Deuxième épreuve CAPES externe 1995

François Sauvageot

8 décembre 2001

Partie I

Question I.1.1 La trace de A_1 est 6, son déterminant est 5. Par conséquent ses valeurs propres sont 1 et 5.
Le sous-espace propre associé à 1 admet pour équation $x_1+\sqrt{3}x_2=0$; c'est donc la droite engendrée par le vecteur $\sqrt{3}e_1-e_2$.
Le sous-espace propre associé à 5 admet pour équation $\sqrt{3}x_1-x_2=0$; c'est donc la droite engendrée par le vecteur $e_1+\sqrt{3}e_2$.

Remarque : la trace et le déterminant donnent somme et produit des valeurs propres de A_1 et on trouve des racines évidentes. On aurait bien sûr pu calculer le polynôme caractéristique de A_1, à savoir X^2-5X+6, et ainsi retrouver le résultat.
En ce qui concerne les espaces propres. On sait que, si λ est valeur propre de A_1, $A_1-\lambda Id$ est de rang au plus 1. Comme A_1 n'est pas scalaire, $A_1-\lambda Id$ est en fait de rang exactement 1. Une équation de ce sous-espace est donc donnée par l'une quelconque des équations non nulles obtenues en écrivant $A_1X=\lambda X$.

Question I.1.2 On choisit

$$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

et on obtient ${}^tP.P=I_2$ et $\det(P)=1$. Par conséquent P est une matrice orthogonale directe. De plus

$${}^tP.A_1.P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=D\ .$$

Ainsi les matrices P et D précédentes vérifient les propriétés requises.
Par conséquent, si X est un vecteur colonne quelconque et si $P^{-1}X$ admet (y_1,y_2) comme coordonnées, on a

$${}^tX.A_1.X={}^tX.{}^tP^{-1}.D.P^{-1}.X=y_1^2+5y_2^2$$

et donc, pour tout x dans $\mathbf{R}^2$, $Q_{A_1}(x)$ est positif et n'est nul que si $P^{-1}X$ est nul. Cette dernière condition est équivalente à ce que X soit nul, puisque P est inversible, et il en résulte que A_1 appartient à $S_2^+(\mathbf{R})$.

Remarque : une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale. Ainsi on a choisi P de sorte que ses colonnes soient les coordonnées de vecteurs propres de A unitaires. De la sorte on était sûr d'obtenir une matrice P orthogonale, mais non nécessairement directe. Par ailleurs il fallait les choisir par ordre de valeurs propres croissantes pour obtenir D ayant la propriété désirée. On ne demandait pas ici de démontrer le caractère nécessaire de cette construction. Notons, au passage, qu'il y a en fait exactement deux matrice P ayant les propriétés demandées. Celle citée ainsi que son opposée.

Question I.1.3 On se place dans le repère orthonormé $(O,(\sqrt{3}e_1-e_2)/2,(e_1+\sqrt{3}e_2)/2)$. La conique Σ_{A_1} y admet l'équation $y_1^2+5y_2^2=1$ et donc c'est une ellipse. Son excentricité est

$$e=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{5}}}{1}=\frac{2}{\sqrt{5}}\ .$$

Remarque : si une ellipse admet pour équation, sous forme normale, $x_1^2/a^2+x_2^2/b^2=1$ avec $0<b<a$. On définit $c=\sqrt{a^2-b^2}$ (c est la demi-distance focale) et l'excentricité est donnée par $e=c/a$. La formule donnée plus haut pour e est obtenue ainsi avec $a=1$ et $b=1/\sqrt{5}$.

Question I.2 Soit x dans $\mathbf{R}^2$. Il vient

$$Q_{A_2}(x)=2x_1^2+4\sqrt{2}x_1x_2+4x_2^2=2(x_1+\sqrt{2}x_2)^2\geq 0$$

ce qui est l'assertion cherchée. Par ailleurs Q_{A_2} s'annule sur le vecteur non nul $\sqrt{2}e_1-e_2$ et ne saurait donc être définie positive, i.e. A_2 n'appartient pas à $S_2^+(\mathbf{R})$.
Une équation de Σ_{A_2} est donnée par

$$2(x_1+\sqrt{2}x_2)^2=1$$

et la conique Σ_{A_2} est donc dégénérée ; c'est la réunion des deux droites parallèles d'équations respectives $\sqrt{2}x_1+2x_2=1$ et $\sqrt{2}x_1+2x_2=-1$.

Question I.3 Comme A est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe donc une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit une matrice diagonale, de diagonale $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et ces réels sont les valeurs propres de A. Si X est un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et si $(y_1,\dots,y_n)$ sont les coordonnées de $P^{-1}X$ alors

$$Q_A(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2\ .$$

Puisque P est une matrice de passage, lorsque x décrit $\mathbf{R}^n$, il en est de même de $(y_1,\dots,y_n)$ et, de plus, x est nul si et seulement si tous les y_i sont nuls pour i entre 1 et n.
Si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives, alors Q_A est à valeurs strictement positives sauf en 0 ou elle est nulle, i.e. A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$. Il en résulte $(ii)\Rightarrow(i)$.

Si Σ_A est non vide, l'une au moins des valeurs propres précédentes est strictement positive, car sinon Q_A est à valeurs négatives. Dans une telle éventualité notons λ une valeur propre de A strictement positive et x un vecteur propre unitaire associé à λ. En particulier $Q_A(x)=\lambda||x||^2=\lambda$ et donc $x/\sqrt{\lambda}$ appartient à Σ_A. Il en résulte que Σ_A est vide si et seulement si A n'a que des valeurs propres négatives ou nulles.

