Partie I

Question I.1 Les fonctions affines et sinus hyperbolique étant de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ il en est de même de Y_0 et Y_1. Elles le sont a fortiori sur I. De plus, par dérivation des fonctions composées, on a, pour tout réel t,

$$Y_0'(t) = c.\mathrm{ch}(ct) \qquad \text{et} \qquad Y_0''(t) = c^2.\mathrm{sh}(ct) = c^2 Y_0(t)$$

et

$$Y_1'(t) = -c.\mathrm{ch}(c(1-t)) \qquad \text{et} \qquad Y_1''(t) = c^2.\mathrm{sh}(c(1-t)) = c^2 Y_1(t)\ .$$

Y_0 et Y_1 sont donc bien solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2 y = 0$.

Comme l'ensemble de ces solutions forme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2, pour conclure il suffit de montrer que (Y_0, Y_1) est libre. Pour cela il suffit de considérer le déterminant wronskien W :

$$W(t) = \begin{vmatrix} Y_0(t) & Y_1(t) \\ Y_0'(t) & Y_1'(t) \end{vmatrix} = -c.\mathrm{sh}(ct).\mathrm{ch}(c(1-t)) - c.\mathrm{sh}(c(1-t)).\mathrm{ch}(ct) = -c.\mathrm{sh}(c)\ .$$

Comme c est non nul, le déterminant wronskien de Y_0 et Y_1 est une fonction non nulle et donc (Y_0, Y_1) est libre.

Question I.2.1 Pour appliquer la méthode de variation des constantes, il faut se ramener à un système d'ordre 1.

y est solution de $-y'' + c^2 y = f$ si et seulement $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de

$$-Y' + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}\ .$$

On va chercher une solution particulière de ce système différentiel sous la forme

$$Y = \lambda \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_0' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_1' \end{pmatrix}$$

avec λ et μ deux fonctions de classe C^1 sur I. Sous cette hypothèse Y est solution du système différentiel si et seulement si

$$-\lambda' \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_0' \end{pmatrix} - \mu' \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

ou encore

$$-\begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 \\ Y_0' & Y_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}\ .$$

Puisque le déterminant wronskien est non nul égal à $-c.\mathrm{sh}(c)$, on trouve donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 \\ Y_0' & Y_1' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{c.\mathrm{sh}(c)} \begin{pmatrix} Y_1' & -Y_1 \\ -Y_0' & Y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{c.\mathrm{sh}(c)} \begin{pmatrix} -Y_1 f \\ Y_0 f \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

Autrement dit on a affaire à une solution particulière du système différentiel si et seulement si λ est une primitive de $-Y_1 f/(c.\mathrm{sh}(c))$ et μ une primitive de $Y_0 f/(c.\mathrm{sh}(c))$.

En particulier une fonction (définie sur I) de la forme

$$-\frac{Y_0}{c.\mathrm{sh}(c)} \int Y_1(s) f(s) ds + \frac{Y_1}{c.\mathrm{sh}(c)} \int Y_0(s) f(s) ds$$

est une solution particulière de l'équation différentielle d'ordre 2 de départ.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions de la forme

$$Y_0\left(A-\frac{1}{c.\mathrm{sh}(c)}\int Y_1(s)f(s)ds\right)+Y_1\left(B+\frac{1}{c.\mathrm{sh}(c)}\int Y_0(s)f(s)ds\right)$$

avec A et B réels. (L'indétermination des primitives étant sans conséquence sur l'ensemble des solutions.)

En termes plus concrets, on peut fixer les primitives. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions de la forme

$$t\mapsto \mathrm{sh}(ct)\left(A-\frac{1}{c.\mathrm{sh}(c)}\int_0^t f(s)\mathrm{sh}(c(1-s))ds\right)+\mathrm{sh}(c(1-t))\left(B+\frac{1}{c.\mathrm{sh}(c)}\int_0^t f(s)\mathrm{sh}(cs)ds\right)$$

avec A et B réels.

Question I.2.2 Comme sh s'annule en 0, Y_0 s'annule en 0 et Y_1 en 1. Pour avoir des conditions simples sur A et B on est donc amené à plutôt fixer comme primitives la primitive de Y_1f qui s'annule en 1 et celle de Y_0f qui s'annule en 0.

C'est-à-dire que l'on écrit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $-y''+c^2y=f$ est formé des fonctions y de la forme

$$t\mapsto \mathrm{sh}(ct)\left(A-\frac{1}{c.\mathrm{sh}(c)}\int_1^t f(s)\mathrm{sh}(c(1-s))ds\right)+\mathrm{sh}(c(1-t))\left(B+\frac{1}{c.\mathrm{sh}(c)}\int_0^t f(s)\mathrm{sh}(cs)ds\right)$$

avec A et B réels.

