Question I.1.1 Remarquons que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2}$$

et

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \leq |\sqrt{x}-\sqrt{y}|.|\sqrt{x}+\sqrt{y}| = |x-y| \ .$$

Il en résulte que

$$0 \leq \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{|x-y|}{2}$$

et que les inégalités sont en fait strictes si x et y sont différents.

On a également

$$\min(x,y) = \left(\min(\sqrt{x},\sqrt{y})\right)^2 \leq \min(\sqrt{x},\sqrt{y})\max(\sqrt{x},\sqrt{y}) = \sqrt{xy}$$

avec égalité si et seulement si $x = y$ ou bien $xy = 0$. De même

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\min(x,y)+\max(x,y)}{2} \leq \max(x,y)$$

avec égalité si et seulement si $x = y$. En conclusion

$$0 \leq \min(x,y) \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \max(x,y)$$

avec égalité partout si $x = y$, égalité seulement dans les deux premières inégalités si $xy = 0$ et nulle part dans les autres cas.

Il en résulte que si a_n et b_n sont définis et si $0 \leq b_n < a_n$ alors

$$\begin{cases} 0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n \\ a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{cases}$$

avec inégalités strictes si $b_n \neq 0$.

Soit donc (H_n) la propriété : a_n et b_n existent et $0 \leq b_n < a_n$.

(H_1) est vraie puisque $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = \sqrt{ab}$ sont bien définis et $0 \leq \min(a,b) \leq b_1 < a_1 < \max(a,b)$.

Si (H_n) est vraie alors $0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ et donc (H_{n+1}) est vraie. Il en résulte que (H_n) est vraie pour tout entier n supérieur à 1 et donc que les inégalités de l'énoncé sont vraies pour tout tel n.

Si maintenant $a = b$, alors pour tout entier n on a $a_n = b_n = a = b$. Les inégalités deviennent donc $0 \leq b_n = b_{n+1} = a_{n+1} = a_n$ et $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = 0$.

Question I.1.2 On en déduit que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est croissante. Comme, pour $n \geq 1$, on a $0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a_1 - b_1}{2^{n-1}}$, il apert que $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Au final les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes : elles convergent et ont une limite commune.

Question I.2 Si on remplace a et b par a_n et b_n, les suites deviennent $(a_{n+m})_{m\in\mathbb{N}}$ et $(b_{n+m})_{m\in\mathbb{N}}$. Leur limite commune est donc également celle de $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$, i.e. $M(a_n,b_n) = M(a,b)$.

Si on échange le rôle de a et b, les termes a_1 et b_1 ne changent pas puisqu'ils sont symétriques en a et b. On peut donc écrire $M(b,a) = M(a_1,b_1) = M(a,b)$ en utilisant deux fois l'égalité précédente, pour $n = 1$.

Si on multiplie a et b par un scalaire (positif), le terme général des deux suites est multiplié par ce scalaire et donc $M(\lambda a,\lambda b) = \lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n = \lambda M(a,b)$.

Enfin si $a \neq 0$, on a $M(a,b) = aM(1,b/a) = af(b/a)$ en utilisant l'égalité précédente avec $\lambda = a$.

Question I.3.1 Soit (H_n) la propriété : u_n et v_n sont continues de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.

(H_0) est vraie puisque $u_0 = 1$ et $v_0 = Id$.

Si (H_n) est vraie, les opérations algébriques (somme et produit) préservant la continuité et $x \to \sqrt{x}$ étant continue (de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même), u_{n+1} et v_{n+1} sont aussi continues.

Il en résulte que, pour tout entier n, u_n et v_n sont continues.

Question I.3.2 Puisque les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes

$$\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad 0 \leq v_m \leq f \leq u_n$$

et donc

$$0 \leq u_n - f \leq u_n - v_n \leq \frac{u_1 - v_1}{2^{n-1}} \leq \frac{|1-x|}{2^n}$$

d'après les remarques du I.1.1.