Si Σ_A est non vide, on se donne λ et x comme précédemment. Par orthogonalité des sous-espaces propres de A, le sous-espace affine $x/\sqrt{\lambda}+Ker(A)$ est contenu dans Σ_A. Il en résulte que, si Σ_A est non vide et borné, A n'admet pas 0 comme valeur propre. Supposons maintenant de surcroît que A admette une valeur propre μ strictement négative et notons y un vecteur propre unitaire associé. Par orthogonalité des sous-espaces propres de A, pour tout réel t, le vecteur x_t donné par

$$\cosh(t)\frac{x}{\sqrt{\lambda}}+\sinh(t)\frac{y}{\sqrt{-\mu}}$$

appartient à Σ_A. De plus $||x_t||$ est équivalent à $\sqrt{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}}e^t$ lorsque t tend vers $+\infty$. Par conséquent, si Σ_A est non vide et borné, toutes les valeurs propres de A sont strictement positives. A fortiori si Σ_A est compact et non vide, les valeurs propres de A sont toutes strictement positives. Autrement dit $(iii)\Rightarrow(ii)$.

Enfin si A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$, l'application Q_A est une application continue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, à valeurs strictement positives sur la sphère unité qui est compacte. Comme elle y atteint ses bornes, on en déduit qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que, pour tout x de norme 1, $0<a\leq Q_A(x)\leq b$. Il en résulte, puisque Q_A est une forme quadratique,

$$\forall x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}\qquad a\leq Q_A\left(\frac{x}{||x||}\right)=\frac{1}{||x||^2}Q_A(x)\leq b$$

et donc

$$\forall x\in\mathbf{R}^n\qquad a||x||^2\leq Q_A(x)\leq b||x||^2\ .$$

En particulier Σ_A est incluse dans la boule de centre O et de rayon $1/\sqrt{a}$. C'est donc un ensemble borné. Par continuité de Q_A, c'est également l'image réciproque d'un fermé de $\mathbf{R}$ par une application continue et est donc fermé. Il en résulte que Σ_A est compact. Enfin si x est un vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$, $Q_A(x)$ est non nul et le vecteur $x/\sqrt{Q_A(x)}$ appartient à Σ_A qui est donc, de ce fait, non vide. Il en résulte $(i) \Rightarrow (iii)$.

On a donc bien montré l'équivalence entre les propositions (i), (ii) et (iii). On a de plus caractérisé les cas où Σ_A est vide par la condition : A n'a que des valeurs propres négatives ou nulles.

Question I.4.1 Soit Π un plan vectoriel de $\mathbf{R}^n$. La restriction de Q_A à Π est encore une forme quadratique. De plus, puisque A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$, Q_A prend des valeurs strictement positives sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ et donc, *a fortiori* sur $\Pi \setminus \{0\}$, i.e. Q_A restreinte à Π est une forme quadratique définie positive.

Question I.4.2 Remarquons, si Π est un plan vectoriel,

$$\Sigma_A \cap \Pi = \{x \in \Pi \mid Q_{A_{|\Pi}}(x) = 1\} .$$

Si A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ et si Π est un plan vectoriel de $\mathbf{R}^n$, Q_A restreinte à Π est une forme quadratique définie positive et donc elle définit sur Π une conique compacte non vide, d'après I.4.1 et I.3. Autrement dit $\Sigma_A \cap \Pi$ est une conique compacte non vide, c'est-à-dire une ellipse.
Réciproquement si, pour tout plan vectoriel Π, $\Sigma_A \cap \Pi$ est une ellipse, alors, par I.3, la restriction de Q_A à tout plan vectoriel est définie positive. Comme tout vecteur appartient à un plan, c'est donc que Q_A est à valeurs strictement positives sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, i.e. Q_A est définie positive ou encore A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$.

Partie II

Question II.1 D'après I.3 si A a une valeur propre triple négative ou nulle, Σ_A est vide. Dans le cas contraire Σ_A est la sphère de centre O et de rayon $1/\sqrt{\lambda_1}$ et donc son intersection avec tout plan vectoriel est le cercle de centre O et de rayon $1/\sqrt{\lambda_1}$ inclus dans ce plan.

Question II.2.1 Notons λ la valeur propre simple et μ la valeur propre double. L'espace propre associé à μ est alors $\Delta^\perp$ puisque c'est un espace orthogonal à Δ et est de dimension 2 par hypothèse sur μ.
Soit r une rotation d'axe Δ et x un élément de Σ_A. On peut écrire $x = u + v$ avec u dans Δ et v dans $\Delta^\perp$ et alors $r(x) = u + r(v)$ et $r(v)$ est un vecteur de $\Delta^\perp$ de même norme que v. Il vient

$$Q_A(r(x)) = \lambda||u||^2 + \mu||r(v)||^2 = \lambda||u||^2 + \mu||v||^2 = Q_A(x) = 1$$

i.e. Σ_A est invariante par toute rotation d'axe Δ.

Question II.2.2 Soit Π un plan vectoriel non perpendiculaire à Δ et coupant Σ_A suivant un cercle Γ. D'après II.2.1 Σ_A contient l'image de Γ par toute rotation d'axe Δ, i.e. la surface obtenue en faisant tourner Γ autour de Δ.
Comme Π et Σ_A sont invariants par la symétrie de centre O, il en est de même de Γ et donc Γ admet O comme centre. Autrement dit tous les points de Γ sont à une même distance d de O. Puisque les rotations sont des isométries, la surface obtenue en faisant tourner Γ autour de Δ est incluse dans une sphère de centre O (celle de rayon d).