Avec cette écriture la condition $y(0)=\lambda$ s'écrit $B.\mathrm{sh}(c)=\lambda$ et la condition $y(1)=\mu$ s'écrit $A.\mathrm{sh}(c)=\mu$. Il en résulte que le problème (P_1) admet une unique solution y qui à t dans I associe

$$y_1(t)=\frac{\mathrm{sh}(ct)}{\mathrm{sh}(c)}\left(\mu+\frac{1}{c}\int_t^1 f(s)\mathrm{sh}(c(1-s))ds\right)+\frac{\mathrm{sh}(c(1-t))}{\mathrm{sh}(c)}\left(\lambda+\frac{1}{c}\int_0^t f(s)\mathrm{sh}(cs)ds\right)\ .$$

Question I.3.1 Les fonctions Y_0 et Y_1 sont positives (sur I). Par conséquent, des inégalités

$$\lambda\le\max(\lambda,\mu)\qquad\text{et}\qquad\mu\le\max(\lambda,\mu)$$

et de la positivité de $\mathrm{sh}(c)$, on déduit

$$\lambda\frac{Y_1}{\mathrm{sh}(c)}\le\max(\lambda,\mu)\frac{Y_1}{\mathrm{sh}(c)}\qquad\text{et}\qquad\mu\frac{Y_0}{\mathrm{sh}(c)}\le\max(\lambda,\mu)\frac{Y_0}{\mathrm{sh}(c)}$$

et donc

$$\frac{\lambda Y_1+\mu Y_0}{\mathrm{sh}(c)}\le\frac{Y_1+Y_0}{\mathrm{sh}(c)}\max(\lambda,\mu)\ .$$

Toujours par positivité de Y_0 et Y_1 sur I, on déduit

$$\int_t^1 f(s)Y_1(s)ds\le M\int_t^1 Y_1(s)ds=\frac{M}{c}(\mathrm{ch}(c(1-t))-1)\qquad\text{et}\qquad\int_0^t f(s)Y_0(s)ds\le M\int_0^t Y_0(s)ds=\frac{M}{c}(\mathrm{ch}(ct)-1)\ .$$

En utilisant une dernière fois la positivité de Y_0, Y_1, $\mathrm{sh}(c)$ et c, on obtient, pour t dans I,

$$\frac{Y_0(t)}{c.\mathrm{sh}(c)}\int_t^1 f(s)Y_1(s)ds\le\frac{MY_0(t)(\mathrm{ch}(c(1-t))-1)}{c^2\mathrm{sh}(c)}\qquad\text{et}\qquad\frac{Y_1(t)}{c.\mathrm{sh}(c)}\int_0^t f(s)Y_0(s)ds\le\frac{MY_1(t)(\mathrm{ch}(ct)-1)}{c^2\mathrm{sh}(c)}$$

et donc

$$\frac{1}{c.\mathrm{sh}(c)}\left(Y_0(t)\int_t^1 f(s)Y_1(s)ds+Y_1(t)\int_0^t f(s)Y_0(s)ds\right)\le\frac{M}{c^2\mathrm{sh}(c)}(\mathrm{sh}(ct)\mathrm{ch}(c(1-t))+\mathrm{sh}(c(1-t))\mathrm{ch}(ct)-\mathrm{sh}(ct)-\mathrm{sh}(c(1-t)))\ .$$

En utilisant la formule d'addition pour le sinus hyperbolique, on trouve donc

$$\frac{1}{c.\mathrm{sh}(c)}\left(Y_0(t)\int_t^1 f(s)Y_1(s)ds + Y_1(t)\int_0^t f(s)Y_0(s)ds\right) \leq \frac{M}{c^2\mathrm{sh}(c)}(\mathrm{sh}(c)-\mathrm{sh}(ct)-\mathrm{sh}(c(1-t)))\ .$$

En réunissant cette inégalité et celle trouvée au paragraphe précédent, on obtient que l'unique solution y de (P_1) vérifie

$$y \leq \frac{Y_1+Y_0}{\mathrm{sh}(c)}\max(\lambda,\mu) + \frac{M}{c^2}\left(1-\frac{Y_0+Y_1}{\mathrm{sh}(c)}\right)\ .$$

Ce qui est l'inégalité demandée.

Question I.3.2 Les formules d'addition et de duplication classiques sont

$$\mathrm{sh}(p)+\mathrm{sh}(q) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

et

$$\mathrm{sh}(2p) = 2\mathrm{sh}(p)\mathrm{ch}(p)\ .$$

(Elles s'obtiennent immédiatement à partir des expressions exponentielles.)