Question I.3.3 Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$; pour $h \geq -x$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &\leq |u_n(x+h) - u_n(x)| + |u_n(x+h) - f(x+h)| + |u_n(x) - f(x)| \\
&\leq |u_n(x+h) - u_n(x)| + 2^{-n}(|1-x-h| + |1-x|) \\
&\leq |u_n(x+h) - u_n(x)| + 2^{-n}(2|1-x| + |h|)
\end{aligned}$$

Soit donc n tel que $2^{-n}(2|1-x|+1) \leq \frac{\epsilon}{2}$ et α tel que $0 \leq \alpha \leq 1$ et (par continuité de u_n en x) tel que $\forall h \in]-\alpha;\alpha[\cap[-x;+\infty[$ $|u_n(x+h) - u_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. On a alors

$$(\forall y \in \mathbb{R}_+) \quad |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

et donc f est continue en x. Il en résulte que f est continue sur tout $\mathbb{R}_+$.

Question I.4 Par la propriété déjà citée des suites adjacentes, on a $v_1 \leq f \leq u_1$, autrement dit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2} \ .$$

En particulier on a $f(1) = 1$ et, pour tout x distinct de 1, $\frac{f(x)-1}{x-1}$ est compris entre

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

et

$$\frac{\frac{1+x}{2} - 1}{x-1} = \frac{1}{2} \ .$$

(L'ordre entre ces deux quantités étant dépendant de la position de x par rapport à 1.)

Comme $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$, on a

$$\lim_{x\to 1, x\neq 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

i.e. f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Question I.5.1 Si $x = 0$, on a $v_n(x) = 0$ pour tout entier n et donc $f(0) = \lim_{n\to\infty} v_n(0) = 0$. De plus, pour $x > 0$ on a

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et donc f n'est pas dérivable en 0 mais y admet une tangente verticale.

Question I.5.2 On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = M(1,x) = M(x,1) = xM(1,1/x) = xf(1/x) \ .$$

Question I.5.3 Comme $f(x) \geq \sqrt{x}$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f(1/x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

et donc f admet une branche parabolique de direction (Ox).

Question I.6 Soit (H_n) la propriété : u_n et v_n sont croissantes.
(H_0) est vraie car $u_0 = 1$ et $v_0 = Id$.
Si (H_n) est vraie, $x \to \sqrt{x}$, la somme et le produit de fonctions croissantes l'étant également, u_{n+1} et v_{n+1} sont croissantes. Il en résulte que, pour tout entier n, u_n et v_n sont croissantes.
En particulier

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x \leq y \Rightarrow u_n(x) \leq u_n(y)$$

et donc, en passant à la limite sur n,

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

i.e. f est croissante.

Question I.7.1 Il suffit de programmer le calcul de ces suites en testant si $u_n - v_n \leq 10^{-5}$. On trouve

0.01	0.26216	0.1	0.42504	0.2	0.52080	0.4	0.66579	0.6	0.78724
0.8	0.89721	2	1.45679	3	1.86361	10	4.25040	100	26.21668

A noter qu'on obtient les valeurs en 0.1 et 0.01 grâce aux valeurs en 10 et 100 respectivement (mais pas le contraire).

Question I.7.2

Question II.1.1 L'intégrand étant continu, il est localement intégrable. Les intégrales ne sont donc impropres qu'aux bornes infinies. Comme on a

$$\frac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} \sim \frac{1}{t^2}$$

I et J sont bien convergentes par le théorème de comparaison.

De plus

$$\begin{aligned} J(a,b) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} + \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}} + \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} = 2I(a,b) \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $u = -t$.

Question II.1.2 L'application $\theta \to b\tan(\theta)$ étant un C^1-difféomorphisme de $[0;\pi/2[$ sur $[0;+\infty[$, on peut écrire

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{bd\theta}{cos^2(\theta)\sqrt{(b^2\tan^2(\theta)+a^2)b^2(\tan^2(\theta)+1)}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(b^2\sin^2(\theta)+a^2\cos^2(\theta))(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)}} \end{aligned}$$

et donc

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{cos^2(\theta)+x^2\sin^2(\theta)}} .$$

Comme l'intégrand est continu en les deux variables x et θ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0;\pi/2]$ et de classe C^1 en x (et même de classe C^∞) de dérivée partielle en x égale à

$$\frac{x}{(\cos^2(\theta)+x^2\sin^(\theta))^{3/2}} ,$$

qui est encore continu (donc intégrable) sur $[0;\pi/2]$ (puisqu'on a écarté le cas $x=0$), g est de classe C^1, de dérivée obtenue par dérivation sous le signe somme.

