la puissance de S par rapport à C vaut simultanément SA_1^2 et SA_2^2 et donc $SA_1 = SA_2$.

Si $SA_1 = SA_2$, alors la puissance de S par rapport à C vaut SA_2^2 et donc la droite (SA_2) ne rencontre Γ qu'en A_2 , i.e. est tangente à C en A_2 . Ceci montre l'équivalence entre les points (i) et (ii).

Soit maintenant θ et θ' les angles (D, T_1) et (D, T_2) et e l'excentricité de Γ , la puissance de S par rapport à Γ vaut

$$\Gamma(S) = (1 - e^2 \cos^2 \theta)SA_1^2 = (1 - e^2 \cos^2 \theta')SA_2^2$$

et, comme S n'appartient pas à Γ , on a

$$\theta = \pm \theta' [\pi] \Leftrightarrow SA_1^2 = SA_2^2 \Leftrightarrow SA_1 = SA_2,$$

ce qui montre que (ii) et (iii) sont équivalentes et achève de prouver l'assertion.

Question IV.4.3.a Puisque D_1 et D'_1 sont perpendiculaires, la composée $\phi_1 \circ \phi'_1$ est une symétrie centrale. Il en résulte que ϕ est la symétrie centrale de centre S .

Question IV.4.3.b Puisque D_1 et D sont parallèles, T_1 et T_2 sont symétriquement inclinées sur D_1 et donc, puisque toutes ces droites passent par S , D_1 est la bissectrice de T_1 et T_2 . Par conséquent $\phi(T_1) = T_2$.

Par conséquent $\phi_1(A_1)$ appartient à T_2 . Comme ϕ_1 est une isométrie, la distance de A_2 à S est préservée (puisque S est un point fixe de ϕ_1). Or les deux seuls points de T_2 à la distance SA_2 de S sont évidemment A_2 et son image par la symétrie centrale de centre S , i.e. $\phi(A_2)$.

Question IV.4.3.c Si A_2 est distinct de $\phi_1(A_1)$, alors $\phi_1(A_1) = \phi(A_2) = \phi_1 \circ \phi'_1(A_2)$ et donc, par inversibilité de ϕ_1 , $A_1 = \phi'_1(A_2)$ et donc $A_2 = \phi'_1(A_1)$.

Par conséquent A_2 appartient à $\{\phi_1(A_1), \phi'_1(A_1)\}$.

Question IV.4.4 Si l'une des propriétés de la question IV.4.2 est vraie alors, d'après la question précédente la droite (A_1A_2) est fixée soit par ϕ_1 , soit par ϕ'_1 , elle est donc parallèle ou perpendiculaire à D_1 (et D'_1), donc à D . Si elle est parallèle à D alors Γ n'est pas une parabole et (A_1A_2) est donc perpendiculaire au second axe de symétrie de Γ .

Réciproquement si (A_1A_2) est perpendiculaire à un axe de symétrie de Γ , la symétrie par rapport à cet axe fixe à la fois Γ et la droite (A_1A_2) et ne fixe pas point par point cette droite. Il en résulte que A_1 et A_2 sont échangés par cette symétrie, et donc aussi T_1 et T_2 (puisque Γ est invariante). Par conséquent cet axe de symétrie est une bissectrice de T_1 et T_2 . Donc D_1 est aussi une bissectrice de T_1 et T_2 . Ces deux droites sont donc symétriquement inclinées sur D_1 et aussi sur D . L'équivalence en résulte.

Partie V

Question V.1 Soit u dans U , $M = M(u)$ de coordonnées (x, y) , on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{Re}(u)^2 + \operatorname{Im}(u)^2 = |u|^2 = 1$$

et donc M appartient à Γ . De plus $u = x/a + iy/b$ et donc l'application $u \rightarrow M(u)$ est injective. Enfin, si $M = (x, y)$ est un point de Γ la formule précédente montre que $M = M(u)$ pour $u = x/a + iy/b$ et on vérifie que u appartient bien à U :

$$|u|^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En conséquence $u \rightarrow M(u)$ réalise une bijection entre U et l'ellipse Γ .