Soit maintenant (f_1, f_2, f_3) une base orthonormée de vecteurs propres de A respectivement associés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Si $x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$ appartient à Σ_A et à la sphère de centre O et de rayon d, il appartient à toute quadrique dont l'équation est combinaison linéaire des équations $Q_A(x) = 1$ et $||x||^2 = d^2$, et en particulier il vérifie $Q_A(x) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1 - \lambda d^2$. Puisque λ est valeur propre double de A l'équation précédente se réduit à $(\mu - \lambda)x_3^2 = 1 - \lambda d^2$ ou à $(\mu - \lambda)x_1^2 = 1 - \lambda d^2$, selon que λ vaut λ_1 ou λ_3. Ces deux équations décrivent un couple de plans (éventuellement confondus si $\lambda d^2 = 1$) puisque $\lambda - \mu$ est non nul. Il en résulte que Σ_A et la sphère de centre O et de rayon d se coupent sur au plus deux plans perpendiculaires à Δ, Π_1 et Π_2.

Puisque Π n'est pas perpendiculaire à Δ, les deux plans Π_1 et Π_2 coupent Π selon des droites et donc leur intersection avec Γ est l'intersection de Γ avec ces droites, c'est-à-dire au plus deux points. En conséquence $\Sigma_A \cap \Pi$ ne peut contenir tout Γ et ceci est une contradiction.

Remarque : l'ensemble des coniques données par une équation qui est combinaison linéaire de celles de deux coniques fixées s'appelle un faisceau linéaire de coniques. Un tel faisceau contient des coniques dégénérées (en général trois), à savoir des couples de droites. En dimension 3 on obtient de même un faisceau linéaire de quadriques.

Question II.2.3 D'après ce qui précède seul le plan perpendiculaire à Δ peut couper Σ_A selon un cercle. Si x dans $\mathbf{R}^3$ s'écrit $u+v$ avec u perpendiculaire à Δ et v dans Δ, x appartient à Σ_A et à Π si et seulement si v est nul et $Q_A(u+v)=1$, c'est-à-dire $v=0$ et $\lambda||u||^2=1$ (en notant λ la valeur propre double).
Il en résulte qu'il y a exactement un plan vectoriel coupant Σ_A suivant un cercle si la valeur propre double est strictement positive et aucun sinon.

Question II.3.1 D'après I.3 (et ainsi qu'il a été dit en I.4.2), si Σ_A coupe un plan vectoriel Π selon une ellipse (et donc *a fortiori* un cercle), alors la restriction de Q_A à Π est définie positive. Par conséquent, dans une telle éventualité, Q_A est également définie positive sur tout sous-espace de Π, par exemple $\Pi \cap \Pi_0$.
En particulier, toujours d'après I.3, Σ_A et la droite $\Pi \cap \Pi_0$ se rencontrent et donc, *a fortiori*, $\Sigma_A \cap \Pi_0$ est non vide. Il résulte de I.3 que la restriction de Q_A à Π_0 ne saurait être négative, i.e. les valeurs propres de A sur Π_0 (qui est stable par A) ne sont pas toutes les deux négatives ou nulles. Autrement dit l'une des valeurs propres de A sur Π_0 est strictement positive. Comme λ_2 est plus grand que λ_1, ceci impose $\lambda_2 > 0$.

Question II.3.2 Les quantités $\lambda_3 - \lambda_2$ et $\lambda_3 - \lambda_1$ sont strictement positives, elles admettent donc des racines carrées strictement positives. En particulier l'équation $\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3 - \sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_1 = 0$ a un sens et est à coefficients non nuls. Elle définit donc un hyperplan de $\mathbf{R}^3$, i.e. un plan vectoriel.
On a

$$\begin{aligned}
(x_1,x_2,x_3) \in \Sigma_A \cap \Pi \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(Q_A(x)=1 \quad \text{et} \quad \sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3 - \sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_1 = 0\Big)\\
&\Leftrightarrow \quad \Big(\lambda_2||x||^2 + (\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3 - \sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_1)(\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3 - \sqrt{\lambda_3+\lambda_1}x_1) = 1\\
&\qquad \text{et} \quad \sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3 - \sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_1 = 0\Big)\\
&\Leftrightarrow \quad \Big(\lambda_2||x||^2 = 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3 - \sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_1 = 0\Big)
\end{aligned}$$

et donc, si λ_2 est strictement positif, $\Sigma_A \cap \Pi$ est l'intersection de la sphère de centre O et de rayon $1/\sqrt{\lambda_2}$ avec Π et est un cercle.
Si Π' est le plan d'équation $\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3 + \sqrt{\lambda_3-\lambda_1}x_1 = 1$, le calcul précédent montre que $\Sigma_A \cap \Pi'$ est l'intersection de la même sphère de centre O et de rayon $1/\sqrt{\lambda_2}$ avec Π' et est donc un cercle. De plus, puisque $\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}$ est non nul, Π et Π' sont distincts.

Question II.3.3 Puisque Π et Π' sont distincts, leur intersection est une droite. Notons-la Δ. Elle admet pour vecteur directeur f_2 et son orthogonal est donc le plan engendré par (f_1, f_3).
Soit D et D' les droites perpendiculaires à Δ incluses dans Π et Π' respectivement. Comme Π et Π' sont distincts, ils diffèrent également de leurs plans bissecteurs. Leur intersection commune avec ces deux plans bissecteurs est donc réduite à Δ et donc f_1 et f_3 n'appartiennent ni à Π, ni à Π'. En particulier f_1 et f_3 ne sauraient être des vecteurs directeurs de D ou D'.
Soit u un vecteur directeur unitaire de D'. Puisque D' est perpendiculaire à Δ, u est combinaison linéaire de (f_1, f_3) et on peut écrire $u = \alpha f_1 + \beta f_3$ pour deux réels α et β. Ceux-ci ne sauraient être nuls puisque D' n'est dirigée ni par f_1, ni par f_3. De plus, u étant unitaire et (f_1, f_3) orthonormée, $\alpha^2+\beta^2=1$.
Un des plans bissecteurs de (Π, Π') est le plan engendré par (f_1, f_2). Par conséquent la symétrie par rapport à ce plan envoie Π' sur Π et même transforme une base orthonormée de Π' en une base orthonormée de Π. Cette symétrie est l'identité sur