Question I.3.3 On a, pour tout t dans I,

$$Y_0(t)+Y_1(t) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{c}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{c}{2}(1-2t)\right)$$

et donc

$$\frac{Y_0(t)+Y_1(t)}{\mathrm{sh}(c)} = \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{c}{2}(1-2t)\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{c}{2}\right)}\ .$$

Or la fonction cosinus hyperbolique est paire et croissante sur $\mathbf{R}_+$ et pour tout t dans I, on a

$$|1-2t| \leq 1 \qquad \text{et donc} \qquad \mathrm{ch}\left(\frac{c}{2}(1-2t)\right) = \mathrm{ch}\left(\left|\frac{c}{2}(1-2t)\right|\right) \leq \mathrm{ch}\left(\frac{c}{2}\right)\ .$$

Il en résulte que $(Y_0+Y_1)/\mathrm{sh}(c)$ est à valeurs dans I, comme demandé.

Par conséquent, avec les notations de $I.3.1$, y est inférieure à un barycentre (à coefficients positifs) des deux quantités $\max(\lambda,\mu)$ et M/c^2 et est donc inférieure à la plus grande de ces valeurs, i.e.

$$y \leq \max\left(\lambda,\mu,\frac{M}{c^2}\right)\ .$$

Ceci est bien la propriété $(P.M)$ avec $a=1$, $b=c^{-2}$ et $A=B=1$.

Question I.3.4 Soit s appartenant à I et x un réel, on a $x \leq -h(s)$ si et seulement si $-x \geq h(s)$. En particulier

$$\forall s\in I \qquad x\leq -h(s) \Leftrightarrow \forall s \in I \qquad -x \geq h(s)$$

ou encore

$$x \leq \inf_{s\in I}(-h(s)) \Leftrightarrow -x \geq \sup_{s\in I}(h(s))$$

et donc

$$\inf_{s\in I}(-h(s)) = -\sup_{s\in I}(h(s))\ .$$

Si y est solution de (P_1) pour les données (λ, μ, f), alors $-y$ l'est pour les données $(-\lambda, -\mu, -f)$. Par conséquent elle vérifie

$$-y \leq \max\left(-\lambda, -\mu, \frac{\sup_{s\in I}(-f(s))}{c^2}\right)$$

ou encore

$$y \geq -\max\left(-\lambda, -\mu, -\frac{\inf_{s\in I}(f(s))}{c^2}\right)$$

soit

$$y \geq \inf\left(\lambda, \mu, \frac{\inf_{s\in I}(f(s))}{c^2}\right) .$$

Question I.4 Soit y une fonction de classe C^2 sur I. Comme $\phi\ : s \mapsto \alpha + (\beta-\alpha)s$ est un C^∞-difféomorphisme de $[0;1]$ sur I, on peut introduire z de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$z(s) = y(\alpha + (\beta-\alpha)s)$$

et on a

$$-y''(\alpha+(\beta-\alpha)s) + c^2 y(\alpha+(\beta-\alpha)s) = -\frac{1}{(\beta-\alpha)^2} z''(s) + c^2 z(s) .$$

Par conséquent y est solution de $(\hat{P}_1)$ avec $u=-1$, $v=0$ et $w=c^2$ pour les données (λ,μ,f) si et seulement si z est solution de (P_1) avec $u=-1$, $v=0$ et $w=(c(\beta-\alpha))^2$ pour les données $(\lambda,\mu,(\beta-\alpha)^2 f\circ\phi)$.

Si tel est le cas, comme

$$z \leq \max\left(\lambda, \mu, \frac{(\beta-\alpha)^2 \sup_{s\in[0;1]}(f(\alpha+(\beta-\alpha)s))}{c^2(\beta-\alpha)^2}\right) ,$$

soit

$$z \leq \max\left(\lambda, \mu, \frac{\sup_{s\in I}(f(s))}{c^2}\right) ,$$

on a

$$y \leq \max\left(\lambda, \mu, \frac{\sup_{s\in I}(f(s))}{c^2}\right)$$

puisque y et z prennent les mêmes valeurs. Autrement dit $(\hat{P}_1)$ vérifie $(P.M)$.

Partie II

Question II.1.1 Puisque $0<\alpha<\beta$, l'exponentielle réalise un C^∞-difféomorphisme de $J=[\log(\alpha),\log(\beta)]$ sur I. Si y est une fonction quelconque dans $C^2(I)$ et γ un réel, la fonction $z\ : x\mapsto e^{-\gamma x}y(e^x)$ appartient à $C^2(J)$ et on a, pour x dans J,

$$z'(x) = e^{-\gamma x}(-\gamma y(e^x) + e^x y'(e^x)) \qquad \text{et} \qquad z''(x) = e^{-\gamma x}(\gamma^2 y(e^x) + (1-2\gamma)e^x y'(e^x) + e^{2x}y''(e^x))$$

d'où, pour toute constante réelle c,

$$-z''(x) + c^2 z(x) = e^{-\gamma x}\left((c^2-\gamma^2)y(e^x) + (2\gamma-1)e^x y'(e^x) - e^{2x}y''(e^x)\right)$$

et donc, si y est solution de (P_2),

$$-z''(x) + c^2 z(x) = e^{-\gamma x}\left((c^2-\gamma^2-1)y(e^x) + (2\gamma+1)e^x y'(e^x) + f(e^x)\right) .$$