Question V.2.1 Soit u dans U , on a

$$\begin{aligned} M(u) \in C \cap \Gamma &\Leftrightarrow M(u) \in C \\ &\Leftrightarrow \left(a \frac{u + \bar{u}}{2}\right)^2 + \left(b \frac{u - \bar{u}}{2i}\right)^2 - \alpha a(u + \bar{u}) + i\beta b(u - \bar{u}) + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2(u^2 + 1)^2 - b^2(u^2 - 1)^2 - 4\alpha a u(u^2 + 1) + 4i\beta b u(u^2 - 1) + 4\gamma u^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow c^2 u^4 + 4(-\alpha a + i\beta b)u^3 + 2(a^2 + b^2 + 2\gamma)u^2 - 4(\alpha a + i\beta b)u + c^2 = 0. \end{aligned}$$

Le polynôme

$$Q_C(X) = c^2 X^4 + 4(-\alpha a + i\beta b)X^3 + 2(a^2 + b^2 + 2\gamma)X^2 - 4(\alpha a + i\beta b)X + c^2$$

répond donc à la question.

Question V.2.2 Avec les notations du texte u_1, u_2, u_3 et u_4 sont racines de Q_C qui est un polynôme de degré exactement 4 puisque Γ n'est pas un cercle. D'après les préliminaires (1), il en résulte $u_1 u_2 u_3 u_4 = c^2/c^2 = 1$.

Question V.3 Soit $M_1 = M(u_1)$, $M_2 = M(u_2)$ et $M_3 = M(u_3)$ trois points distincts de Γ . Comme Γ est non dégénérée ces trois points ne sont pas alignés et définissent donc un unique cercle C et un point $M_4 = M(u_4)$ de Γ est cocyclique avec M_1, M_2 et M_3 si et seulement s'il appartient à C et donc si et seulement si $Q_C(u_4) = 0$.

Mais d'après les relations entre coefficients et racines v est racine de Q_C si et seulement si $u_1 u_2 u_3 v = 1$ (l'équivalence provenant du fait que u_1, u_2 et u_3 sont non nuls). Par conséquent M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques si et seulement si $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$.

Question V.4.1 Puisque c^2 est non nul, Q_C est toujours de degré 4 et n'a pas de racine nulle. Par conséquent u_0 est racine d'ordre au moins 3 de Q_C si et seulement si les racines de Q_C sont u_0 avec la multiplicité 3 et u_0^{-3} (dans le cas où $u_0^4 = 1$ cela signifie que u_0 est de multiplicité 4). Ceci est donc équivalent aux relations suivantes :

$$\begin{cases} c^2(3u_0 + u_0^{-3}) &= 4(\alpha a - i\beta b) \\ 3c^2(u_0^2 + u_0^{-2}) &= 2(a^2 + b^2 + 2\gamma) \\ c^2(3u_0^{-1} + u_0^3) &= 4(\alpha a + i\beta b) \end{cases}$$

Ceci est donc un système linéaire en (α, β, γ) de discriminant $128iab$. L'existence et l'unicité de C résulte.

Question V.4.2 Le centre de C étant de coordonnées (α, β) , Ω_0 est de coordonnées

$$\left(c^2 \frac{u_0^3 + 3u_0 + 3u_0^{-1} + u_0^{-3}}{8a}, c^2 \frac{u_0^3 - 3u_0 + 3u_0^{-1} - u_0^{-3}}{8ib} \right)$$

soit

$$\left(\frac{c^2}{a} \operatorname{Re}(u_0)^3, -\frac{c^2}{b} \operatorname{Im}(u_0)^3 \right).$$

On en déduit

$$\Omega_0 = \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \left(\frac{u_0 + \bar{u}_0}{2} \right)^3, \frac{a^2 - b^2}{b} \left(\frac{u_0 - \bar{u}_0}{2i} \right)^3 \right).$$

Question V.4.3 La tangente en $M_0 = (x_0, y_0)$ à Γ admet comme équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

et celle à C admet quant à elle l'équation

$$x(x_0 - \alpha) + y(y_0 - \beta) = x_0(x_0 - \alpha) + y_0(y_0 - \beta)$$

(les termes de degré 1 sont à chaque fois obtenus en dérivant l'équation de départ et le terme constant en imposant que la droite passe par (x_0, y_0)). Elles sont donc identiques si et seulement si ces deux équations sont proportionnelles. Comme ces deux droites passent par (x_0, y_0) il suffit de vérifier que les parties du premier degré sont proportionnelles (d'ailleurs on vérifie que le terme constant est toujours égal à x_0 fois le terme en x plus y_0 fois le terme en y).