son plan de symétrie et donc elle fixe f_1 et f_2. De plus elle opère par $-Id$ sur l'orthogonal de son plan de symétrie qui est la droite engendrée par f_3 puisque (f_1, f_2, f_3) est orthonormée. Par conséquent cette symétrie envoie f_3 sur son opposé. Elle envoie donc u sur $\alpha f_1 - \beta f_3$. Il en résulte que $(\alpha f_1 - \beta f_3, f_2)$ est une base orthonormée de Π.

Soit s et t des scalaires. On a

$$Q_A(s(\alpha f_1 \pm \beta f_3) + t f_2) = \left(\alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} \pm 2\alpha\beta u_{13}\right) s^2 + u_{22} t^2 + 2(\alpha u_{12} \pm \beta u_{23}) st$$

et les équations de $\Pi \cap \Sigma_A$ et $\Pi' \cap \Sigma_A$, dans les bases $(\alpha f_1 - \beta f_3, f_2)$ et $(\alpha f_1 + \beta f_3, f_2)$, sont donc respectivement

$$\left(\alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} - 2\alpha\beta u_{13}\right) s^2 + u_{22} t^2 + 2(\alpha u_{12} - \beta u_{23}) st = 1$$

et

$$\left(\alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} + 2\alpha\beta u_{13}\right) s^2 + u_{22} t^2 + 2(\alpha u_{12} + \beta u_{23}) st = 1 \; .$$

Pour que les coniques précédentes soient des cercles il faut que la forme quadratique dominante soit un multiple de $s^2 + t^2$. Il vient donc

$$\left(\alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} - 2\alpha\beta u_{13}\right) = u_{22} = \left(\alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} + 2\alpha\beta u_{13}\right)$$

et

$$2(\alpha u_{12} - \beta u_{23}) = 0 = 2(\alpha u_{12} + \beta u_{23}) \; .$$

Puisque α et β sont non nuls, la double nullité précédente entraîne $u_{12} = u_{23} = 0$. L'autre double égalité impose, quant à elle, $u_{13} = 0$ et $\alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} = u_{22}$.

Il en résulte que (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée pour la forme quadratique Q_A et donc u_{11}, u_{22} et u_{33} sont les valeurs propres de A. Comme u_{22} est barycentre à coefficients positifs (α^2 et β^2) de u_{11} et u_{33}, la valeur propre associée à f_2, à savoir u_{22} est comprise entre celles associées à f_1 et f_3.

Question II.3.4 D'après II.3.2 il y a au moins deux plans vectoriels Π et Π' coupant Σ_A selon des cercles. De plus tout plan coupant Σ_A selon un cercle est l'image de Π par la symétrie par rapport au plan engendré par les espaces propres associés aux deux plus petites valeurs propres, d'après II.3.3. Il y a donc exactement deux plans vectoriels coupant Σ_A suivant des cercles.

Question II.4.1 Pour x dans $\mathbf{R}^3$, on a

$$Q_{A_3}(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \geq 3||x||^2 \; .$$

En particulier A_3 est définie positive et donc, par I.3, tout plan vectoriel coupe Σ_{A_3} selon une ellipse.

Question II.4.2 D'après l'expression trouvée en II.4.1, on a, pour tout x dans $\mathbf{R}^3$,

$$Q_{A_3}(x) = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_2(x_2 - 2x_1 - 2x_3)$$

et donc l'intersection de Σ_{A_3} avec les plans d'équations $x_2 = 0$ et $x_2 - 2x_1 - 2x_3 = 0$ est celle de la sphère de centre O et de rayon $1/2$ avec ces plans, et est donc un cercle.
Puisqu'il y a au moins deux plans distincts coupant Σ_{A_3} selon un cercle, d'après II.1, II.2 et II.3, il y en a exactement deux sauf peut-être si A_3 est scalaire. Comme ce n'est pas le cas, les deux plans précédents sont les seuls qui coupent Σ_{A_3} selon des cercles.

Question II.4.3 Soit (f_1, f_2, f_3) une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ telle que (f_1, f_2) engendre un plan coupant Σ_{A_3} selon un cercle. Pour tout couple de scalaires (s, t), on a

$$Q_{A_3}(sf_1 + tf_2) = Q_{A_3}(f_1)s^2 + 2\Phi_{A_3}(f_1, f_2)st + Q_{A_3}(f_2)t^2$$

et donc $Q_{A_3}(f_1) = Q_{A_3}(f_2)$ et $\Phi_{A_3}(f_1, f_2) = 0$. De plus, pour tout scalaire h et tout couple de scalaires (s, t), on a

$$Q_{A_3}(sf_1 + tf_2 + hf_3) = Q_{A_3}(f_1)(s^2 + t^2) + 2h\Phi_{A_3}(f_1, f_3)s + 2h\Phi(f_2, f_3)t + h^2 Q_{A_3}(f_3)$$

et donc l'intersection de Σ_{A_3} avec le plan affine passant par hf_3 et de direction le plan engendré par (f_1, f_2) est un cercle, un point ou le vide selon que le minimum de Q_{A_3} sur ce plan est strictement inférieur à 1, est 1 ou est strictement supérieur à 1.