Par conséquent, pour $\gamma=-1/2$, $c=\sqrt{1+\gamma^2}=\sqrt{5}/2$ et g de J dans $\mathbf{R}$ définie par $g(x)=e^{-\gamma x}f(e^x)=e^{x/2}f(e^x)$, on a

$$-z'' + c^2 z = g .$$

Question II.1.2 Remarquons qu'il y a en fait équivalence entre le fait que la fonction y soit solution de (P_2) pour les données (λ, μ, f) et le fait que la fonction z précédemment définie soit solution de $(\hat{P}_1)$ pour les données $(e^{-\gamma \log(\alpha)}\lambda, e^{-\gamma \log(\beta)}\mu, g)$, ou encore $(\sqrt{\alpha}\lambda, \sqrt{\beta}\mu, g)$. En effet $x \mapsto e^{x/2}$ ne s'annulant pas et l'exponentielle réalisant un C^∞-difféomorphisme de J sur I, à toute fonction y de $C^2(I)$ correspond une unique fonction z de $C^2(J)$ telle que $z(x) = e^{x/2}y(e^x)$, et réciproquement. Le reste résulte des calculs de la question précédente.

Par conséquent pour toute solution de (P_2) pour les données (λ, μ, f) la fonction z associée vérifie

$$z \leq \max\left(\sqrt{\alpha}\lambda, \sqrt{\beta}\mu, \frac{4}{5}\sup_{s\in J}(e^{s/2}f(e^s))\right)$$

ou encore, pour t dans I

$$y(t) = \frac{z(\log(t))}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}\max\left(\sqrt{\alpha}\lambda, \sqrt{\beta}\mu, \frac{4}{5}\sup_{t\in I}(\sqrt{t}f(t))\right) .$$

C'est-à-dire que (P_2) vérifie $(P.M)$ pour a la fonction racine carrée inverse, b 4/5 fois la fonction racine carrée, $A = \sqrt{\alpha}$ et $B = \sqrt{\beta}$.

Question II.1.3 Pour formuler la propriété de minoration, on peut utiliser des changements de variable et se ramener à la propriété démontrée en I.3.4. Mais il est encore plus simple de refaire le raisonnement de I.3.4.

On va donc démontrer la propriété de minoration des solutions de (P_2) suivante :

$$\forall t \in I \qquad y(t) \geq \frac{1}{\sqrt{t}}\inf\left(\sqrt{\alpha}\lambda, \sqrt{\beta}\mu, \frac{4}{5}\inf_{s\in I}(\sqrt{s}f(s))\right) .$$

En effet si y est solution de (P_2) pour les données (λ, μ, f), alors $-y$ l'est pour les données $(-\lambda, -\mu, -f)$. Par conséquent elle vérifie, pour tout t dans I,

$$-y(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}\max\left(-\sqrt{\alpha}\lambda, -\sqrt{\beta}\mu, \frac{4}{5}\sup_{s\in I}(-b(s)f(s))\right)$$

ou encore

$$y(t) \geq -\frac{1}{\sqrt{t}}\max\left(-\sqrt{\alpha}\lambda, -\sqrt{\beta}\mu, -\frac{4}{5}\inf_{s\in I}(b(s)f(s))\right) ,$$

ce qui est bien la propriété annoncée.

Question II.2.1 Avec les notations de l'énoncé, $-t^2y'' - 2ty' + y$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-R;R[$ et on a

$$-t^2y'' - 2ty' + y = \sum_{p\geq 0} a_p(-p(p-1) - 2p + 1)t^p = -\sum_{p\geq 0}(p^2 + p - 1)a_p t^p .$$

Par conséquent si $\sum_{p\geq 0} b_p t^p$ est le développement en série entière de arctangente (valable sur $]-1;1[$), on a nécessairement $-(p^2+p-1)a_p = b_p$. Remarquons que le polynôme X^2+X-1 n'a pas de racine entière et donc que ces équations définissent de manière unique les coefficients a_p. Comme de plus arctangente est impaire, les coefficients b_{2p} (pour p entier) sont tous nuls. Il en est donc de même pour les coefficients a_{2p}.

Pour calculer les coefficients d'indice impair, il faut d'abord calculer le développement d'arctangente. Comme celle-ci est la primitive qui s'annule en 0 de $t \mapsto 1/(1+t^2)$, dont le développement en série entière est

$$\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p} ,$$

son développement en série entière est

$$\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{2p+1}t^{2p+1} .$$

(On vérifie bien qu'il est valable sur $]-1;1[$.)