Question II.1.3 L'intégrand étant symétrique en a et b, on a $I(a,b) = I(b,a)$. Comme

$$\sqrt{(\lambda a)^2\cos^2 + (\lambda b)^2\sin^2} = \lambda\sqrt{a^2\cos^2 + b^2\sin^2}$$

on a $I(\lambda a,\lambda b) = \lambda^{-1}I(a,b)$.

D'où $I(a,b) = a^{-1}I(1,b/a) = a^{-1}g(b/a)$.

Question II.2.1 $t \to \frac{1}{2}(t - ab/t)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\begin{aligned} J(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+(a+b)^2/4)(s^2+ab)}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{ab}{t^2})dt}{\sqrt{\frac{t^2-2ab+\frac{a^2b^2}{t^2}+(a+b)^2}{4}\,\frac{t^2+\frac{a^2b^2}{t^2}-2ab}{4}}} \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{(t+\frac{ab}{t})\frac{1}{t}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{(t^4+(a^2+b^2)t^2+a^2b^2)(t+\frac{ab}{t})^2}} \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} \end{aligned}$$

Il en résulte $I(a_1,b_1) = \frac{1}{2}J(a_1,b_1) = I(a,b)$ et donc, par une récurrence immédiate, $I(a_n,b_n) = I(a,b)$ pour tout entier n.

Question II.2.2 D'après l'expression de I en fonction de g, I est de classe C^1 en ses deux variables. En particulier

$$I(M(a,b),M(a,b)) = I(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{m\to\infty} b_m) = \lim_{n\to\infty} I(a_n,b_n) = \lim_{n\to\infty} I(a,b) = I(a,b)$$

et donc

$$I(a,b) = \frac{g(1)}{M(a,b)} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

puisque

$$g(1) = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\ .$$

On a donc $f = \pi/2g$ et f est bien de classe C^1 (puisque g ne s'annule nulle part).

Question II.3.1 $t \to x/t$ est bien un C^1-difféomorphisme de $]0;\sqrt{x}]$ sur $[\sqrt{x};+\infty[$ et donc

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{xds}{s^2\sqrt{(\frac{x^2}{s^2}+1)(\frac{x^2}{s^2}+x^2)}} = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(x^2+s^2)(s^2+1)}}$$

et donc

$$g(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}$$

d'après la relation de Chasle.

Question II.3.2 Pour $0 \le t \le \sqrt{x}$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \le \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \le 1$$

et donc

$$\frac{h(x)}{\sqrt{1+x}} \le g(x) \le h(x)\ .$$

Comme $x \to 1/\sqrt{1+x}$ est continue en 0 et y vaut 1, par le théorème de comparaison entre équivalents, on a $g \sim_{0^+} h$.

Question II.3.3 En faisant le changement de variable $t = x.sh(u)$ on obtient

$$h(x) = 2Argsh\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \sim_{0^+} 2\ln(\frac{1}{\sqrt{x}}) = -\ln(x)\ .$$

Question II.3.4 Puisque $f = \pi/2g$, on a $f(x) \sim_{0^+} -\frac{\pi}{2\ln(x)}$. Et comme $f(x) = xf(1/x)$, on a $f(x) \sim_{+\infty} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$.

Question III Comme $u_n > v_n > 0$, w_n existe et $w_n > 0$, et donc k_n existe.

Question III.1.1 On a

$$w_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2} = \sqrt{\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2} = \frac{|u_n - v_n|}{2} = \frac{u_n - v_n}{2}$$

puisque $0 < x < 1$ (dans le cas $n = 0$).