On applique ce qui précède pour le plan d'équation $x_2 = h$. Ici c'est très simple puisqu'on peut prendre pour base orthonormée satisfaisant aux critères précédents (e_1, e_3, e_2). Pour tout couple de réels (x_1, x_3), on a

$$Q_{A_3}(x_1e_1 + x_3e_3 + he_2) = 4x_1^2 - 2hx_1 + 4x_3^2 - 2hx_3 + 5h^2 = 4\left(x_1 - \frac{h}{4}\right)^2 + 4\left(x_3 - \frac{h}{4}\right)^2 + \frac{9h^2}{2}$$

et donc l'intersection de Σ_{A_3} avec le plan d'équation $x_2 = h$ est un cercle, un point ou le vide selon que h est strictement inférieur, égal ou strictement supérieur à $\sqrt{2}/3$.

Pour le plan d'équation $2x_1 - x_2 + 2x_3 = h$, on peut prendre comme base orthonormée

$$\left(\frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 + 4e_2 + e_3}{3\sqrt{2}}, \frac{2e_1 - e_2 + 2e_3}{3}\right) .$$

Soit (s, t, u) un triplet de réels. Posons $x = sf_1 + tf_2 + uf_3$. On a

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = h \Leftrightarrow 3u = h \Leftrightarrow u = \frac{h}{3}$$

et, si $u = h/3$,

$$Q_{A_3}(x) = 4||x||^2 - hx_2 = 4\left(s^2 + t^2 + \frac{1}{9}h^2\right) - h\left(\frac{4t}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{9}h\right) .$$

Cette quantité est minimale pour s nul et $t = h/6\sqrt{2}$ et vaut alors

$$h^2\left(\frac{1}{18} + \frac{4}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) \quad \text{soit encore} \quad \frac{h^2}{2} .$$

En conséquence l'intersection de Σ_{A_3} avec le plan d'équation $2x_1 - x_2 + 2x_3 = h$ est un cercle, un point ou le vide selon que h est strictement inférieur, égal ou strictement supérieur à $\sqrt{2}$.

Partie III

Question III.1.1 Soit M une matrice inversible. La matrice A définie par ${}^tM.M$ est symétrique puisque

$${}^tA = {}^tM.{}^t\left({}^tM\right) = {}^tM.M = A .$$

De plus si x appartient à $\mathbf{R}^n$, on a

$$Q_A(x) = {}^tX.{}^tM.M.X = ||MX||^2$$

et donc, puisque M est inversible, Q_A est positive et n'est nulle que si x est nul, i.e. A est symétrique définie positive.
Soit maintenant A une matrice symétrique définie positive. Puisqu'elle est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, i.e. il existe P orthogonale telle que ${}^tPAP$ soit une matrice diagonale D. D'après I.3 et puisque les coefficients diagonaux de D sont aussi les valeurs propres de A, D est à diagonale strictement positive. Si on note

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on peut donc poser

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = C.{}^tP\ .$$

La matrice C est inversible puisque son déterminant est la racine carrée de celui de D ou de celui de A puisque c'est le même. Par conséquent M est inversible en tant que produit de telles matrices. De plus, il vient, par symétrie de C,

$${}^tM.M = P.C.C.{}^tP = P.D.P^{-1} = A$$

et on a donc démontré l'équivalence requise.

Question III.1.2 La famille $\mathcal{V}$ est l'image de la base canonique par l'application linéaire canoniquement associé à M. Puisque M est inversible cette application est un isomorphisme et elle envoie donc une base sur une base. En particulier $\mathcal{V}$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

La matrice T admet pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{W}$ dans la base $\mathcal{V}$. Or, dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, pour tout entier i compris entre 1 et n, le vecteur w_i est combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, \dots, v_i)$. Par conséquent tous les coefficients de T en-dessous de la diagonale sont nuls, i.e. T est triangulaire supérieure.

La base canonique et $\mathcal{W}$ étant orthonormées, O est une matrice orthogonale. Par transitivité des matrices de passage, il vient

$$M = Mat(Id; \mathcal{V}, \mathcal{E}) = Mat(Id; \mathcal{W}, \mathcal{E}) Mat(Id; \mathcal{V}, \mathcal{E}) = OT\ .$$

Question III.1.3 Soit A une matrice dans $S_n^+(\mathbf{R})$. On peut trouver, d'après III.1.1, une matrice M inversible telle que $A = {}^tM.M$. D'après la question précédente on peut trouver O orthogonale et T triangulaire supérieure telles que $M = OT$. De plus, dans cette question, on a obtenu T comme une matrice de passage ; T est donc une matrice triangulaire supérieure inversible. Il vient alors, par orthogonalité de O,

$$A = {}^tM.M = {}^t(OT).OT = {}^tT.{}^tO.O.T = {}^tT.Id.T = {}^tT.T\ .$$

Remarques : la matrice T est nécessairement inversible puisqu'on a $\det(A) = \det(T)^2$, mais il semble plus simple de le déduire de sa construction en III.1.2. Cela dit l'argument sur le déterminant est plus général et montre que, quelle que soit la façon de choisir T, on obtiendra une matrice inversible.

De plus T est en fait à diagonale strictement positive puisque le procédé de Gram-Schmidt impose que le produit scalaire $\langle v_i, w_i \rangle$ soit strictement positif pour tout entier i entre 1 et n.

Question III.2 La matrice T étant triangulaire, son déterminant est le produit de ses termes diagonaux. Comme elle est inversible, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Soit maintenant i un entier compris entre 1 et n. Le coefficient t_{ii} étant non nul, on a $t_{ii}^2 > 0$. Par ailleurs on a

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{ki} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^2 \geq t_{ii}^2$$

et il vient donc $0 < t_{ii}^2 \leq a_{ii}$.