Par conséquent, pour tout p entier, on a

$$a_{2p+1} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)(4p^2+6p+1)} .$$

Question II.2.2 Le rayon de convergence R de cette série est donné par la formule

$$\frac{1}{R} = \limsup_n |a_n|^{1/n} .$$

Comme $|a_{2p}|^{1/2p} = 0$ et

$$|a_{2p+1}|^{1/(2p+1)} = exp\left(-\frac{\log((2p+1)(4p^2+6p+1))}{2p+1}\right) ,$$

on a $\lim_{p\to\infty} |a_{2p}|^{1/2p} = 0$ et $\lim_{p\to\infty} |a_{2p+1}^{1/(2p+1)}| = 1$ et donc $1/R = 1$, soit $R = 1$.

Soit donc y la somme de cette série entière, définie sur $]-a;a[$ pour un réel a strictement compris entre 0 et 1. C'est évidemment une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Comme le rayon de convergence de la série est strictement supérieur à a, y est de classe C^∞ et ses dérivées sont données par dérivation terme à terme des séries. Par conséquent, d'après le calcul effectué en II.2.1, y est solution de l'équation différentielle étudiée.

Question II.2.3 La série de fonctions $(t \mapsto a_{2p+1}t^{2p+1})_{p\geq 0}$ est majorée en valeur absolue sur $[-1;1]$ par la série de Riemann convergente $(1/8p^3)_{p\geq 0}$. Par conséquent la série entière définissant y est normalement convergente et donc aussi, a fortiori, uniformément convergente.

La série des dérivées est elle aussi normalement, donc uniformément, convergente sur $[-1;1]$ majorée par la série de Riemann convergente $(1/4p^2)_{p\geq 0}$. D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, y' est donc somme de sa série dérivée sur $[-1;1]$.

Les critères précédents ne s'appliquent pas pour la série définissant y'', à savoir

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^{p+1}2p}{4p^2+6p+1} t^{2p-1} .$$

Néanmoins, pour tout t dans $[-1;1]$ (sauf 0), c'est une série alternée dont la valeur absolue est décroissante. En effet cette valeur absolue est l'inverse de $2p+3+1/2p$ (qui est manifestement croissante) fois t^{2p-1} (qui elle est manifestement décroissante puisque t est de valeur absolue inférieure à 1). Par conséquent la série reste est majorée en valeur absolue par la valeur absolue de son premier terme :

$$\left|\sum_{p\geq n} \frac{(-1)^{p+1}2p}{4p^2+6p+1} t^{2p-1}\right| \leq \frac{2n|t|^{2n-1}}{4n^2+6n+1} \leq \frac{2n}{4n^2+6n+1} \leq \frac{1}{2n}$$

et on a donc encore convergence uniforme de la série définissant y'' et elle est somme de cette série sur $[-1;1]$.

Remarque : la convergence uniforme était acquise sur tout compact inclus dans $]-1;1[$ par propriété des séries entières. Une fois la convergence uniforme acquise pour y et y', celle de y'' était en fait équivalente à celle d'arctangente, qui est le prototype des séries uniformément convergentes mais de signe non constant.

Question II.2.4 La série définissant y étant alternée de valeur absolue décroissante, on a pour tout t dans $]0;1[$ et tout entier n

$$\left|y(t) - \sum_{0\leq k\leq n} a_{2k+1}t^{2k+1}\right| = \left|\sum_{k>n} a_{2k+1}t^{2k+1}\right| \leq |a_{2n+3}|t^{2n+3} \leq |a_{2n+3}|$$

et donc l'erreur commise en remplaçant $y(t)$ par la somme partielle $\sum_{0\leq k\leq n} a_{2k+1}t^{2k+1}$ est majorée, indépendamment de t dans $]0;1[$, par

$$\frac{1}{8(n+1)^3}\ .$$

Pour que cette erreur soit inférieure à 10^{-5}, il suffit donc

$$\frac{1}{8(n+1)^3} \leq 10^{-5} \qquad \text{soit} \qquad \frac{10^{5/3}}{2} - 1 \leq n$$

et donc $n = 23$ convient. On trouve donc $\lambda = -0.33224$ et $\mu = -0.65847$ à 10^{-5} près.