Il en résulte

$$2M(u_{n+1},w_{n+1}) = M(2u_{n+1},2w_{n+1}) = M(u_n+v_n,u_n-v_n) = M(u_n,\sqrt{u_n^2-v_n^2}) = M(u_n,w_n)$$

et donc

$$2^n M(u_n,w_n) = M(u_0,w_0) = M(1,\sqrt{1-x^2}) = f(\sqrt{1-x^2})\ .$$

Question III.1.2 On a

$$2^n f\left(\frac{w_n(x)}{u_n(x)}\right) = 2^n \frac{M(u_n(x),w_n(x))}{u_n(x)} = \frac{f(\sqrt{1-x^2})}{u_n(x)}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} 2^n f\left(\frac{w_n(x)}{u_n(x)}\right) = \frac{f(\sqrt{1-x^2})}{f(x)}$$

Question III.1.3 Comme u_n tend vers f qui ne s'annule pas et que w_n tend vers 0, le rapport w_n/u_n tend vers 0 (à x fixé). D'où

$$2^n f\left(\frac{w_n(x)}{u_n(x)}\right) \sim_{n\to\infty} -2^n \frac{\pi}{2\ln(w_n/u_n)} = \frac{\pi}{2k_n}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} k_n(x) = \frac{\pi f(x)}{2f(\sqrt{1-x^2})}\ .$$

Question III.2.1 Comme $u_n > v_n > 0$ une récurrence immédiate montre que u_n, v_n, w_n et k_n sont de classe C^1. On a alors

$$u'_{n+1} = \frac{u'_n + v'_n}{2} \qquad v'_{n+1} = \frac{u'_n v_n + u_n v'_n}{\sqrt{u_n v_n}}$$

et une récurrence montre que u'_n et v'_n sont strictement positives.

Question III.2.2 On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{k'_{n+1}}{v_{n+1}^2} &= \frac{2^{-(n+1)}}{u_n v_n}\left(\frac{u'_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{w'_{n+1}}{w_{n+1}}\right)\\
&= \frac{2^{-(n+1)}}{u_n v_n}\left(\frac{u'_n + v'_n}{u_n + v_n} - \frac{u'_n - v'_n}{u_n - v_n}\right)\\
&= \frac{2^{-(n+1)}}{u_n v_n}\,\frac{2(u_n v'_n - u'_n v_n)}{u_n^2 - v_n^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{k'_n}{v_n^2} &= \frac{2^{-n}}{v_n^2}\left(\frac{u'_n}{u_n} - \frac{w'_n}{w_n}\right)\\
&= \frac{2^{-n}}{v_n^2}\left(\frac{u'_n}{u_n} - \frac{u_n u'_n - v_n v'_n}{u_n^2 - v_n^2}\right)\\
&= \frac{2^{-n}}{v_n^2}\,\frac{u_n v_n v'_n - u'_n v_n^2}{u_n(u_n^2 - v_n^2)}\\
&= \frac{2^{-n}}{v_n}\,\frac{u_n v'_n - u'_n v_n}{u_n(u_n^2 - v_n^2)}
\end{aligned}$$

et on a donc bien $k'_n/v_n^2 = k'_{n+1}/v_{n+1}^2$, i.e. k'_n/v_n^2 est indépendant de n.

Question III.2.3 On fait $n = 0$ dans la formule précédente avec $u_0 = 1$ et $v_0 = x$ et on a

$$\frac{k'_0(x)}{v_0^2(x)} = \frac{1}{x(1-x^2)}$$

et donc, pour tout entier n, on a

$$\frac{k'_n(x)}{v_n^2(x)} = \frac{1}{x(1-x^2)} .$$

Question III.2.4 On a

$$|k'_n(x) - \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}| = \frac{f^2(x) - v_n^2(x)}{x(1-x)} = (f(x) - v_n(x))\frac{f(x) + v_n(x)}{x(1-x)} \leq 2^{-n}(1-x)\frac{2}{x(1-x)} \leq \frac{1}{2^{n-1}x}$$

(puisque $v_n \leq f \leq u_0 = 1$) et donc, si x dans un compact de $]0;1[$, il est minoré par une constante non nulle et on a bien convergence uniforme de k'_n vers la fonction indiquée, sur ce compact.

Question III.3.1 Sur un compact de $]0;1[$, k'_n converge uniformément et, comme k_n converge sur ce même compact (en fait il suffirait d'un point), k_n converge vers une fonction qui est de classe C^1 dont la dérivée est la limite de k'_n. Comme on connaît ces deux limites, cela s'énonce exactement comme dans l'énoncé.