Remarque : En fait la somme précédente s'étend pour k allant de 1 à i, mais c'est inutile pour l'argument.

Il vient

$$\det(A) = \det(T)^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} t_{ii} \right)^2 = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}^2$$

et donc, par l'encadrement précédent et puisque l'on multiplie des inégalités entre termes positifs,

$$0 < \det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

avec égalité si et seulement si, pour tout entier i compris entre 1 et n, $a_{ii} = t_{ii}^2$. Cette dernière assertion, au vu de l'expression $a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^2$, est équivalente au fait que, pour tout couple d'entiers distincts (i, j), t_{ij} soit nul, i.e. T est diagonale. Dans ce cas A est elle-même diagonale puisque $A = {}^tT.T$. Réciproquement, si A est diagonale, son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux. Par conséquent $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ si et seulement si A est diagonale.

Question III.3.1 Soit T' une matrice triangulaire inversible telle que $A = {}^tT'.T'$ et x dans $\mathbf{R}^n$. Puisque le déterminant de T' est le produit de ses termes diagonaux, ceux-ci sont non nuls. Notons D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les signes des coefficients diagonaux de même indice de T. Comme D est diagonale avec des coefficients de carré 1 sur la diagonale, on a ${}^tD.D = D^2 = Id$ et donc, en posant $T = DT'$, il vient $A = {}^tTT$.
Notons maintenant $(t_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice T. Par construction elle est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive et il vient

$$Q_A(x) = {}^tX{}^tTTX = ||TX||^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} t_{ij}x_j \right)^2$$

et on a obtenu une écriture de Q_A comme demandé.

Réciproquement supposons que l'on ait une écriture de Q_A comme précédemment. On pose $t_{ij} = 0$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $j < i$ et $T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a alors, pour tout x dans $\mathbf{R}^n$,

$$Q_A(x) = ||TX||^2 = {}^tX{}^tTTX = {}^tXAX$$

et $A = {}^tTT$ puisqu'une forme quadratique est caractérisée par la matrice symétrique qui la représente. De plus, par construction de T, elle est triangulaire supérieure, de déterminant strictement positif en tant que produit de réels strictement positifs. En particulier T est triangulaire supérieure et inversible et on a démontré l'équivalence cherchée.

Remarque : Comme on l'a déjà signalé en III.1.2, puisqu'on s'intéresse aux matrices symétriques définies positives, on aurait pu imposer dès le départ à T d'avoir une diagonale strictement positive.

Question III.3.2 Supposons a_{11} strictement positif et posons $t_{1j} = a_{1j}/\sqrt{a_{11}}$ pour j entier entre 1 et n.
Par définition des coefficients t_{1j} pour j entier entre 1 et n, l'expression, pour x dans $\mathbf{R}^n$,

$$Q_A(x) - \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j \right)^2$$

s'exprime uniquement en fonction des coordonnées $(x_2, \ldots, x_n)$, i.e. en fonction de $\bar{x}$. De plus, en tant que différence de formes quadratiques sur $\mathbf{R}^n$, c'est également une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$. Par conséquent c'est une forme quadratique en les coordonnées de $\bar{x}$ et il existe une unique matrice de $S_{n-1}(\mathbf{R})$ représentant cette forme quadratique, i.e. telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \qquad Q_A(x) - \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j \right)^2 = Q_{\overline{A}}(\bar{x}) ,$$

ce qui est l'assertion cherchée.

Si A est symétrique définie positive, a_{11} est strictement positif, ainsi qu'il a été démontré en III.2. La matrice $\overline{A}$ existe donc. Soit maintenant $\bar{x}$ un élément de $\mathbf{R}^{n-1}$ et x l'élément de $\mathbf{R}^n$ se projetant sur $\bar{x}$ et dont la première coordonnée est telle que $\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j$ soit nul. On a $Q_{\overline{A}}(\bar{x}) = Q_A(x)$ et donc $Q_{\overline{A}}$ est à valeurs positives et ne s'annule en $\bar{x}$ que si Q_A s'annule en le vecteur x construit comme précédemment à partir de $\bar{x}$. En particulier cela impose à $\bar{x}$ d'être nul puisque la projection du vecteur nul de $\mathbf{R}^n$ est le vecteur nul de $\mathbf{R}^{n-1}$ et que x se projette sur $\bar{x}$. Autrement dit si A est symétrique définie positive, $\overline{A}$ existe et est symétrique définie positive.

Remarque : a_{11} est en fait égal à $Q_A(e_1)$ et est donc strictement positif si A est symétrique définie positive.

Question III.3.3 Soit A une matrice symétrique définie positive. Pour k entier entre 1 et $n-1$, soit (H_k) la proposition «l'algorithme ne s'arrête pas à sa k-ème étape et A_{k+1} est symétrique définie positive» ou, autrement dit, «la suite $(A_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ est définie jusqu'à l'indice $k+1$ et A_{k+1} est une matrice symétrique définie positive».
Pour $k=1$, la propriété résulte de la question précédente appliquée à A. Soit k un entier quelconque entre 1 et $n-1$, la question précédente appliquée à A_k montre que (H_k) est héréditaire. Comme l'algorithme s'arrête au plus tard à sa n-ème étape, le principe de récurrence permet de conclure que, pour une matrice symétrique définie positive, l'algorithme s'arrête pour k égal à n et que A_n est un réel strictement positif.
Réciproquement, si l'algorithme s'arrête pour $k=n$, on peut définir des réels $(t_{ij})_{1\le i\le j<n}$ de sorte que, si a est l'unique terme de A_n, on ait

$$\forall x\in\mathbf{R}^n \qquad Q_A(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i}^{n}t_{ij}x_j\right)^2+a$$

et donc, si a est un réel positif, on peut poser $t_{nn}=\sqrt{a}$ et obtenir une écriture de Q_A comme en III.3.1. Il en résulte que A s'écrit ${}^tTT$ avec T triangulaire supérieure inversible (et même à diagonale strictement positive) et donc, d'après III.1.1, A est symétrique définie positive.
On a donc démontré que A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si l'algortihme s'arrête pour k égal à n avec l'unique terme de A_n strictement positif. De plus, dans ce dernier cas, on a trouvé une matrice triangulaire supérieure inversible T, à diagonale positive, telle que $A={}^tTT$.