Question II.2.5 On a démontré en $II.1$

$$y(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \max\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda, \sqrt{\frac{2}{3}}\mu, \frac{4}{5}\sup_{1/3\leq t\leq 2/3}(\sqrt{t}\arctan(t))\right)$$

et

$$y(t) \geq \frac{1}{\sqrt{t}} \inf\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda, \sqrt{\frac{2}{3}}\mu, \frac{4}{5}\inf_{1/3\leq s\leq 2/3}(\sqrt{s}\arctan(s))\right)\ .$$

Comme les fonctions racine carrée et arctangente sont croissantes sur $\mathbf{R}_+$, que le maximum est considéré est positif tandis que le minimum est lui négatif, on en déduit :

$$y(t) \leq \sqrt{3}\max\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda, \sqrt{\frac{2}{3}}\mu, \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

et

$$y(t) \geq \sqrt{3}\inf\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda, \sqrt{\frac{2}{3}}\mu, \frac{4}{5\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

ou encore

$$y(t) \leq \max\left(\lambda, \sqrt{2}\mu, \frac{4\sqrt{2}}{5}\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

et

$$y(t) \geq \inf\left(\lambda, \sqrt{2}\mu, \frac{4}{5}\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)\ .$$

Le majorant et le minorant les plus contraignants de y étant $\frac{4}{5\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\sqrt{2}\mu$ on trouve

$$-0.93122 \leq y(t) \leq 0.66515 \qquad \text{pour} \quad t \in \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]\ .$$

Partie III

Question III.1.1 L'équation différentielle considérée est une équation différentielle linéaire résolue d'ordre 2, elle admet donc, pour toute donnée initiale $(y(\alpha) = y_0, y'(\alpha) = y'_0)$, une unique solution définie sur I.

Question III.1.2 Puisque Y_0 est solution de l'équation différentielle $-y'' + wy = 0$, on peut écrire, pour tout x dans I,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\alpha^x \left(-Y_0''(s) + w(s)Y_0(s)\right) Y_0(s)ds \\
&= -\int_\alpha^x Y_0''(s)Y_0(s)ds + \int_\alpha^x w(s)Y_0(s)^2 ds \\
&= Y_0'(\alpha)Y_0(\alpha) - Y_0'(x)Y_0(x) + \int_\alpha^x Y_0'(s)^2 ds + \int_\alpha^x w(s)Y_0(s)^2 ds \\
Y_0'(x)Y_0(x) &= \int_\alpha^x Y_0'(s)^2 ds + \int_\alpha^x w(s)Y_0(s)^2 ds
\end{aligned}$$

Par conséquent comme w est strictement positive et x est supérieur à α, $Y_0'Y_0$ est positive sur I et si elle s'annule en x alors Y_0 et Y' sont identiquement nulles sur $]\alpha; x[$. Par conséquent, puisque $Y_0'(\alpha) = 1$, $Y_0'Y_0$ est strictement positive en dehors de α. En particulier $Y_0(\beta)$ est non nul.

Question III.1.3 Puisque Y_0 et Y_1 sont de classe C^2 sur I, leur déterminant wronskien W est de classe C^1 sur I et on a

$$W' = (Y_0Y_1' - Y_1Y_0')' = Y_0Y_1'' - Y_1Y_0'' = w(Y_0Y_1 - Y_1Y_0) = 0\ .$$

Par conséquent le déterminant wronskien W est constant sur l'intervalle (connexe) I et égal à sa valeur en α : -1.

Question III.1.4 Comme en I.2.1 on se ramène à un système linéaire d'ordre 1,

$$-\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ w & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

et on cherche y sous la forme $\lambda Y_0 + \mu Y_1$ avec λ et μ deux fonctions de classe C^1 sur I. Une telle fonction est solution de l'équation différentielle (ou du système linéaire) précédente si et seulement si

$$-\lambda'\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_0' \end{pmatrix} - \mu'\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

ou encore

$$-\begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 \\ Y_0' & Y_1' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = -\frac{1}{Y_0Y_1' - Y_1Y_0'}\begin{pmatrix} Y_1' & -Y_1 \\ -Y_0' & Y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

soit $\lambda' = -Y_1 f$ et $\mu' = Y_0 f$.

Au final la solution générale de l'équation différentielle étudiée est de la forme

$$y = -Y_0 \int Y_1 f + Y_1 \int Y_0 f$$

où les primitives sont choisies arbitrairement.

Question III.1.5 On cherche une solution y de l'équation différentielle $-y'' + wy = f$ telle que $y(\alpha) = \lambda$ et $y(\beta) = \mu$, pour λ et μ deux scalaires.

La condition $y(\alpha) = \lambda$ impose donc de prendre la primitive de $Y_0 f$ qui vaut λ en α, c'est-à-dire la fonction

$$t \mapsto \lambda + \int_\alpha^t Y_0(s)f(s)ds$$

et alors la condition $y(\beta)=\mu$ impose de prendre comme primitive de $Y_1 f$ la fonction

$$t \mapsto \frac{Y_1(\beta)}{Y_0(\beta)}\left(\mu-\lambda-\int_\alpha^\beta Y_0(s)f(s)ds\right)+\int_t^\beta Y_1(s)f(s)ds\ .$$

Réciproquement la fonction définie sur I par

$$y(t)=Y_0(t)\left(\frac{Y_1(\beta)}{Y_0(\beta)}\left(\mu-\lambda-\int_\alpha^\beta Y_0(s)f(s)ds\right)+\int_t^\beta Y_1(s)f(s)ds\right)+Y_1(t)\left(\lambda+\int_\alpha^t Y_0(s)f(s)ds\right)$$

est solution du problème (P_3) pour les données (λ,μ,f).