Question III.3.2 On a donc

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{f'(x)}{f(\sqrt{1-x^2})} + \frac{f(x)f'(\sqrt{1-x^2})}{f^2(\sqrt{1-x^2})}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$$

et comme $1 - (1/\sqrt{2})^2 = 1/2$, on a

$$\frac{\pi}{2}\frac{2f'(1/\sqrt{2})}{f(1/\sqrt{2})} = 2\sqrt{2}f^2(1/\sqrt{2})$$

et donc

$$\pi = 2\sqrt{2}\frac{f^3(1/\sqrt{2})}{f'(1/\sqrt{2})} .$$

Question IV.1.1 Comme $u_n \geq v_n > 0$, on a $y_n \geq 1$ et comme u_n et v_n convergent uniformément vers f sur K, y_n converge uniformément vers 1 sur K.

Question IV.1.2 On a

$$y_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2\sqrt{u_n v_n}} = \frac{1 + y_n}{2\sqrt{y_n}}$$

et

$$z_{n+1} = \frac{u'_n v_n + v'_n u_n}{2\sqrt{u_n v_n}}\frac{2}{u'_n + v'_n} = \frac{1 + y_n z_n}{\sqrt{y_n}(1 + z_n)} .$$

Question IV.1.3 On a $z_1(x) = 1/\sqrt{x}$ et donc $z_1 \geq 1$.
De plus

$$\begin{aligned} z_{n+1} \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + y_n z_n \geq (1 + z_n)\sqrt{y_n} \\ &\Leftrightarrow \quad z_n(y_n - \sqrt{y_n}) \geq \sqrt{y_n} - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad z_n \geq \frac{1}{\sqrt{y_n}} \end{aligned}$$

Et donc si $z_n \geq 1$, alors $z_n \geq 1 \geq 1/\sqrt{y_n}$ et donc $z_{n+1} \geq 1$. On conclut donc, par récurrence, que $z_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$.

Il en résulte $u'_n \leq v'_n$ car $v'_n > 0$ et $u'_{n+1} - u'_n = \frac{v'_n - u'_n}{2} \geq 0$, i.e. u'_n est croissante.

Question IV.1.4 On a

$$\begin{aligned} y_{n+1} \leq z_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1+y_n}{2} \leq \frac{1+y_n z_n}{1+z_n} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + y_n + z_n + y_n z_n \leq 2 + 2y_n z_n \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq (y_n - 1)(z_n - 1) \ . \end{aligned}$$

Ce qui est vrai.

De même $z_{n+1} \leq \sqrt{y_n}$ si et seulement si $1 + y_n z_n \leq y_n(1 + z_n)$, autrement dit si et seulement si $y_n \geq 1$. Ce qui est aussi vrai.

La dernière inégalité résulte encore de $y_n \geq 1$.

Question IV.1.5 On a

$$\begin{aligned} v'_{n+1} \leq v'_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{u'_n v_n + v'_n u_n}{2\sqrt{u_n v_n}} \leq v'_n \\ &\Leftrightarrow \quad u_n + \frac{u'_n}{v'_n} v_n \leq 2\sqrt{u_n v_n} \\ &\Leftrightarrow \quad y_n + \frac{1}{z_n} \leq 2\sqrt{y_n} \\ &\Leftrightarrow \quad y_n - 2\sqrt{y_n} + 1 \leq 1 - \frac{1}{z_n} \\ &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{y_n} - 1)^2 \leq \frac{z_n - 1}{z_n} \ . \end{aligned}$$

Or

$$\frac{z_n - 1}{z_n} = 1 - \frac{1}{z_n} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{y_n}} = \frac{\sqrt{y_n} - 1}{\sqrt{y_n}}$$

et donc $v'_{n+1} \leq v'_n$ dès que $1/\sqrt{y_n} \geq \sqrt{y_n} - 1$. Ce qui est vrai par exemple si $y_n \leq 4$. Cette dernière condition est vérifiée uniformément sur K pour n assez grand puisque y_n y converge uniformément vers 1.

On a donc $u'_n \leq u'_{n+1} \leq v'_{n+1} \leq v'_n$ puisque u'_n est croissante, $z'_{n+1} \geq 1$ et n est assez grand.