Question III.4.1
Note : tel quel l'énoncé est faux. Il faut s'entendre sur ce que veut dire «parvenir à la k-ème itération». Au vu de la fin de la question sur la faisabilité de la $k+1$-ème itération, il faut donc comprendre : «accomplir la k-ème itération» et donc parvenir à définir A_{k+1}. C'est ce que l'on avait nommé «ne pas s'arrêter à la k-ème étape» lors de le question précédente. D'une façon générale l'énoncé est très flou. Le plus simple aurait été de parler de l'indice maximal pour lequel A_k est défini.

Soit k un entier naturel entre 1 et $n-1$. On note (H_k) la propriété : l'algorithme ne s'arrête pas à la k-ème itération si et seulement s'il existe une suite de réels strictement positifs vérifiant $u_1=\sqrt{a}$ et, pour i entier entre 2 et k, $u_i=\sqrt{a-1/u_{i-1}^2}$ et, dans ce cas,

$$\forall x\in\mathbf{R}^n \qquad Q_{A(n;a)}(x)=\sum_{i=1}^{k}\left(u_ix_i+\frac{x_{i+1}}{u_i}\right)^2+\left(a-\frac{1}{u_k^2}\right)x_{k+1}^2+a\sum_{i=k+2}^{n}x_i^2+2\sum_{i=k+2}^{n}x_{i-1}x_i$$

et $u_1>\ldots>u_k$.
La propriété (H_1) s'écrit : l'algorithme ne s'arrête pas à la première étape si et seulement si a est strictement positif et, dans ce cas,

$$\forall x\in\mathbf{R}^n \qquad Q_{A(n;a)}(x)=\left(\sqrt{a}x_1+\frac{x_2}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)x_2^2+a\sum_{i=3}^{n}x_i^2+2\sum_{i=3}^{n}x_{i-1}x_i\ .$$

L'équivalence résulte de III.3.2. De plus on a,

$$\forall (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \qquad ax_1^2+2x_1x_2=\left(\sqrt{a}x_1+\frac{x_2}{\sqrt{a}}\right)^2-\frac{1}{a}x_2^2$$

et la seconde partie de l'assertion en résulte.
Soit maintenant k un entier compris entre 1 et $n-2$ pour lequel (H_k) est vraie. En tenant compte de (H_k) la propriété (H_{k+1}) s'écrit : l'algorithme ne s'arrête pas à la $k+1$-ème étape si et seulement s'il est possible de définir une suite réelle

vérifiant $u_1 = \sqrt{a}$ et, pour i entier entre 2 et k, $u_i = \sqrt{a - 1/u_{i-1}^2}$ avec u_k strictement supérieur à $1/\sqrt{a}$ et, dans ce cas, en posant $u_{k+1} = \sqrt{a - 1/u_k^2}$,

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \qquad \left(a - \frac{1}{u_k^2}\right) x_{k+1}^2 + a x_{k+2}^2 + 2 x_{k+1} x_{k+2} = \left(u_{k+1} x_{k+1} + \frac{x_{k+2}}{u_{k+1}}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{u_{k+1}^2}\right) x_{k+2}^2$$

et $u_k > u_{k+1}$.
Puisque l'algorithme ne s'arrête pas à la k-ème itération, on peut définir A_{k+1}. De plus son terme en première ligne et première colonne est, d'après l'écriture fournie par (H_k), $a - 1/u_k^2$. L'algorithme s'arrête donc si et seulement si $a - 1/u_k^2$ est négatif ou nul ; autrement dit l'algorithme ne s'arrête pas à la $k+1$-ème itération si et seulement si u_k est strcitement supérieur à $1/\sqrt{a}$. Dans ce cas la récriture de $Q_{A(n,a)}$ résulte de la définition de u_{k+1}. Enfin si $k = 1$, on a $u_1 = \sqrt{a}$ et $u_2 = \sqrt{a - 1/a}$ et donc $u_1 > u_2$ puisque $a > a - 1/a$ et que la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. Si au contraire k est strictement supérieur à 1, on a $u_{k-1} > u_k$ et donc, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{a - 1/t^2}$ sur l'intervalle réel $[1/\sqrt{a}, +\infty[$, on a $u_k > u_{k+1}$. La propriété (H_k) est donc héréditaire.
Le principe de récurrence permet donc de conclure, en particulier, que, si on «parvient» à la k-ème itération, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \qquad Q_{A(n;a)}(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(u_i x_i + \frac{x_{i+1}}{u_i}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{u_k^2}\right) x_{k+1}^2 + a \sum_{i=k+2}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i=k+2}^{n} x_{i-1} x_i$$

où $(u_i)_{1 \leq i \leq k}$ est défini par $u_1 = \sqrt{a}$ et, pour i entier entre 2 et k, $u_i = \sqrt{a - 1/u_{i-1}^2}$. De plus on a $u_1 > \ldots > u_k$.
Par ailleurs, on en conclut également que, dans ce cas, on peut effectuer une $k+1$-ème itération si et seulement si $u_k > 1/\sqrt{a}$.