Par conséquent, quelle que soit la donnée (λ,μ,f), le problème (P_3) a une unique solution.

Question III.2.1 On a $y'z'=(y'z)'-y''z=(y'z)'+(f-wy)z$ et la formule demandée en résulte par intégration sur $[\alpha;\beta]$ en tenant compte de $z(\alpha)=z(\beta)=0$:

$$\int_\alpha^\beta y'(s)z'(s)ds+\int_\alpha^\beta w(s)y(s)z(s)ds=y'(\beta)z(\beta)-y'(\alpha)z(\alpha)+\int_\alpha^\beta f(s)z(s)ds=\int_\alpha^\beta f(s)z(s)ds\ .$$

Question III.2.2 Si t est négatif $tG(t)$ est nul et si t est positif t et $G(t)$ sont positifs et donc aussi $tG(t)$. Par conséquent $tG(t)$ est positif pour tout réel t.

Puisque z est composée de deux fonctions de classe C^1, l'une de I dans $\mathbf{R}$ et l'autre de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, c'est une fonction de classe C^1 sur I. Comme $y(\alpha)-K$ et $y(\beta)-K$ sont négatifs, $z(\alpha)$ et $z(\beta)$ sont nuls. Par conséquent z appartient à $C_0^1(I)$.

Question III.2.3 La fonction z est de classe C^1 sur I et sa dérivée est donnée, par le théorème de composition, par

$$z'(s)=y'(s)G'(y(s)-K)\ .$$

Par conséquent, d'après les deux questions précédentes, si K est supérieur à λ et μ :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta y'(s)^2G'(y(s)-K)ds+\int_\alpha^\beta w(s)(y(s)-K)G(y(s)-K)ds &= \int_\alpha^\beta y'(s)z'(s)ds+\int_\alpha^\beta w(s)y(s)z(s)ds\\ &\quad -K\int_\alpha^\beta w(s)G(y(s)-K)ds\\ &= \int_\alpha^\beta f(s)z(s)ds-K\int_\alpha^\beta w(s)G(y(s)-K)ds\\ &= \int_\alpha^\beta (f(s)-Kw(s))G(y(s)-K)ds\ .\end{aligned}$$

Si K est assez grand pour que $f(s)-Kw(s)$ soit négatif sur I, le membre de droite est négatif puisque l'intégrand est le produit d'une fonction toujours négative et d'une fonction toujours positive. Puisque G est croissante, le premier terme du membre de gauche est l'intégrale d'une fonction positive et est donc positif. Enfin le deuxième terme est l'intégrale du produit de deux fonctions positives : w et $t\mapsto tG(t)$. Une telle égalité n'est donc possible que si toutes ces intégrales sont nulles et donc tous les intégrands nuls. Comme w est strictement positive, il en résulte $(y-K)z$ est nulle sur I. Par définition de G cela impose $y-K$ négatif ou nul, i.e. $y\le K$.

Question III.2.4 Tout d'abord remarquons qu'un K comme dans la question précédente existe, puisque w est strictement positive, il suffit en effet de prendre K supérieur à

$$\sup_{s\in I}\frac{f(s)}{w(s)}\ .$$

On a donc

$$y \le \max\left(\lambda, \mu, \sup_{s\in I}\frac{f(s)}{w(s)}\right)$$

ou, autrement dit, (P_3) vérifie $(P.M)$ pour les fonctions $a=1$, $b=1/w$ et les scalaires $A=B=1$.

On va (encore) démontrer la propriété de minoration des solutions de (P_3) suivante :

$$y \ge \inf\left(\lambda, \mu, \inf_{s\in I}\frac{f(s)}{w(s)}\right) .$$

En effet si y est solution de (P_3) pour les données (λ,μ,f), alors $-y$ l'est pour les données $(-\lambda,-\mu,-f)$. Par conséquent elle vérifie

$$-y \le \max\left(-\lambda, -\mu, \sup_{s\in I}\frac{-f(s)}{w(s)}\right)$$

ou encore

$$y \ge -\max\left(-\lambda, -\mu, -\inf_{s\in I}\frac{f(s)}{w(s)}\right) ,$$

ce qui est bien la propriété annoncée.