Or

$$x_0 - \alpha = x_0 - \frac{c^2}{a} \left(\frac{x_0}{a} \right)^3 = \frac{x_0}{a^2} \left(a^2 - \frac{c^2 x_0^2}{a^2} \right)$$

et

$$y_0 - \beta = \frac{y_0}{b^2} \left(b^2 + \frac{c^2 y_0^2}{b^2} \right).$$

Il s'agit donc de vérifier

$$a^2 - \frac{c^2 x_0^2}{a^2} = b^2 + \frac{c^2 y_0^2}{b^2}$$

soit

$$a^2 - b^2 = c^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right)$$

ce qui résulte immédiatement de la définition de c et du fait que M_0 appartient à l'ellipse Γ . Par conséquent Γ et C ont même tangente en M_0 .

Question V.4.4 Si u_0 est de multiplicité exactement 3 dans Q_C alors la dernière racine u_0^{-3} appartient à U et donc C_0 et Γ se coupent en deux points distincts. Par conséquent C_0 et Γ ne se rencontrent qu'en M_0 si et seulement si u_0 est racine quadruple de Q_C , i.e. $u_0^4 = 1$ ou encore M_0 est l'un des sommets de l'ellipse.

Question V.4.5 D'après ce qui précède C_0 et Γ se rencontrent en M_0 et $M_1 = M(u_0^{-3})$. Notons (x_0, y_0) les coordonnées de M_0 . Aucune d'elles n'est nulle et donc la droite T_0 admet $(-a^2 y_0, b^2 x_0)$ comme vecteur directeur. De plus on a $u_0 = x_0/a + iy_0/b$ et donc $u_0^{-3} = \bar{u}_0^3$ et $M(u_0^{-3})$ admet comme affixe

$$a \left(\frac{x_0^3}{a^3} - 3 \frac{x_0 y_0^2}{ab^2} \right) + ib \left(-3 \frac{x_0^2 y_0}{a^2 b} + \frac{y_0^3}{b^3} \right)$$

et la droite $(M_0 M_1)$ admet comme vecteur directeur

$$\left(x_0 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} + 3 \frac{y_0^2}{b^2} \right), y_0 \left(1 + 3 \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right) \right)$$

ou, en simplifiant,

$$\left(\frac{4x_0y_0^2}{b^2}, \frac{4x_0^2y_0}{a^2} \right)$$

ce qui revient à

$$(a^2y_0, b^2x_0)$$

et (M_0M_1) a bien une pente opposée à celle de T_0 , i.e. (M_0M_1) et (T_0) sont symétriquement inclinées sur D (qui est l'axe des abscisses).

Question V.4.6 Soit $M = M(u)$ un point comme dans l'énoncé. On a donc $u_0 = u^{-3}$. Ceci est possible pour exactement 3 valeurs de u dans U qui diffèrent l'une de l'autre par une racine cubique de l'unité. Par conséquent E est de cardinal 3.

Si u_0 est distinct de u_0^{-3} , i.e. si M_0 n'est pas l'un des sommets de l'ellipse, E est formé de trois points distincts de M_0 . Notons-les $M(u)$, $M(ju)$ et $M(j^2u)$ pour j une racine cubique de l'unité non triviale. Comme on a $u \cdot ju \cdot j^2u \cdot u_0 = u^3u_0 = 1$, la question V.3 prouve que les quatre points de $E \cup \{M_0\}$ sont cocycliques.

Si par contre M_0 est un sommet de l'ellipse, E est formé des trois points M_0 , $M(ju_0)$ et $M(j^2u_0)$. Ces trois points ne sont pas alignés puisqu'ils appartiennent à une conique non dégénérée; ils sont donc cocycliques.