Remarque : l'énoncé flirte avec les équivalences mais la propriété donnée par l'énoncé n'est pas une équivalence puisqu'elle autorise la valeur 0 pour u_k.

Question III.4.2 Soit f la fonction, définie pour t réel strictement supérieur à $1/\sqrt{a}$, par $f(t) = \sqrt{a - 1/t^2}$. On définit une suite récurrente par $u_1 = \sqrt{a}$ et, pour k entier strictement supérieur à 1, si u_{k-1} est strictement supérieur à $1/\sqrt{a}$, $u_k = f(u_{k-1})$.
Soit n un entier naturel non nul. D'après la question précédente, pour tout entier naturel non nul n, $A(n;a)$ est définie positive si et seulement si u_n peut être défini.
Remarquons que, puisque $\sqrt{a} > f(\sqrt{a})$ et que f est croissante sur son domaine de définition, la suite récurrente que l'on vient de définir est décroissante tant qu'elle est définie. En particulier, en notant f^n l'itérée n-ème de f et D_n le domaine de définition de f^n, $A(n;a)$ est définie positive si et seulement si $\sqrt{a}$ appartient à D_n.
La fonction f admet des points fixes si et seulement si l'équation, pour t réel strictement supérieur à $1/\sqrt{a}$, $t = \sqrt{a - 1/t^2}$ a une solution. Dans ce cas on a $t^4 - at^2 + 1 = 0$.
Le trinôme $X^2 - aX + 1$ est positif à l'extérieur de l'intervalle borné par ses racines, i.e. en dehors de $](a - \sqrt{a^2-4})/2; (a + \sqrt{a^2-4})/2[$. Comme il est positif en $1/a$ et que cette quantité est inférieure à 1, donc à $a/2$ et donc aussi à la plus grande des racines, il en résulte que $1/\sqrt{a}$ est inférieur à $\frac{1}{2}\sqrt{a - \sqrt{a^2-4}}$ et donc que l'intervalle $[\frac{1}{2}\sqrt{a - \sqrt{a^2-4}}; +\infty[$ est inclus dans le domaine de définition de f. Comme f est croissante et admet la borne inférieure de cet intervalle comme point fixe, il en résulte que $[\frac{1}{2}\sqrt{a - \sqrt{a^2-4}}; +\infty[$ est stable par f et appartient donc au domaine de définition de toutes les itérées de f. C'est en particulier le cas de $\sqrt{a}$.
Il résulte de cette étude que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel a supérieur ou égal à 2, la matrice $A(n;a)$ est symétrique définie positive.

Question III.4.3 On reprend les notations de l'étude menée à la question précédente.
Si la suite récurrente précédente est définie sur $\mathbf{N}$ c'est une suite récurrente décroissante et minorée associée à une fonction continue, elle converge donc vers un point fixe de f. Mais, pour $a < 2$, le trinôme $X^2 - aX + 1$ n'a pas de racine réelle et, *a fortiori*, f n'a pas de point fixe.
Il vient donc : pour tout entier naturel non nul n, $D_n \supset D_{n+1}$ et $\sqrt{a} \notin \cap_{n \in \mathbf{N}^*} D_n$. On peut donc définir un entier $N(a)$ comme le plus grand des entiers n tels que $\sqrt{a}$ appartienne à D_n et on aura alors, pour tout entier naturel non nul n, $A(n;a)$ appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si $n \leq N(a)$.

Pour $a = 1$, on trouve $u_1 = 1 \leq 1/\sqrt{a}$. Pour $a = \sqrt{2}$, on trouve $u_2 = 2^{-1/4} \leq 1/\sqrt{a}$. Pour $a = 1.9$, on trouve $u_8 = 3\sqrt{1803110334835110}/181123390$, soit $u_8 \simeq 0.703$ et on a $1/\sqrt{1.9} \simeq 0.725$, d'où $u_8 \leq 1/\sqrt{a}$.
Il en résulte $N(1) = 1$, $N(\sqrt{2}) = 2$ et $N(1.9) = 8$.

Par ailleurs voici un programme pour calculer directement $N(a)$ pour a réel dans $]0;2[$, sur une Ti-89. Le programme renvoie la valeur de $N(a)$ et de $u_{N(a)}$. Pour bien faire il faudrait tester que la valeur de a fournie est bien comprise entre 0 et 2 strictement.

```
chol(a)
Prgm
√(a)→u
1→n
While u*√(a)>1
√(a-u^(-2))→u
n+1→n
EndWhile
Disp n,u
EndPrgm
```

Question III.4.4 Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ la suite récurrente définie par $u_1 = \sqrt{2}$ et, pour tout entier naturel supérieur à 2, $u_k = \sqrt{2 - 1/u_{k-1}^2}$.
Pour k entier naturel non nul, soit (H_k) la propriété $u_k = \sqrt{1 + 1/k}$. La propriété (H_1) s'écrit $u_1 = \sqrt{2}$, ce qui est vrai. De plus, pour tout entier naturel k,

$$\sqrt{2 - \frac{k}{k+1}} = \sqrt{\frac{k+2}{k+1}} = \sqrt{1 + \frac{1}{k+1}}$$

et donc la propriété (H_k) est héréditaire.
Il résulte de l'étude menée en III.4.1 que $A = {}^tTT$ avec

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \sqrt{\frac{n}{n-1}} & \sqrt{\frac{n-1}{n}} \\ & & & 0 & \sqrt{\frac{n+1}{n}} \end{pmatrix}.$$