Comme u'_n et v'_n convergent simplement sur K et que la convergence est monotone, elle y est uniforme (théorème de Dini).

Question IV.2.1 Comme u'_n converge uniformément sur K et que u_n converge sur K, elle converge vers une fonction dont la dérivée est la limite de u'_n. Autrement dit u'_n converge vers f', uniformément sur K. En particulier en $1/\sqrt{2}$, on a

$$2\sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{v_n^2(1/\sqrt{2})u_n(1/\sqrt{2})}{u'_n(1/\sqrt{2})} = 2\sqrt{2}\frac{f^3(1/\sqrt{2})}{f'(1/\sqrt{2})} = \pi \ .$$

Question IV.2.2 On va démontrer par récurrence que

$$\pi_n = 2\sqrt{2}\frac{v_{n+1}^2(1/\sqrt{2})u_{n+1}(1/\sqrt{2})}{u'_{n+1}(1/\sqrt{2})} \ .$$

En effet, pour $n = 0$, on a $v_1^2 u_1 / u'_1 = x(1 + x)$, et on a bien le résultat recherché.

De plus
$$\frac{v_n^2 u_n}{u_n'}\frac{1+y_n}{1+z_n} = \frac{v_{n+1}^2(u_n+v_n)}{u_n'+v_n'} = \frac{v_{n+1}^2 u_{n+1}}{u_{n+1}'}$$
et donc si l'égalité est vraie pour π_{n-1}, elle l'est pour π_n. D'où l'assertion. La valeur de la limite de π_n en résulte immédiatement.

Question IV.3.1 On a $0 \leq y_{n+1} - 1$ car $y_{n+1} \geq 1$. De plus
$$\begin{aligned} y_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{8}(y_n-1)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{u_n+v_n}{2\sqrt{u_n v_n}} - 1 \leq \frac{1}{8}\left(\frac{u_n-v_n}{v_n}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)^2}{2\sqrt{u_n v_n}} \leq \frac{(u_n-v_n)^2}{8v_n^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4v_n^2}{\sqrt{u_n v_n}} \leq (\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n})^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 4\sqrt{\frac{v_n}{u_n}} \leq \left(\sqrt{\frac{u_n}{v_n}}+1\right)^2 \end{aligned}$$
et ceci est vrai car le premier membre est inférieur à 4 et le second lui est supérieur.

On en déduit l'inégalité voulue par récurrence sur n. La majoration numérique s'obtient en prouvant que
$$y_1(1/\sqrt{2}) - 1 = 2^{-3/4} + 2^{-5/4} - 1 \simeq 1.015 < 1.016 = 8/500\ .$$

Question IV.3.2 On a $\pi_p \geq \pi_{p+1}$ puisque $z_p \geq y_p$. (C'est IV.1.4 pour $p \geq 2$ et c'est $(1+x)/2\sqrt{x} \leq 1\sqrt{x}$ pour $p = 1$.)
La seconde inégalité s'écrit
$$1 - \frac{1+y_p}{1+z_p} \leq \frac{z_p - y_p}{2}$$
ou encore $1 + z_p \geq 2$, ce qui est vrai.

Enfin π_n étant décroissante, $\pi_p \leq \pi_0$ et la dernière inégalité résulte de $z_{p+1} \leq y_p$.

En sommant les inégalités on trouve
$$0 \leq \pi_{n+1} - \pi \leq \frac{\pi_0}{2}(y_{n+1}(1/\sqrt{2}) - 1)$$
et la dernière majoration résulte de IV.3.1.

Question IV.3.3 Il suffit $4\pi_0 500^{-2^n} \leq 10^{-10^6}$, autrement dit
$$n \geq \log_2\left(10^6 + \log_{10}(4\pi_0)\right) - \log_2(\log_{10}(500))$$
et, comme $\log_{10}(500) \geq 2$ et $\log_{10}(4\pi_0) \leq 2$, il suffit $n \geq \log_2(10^6+2)$, et donc $n = 20$ convient.

Remarque : avec cet algorithme il faut tout de même calculer $\sqrt{2}$ avec au moins un million de décimales et calculer u_{20}, u_{20}' et v_{20}.