Question III.3.1 Puisque h est de classe C^2 et strictement positive, il en est de même pour h^{-2} qui est donc a fortiori continue, ce qui montre l'existence de k. Comme la dérivée de k est strictement positive sur I, c'est une fonction continue et croissante de I sur $k(I)$. Par conséquent c'est une bijection bicontinue et croissante de I sur $k(I)$ d'où l'existence de k^{-1}.

En fait comme k une fonction de classe C^3 croissante de I sur $k(I)$, c'est même un C^3-difféomorphisme de I sur $k(I)$.

Soit y une fonction quelconque de classe C^2 sur I. Comme h ne s'annule jamais et k est C^2-difféomorphisme de I sur $k(I)$, il existe une unique fonction z de $k(I)$ dans $\mathbf{R}$ telle que $y = h.z\circ k$, alors $y' = h'.z\circ k + h^{-1}.z'\circ k$ et

$$y'' = h''.z\circ k + \frac{h'}{h^2}z'\circ k - \frac{h'}{h^2}z'\circ k + h^{-3}.z''\circ k = h''.z\circ k + h^{-3}.z''\circ k .$$

Par conséquent

$$-y'' + wy = (-h'' + wh)z\circ k - h^{-3}.z''\circ k .$$

Et y est solution de l'équation différentielle $-y''+wy=f$ si et seulement si z est solution de

$$-h^{-3}\circ k^{-1}.z'' + (-h''+wh)\circ k^{-1}.z = f\circ k^{-1}$$

ou encore si et seulement si

$$-z'' + [(-h''+wh)h^3]\circ k^{-1}.z = (h^3 f)\circ k^{-1} .$$

De plus $y(\alpha) = z(\alpha')$ et $y(\beta) = z(\beta')$, donc y est solution du problème (P_4) pour $u=-1$, $v=0$, w et les données (λ,μ,f) si et seulement si z est solution du problème de type (P_4) pour $u=-1$, $v=0$ et $w = [(-h''+wh)h^3]\circ k^{-1}$ et les données $(\lambda, \mu, (h^3 f)\circ k^{-1})$.

Question III.3.2 Si la fonction h est telle que $-h''+wh$ soit strictement positive, comme il en est de même de h (et aussi de h^3), y est solution de (P_4) si et seulement si z, définie précédemment, est solution d'un problème de type (P_3).

Comme il y a existence et unicité de z pour les données $(\lambda/, \mu, (h^3 f)\circ k^{-1})$, il y a également existence et unicité de y pour les données (λ,μ,f).

Comme (P_3) vérifie $(P.M)$, on a pour certaines fonctions a et b et des scalaires A et B

$$z \le a\max\left(A\lambda, B\mu, \sup_{s\in k(I)} b(s)(h^3 f)(k^{-1}(s))\right)$$

et donc

$$y \le h.a\circ k\max\left(A\lambda, B\mu, \sup_{s\in I} b(k(s))h^3(s)f(s)\right)$$

ou, autrement dit, (P_4) vérifie $(P.M)$ pour les fonctions $h.a \circ k$ et $h^3.b \circ k$ et les scalaires A et B.

Question III.3.3 Comme w est continue sur I, elle atteint son minimum sur I. Par hypothèse sur w il est strictement supérieur à $-\pi^2/(\beta-\alpha)^2$. Par conséquent $]-\pi^2/(\beta-\alpha)^2, \min_{s\in I} w(s)[$ est un intervalle ouvert et non vide inclus dans $\mathbf{R}_-^*$. Puisque la fonction $m \mapsto -m^2$ réalise une bijection entre $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, l'existence de m strictement positif tel que $-\pi^2/(\beta-\alpha)^2 < -m^2 < min_{s\in I} w(s)$ est claire. Par croissance de la fonction carré, il est équivalent d'écrire $0 < m < \pi/(\beta-\alpha)$ et $min_{s\in I}(w(s)+m^2) > 0$, ce qui était requis.

Remarquons que $0 < m(\beta-\alpha)/2 < \pi/2$ et $t \mapsto m(t-(\alpha+\beta)/2)$ envoie I sur $[-m(\beta-\alpha)/2; m(\beta-\alpha)/2]$. Par conséquent h est une fonction strictement positive de classe C^∞ de I dans $[1; 1/\cos(m(\beta-\alpha)/2)]$ et $h(\alpha) = h(\beta) = 1$.

Par définition même de h, on a $-h'' - m^2 h = 0$ et donc $-h'' + wh = (w+m^2)h$. Comme $w + m^2$ et h sont strictement positives, il en est de même pour $-h'' + wh$. Par conséquent le problème (P_4) pour $u = -1$, $v = 0$ et w admet une unique solution quelle que soit la donnée (λ, μ, f) et on a une propriété de majoration (et de minoration) des solutions de type $(P.M)$ pour $a = h$, $b = h^3/[(-h''+wh)h^3] \circ k^{-1} \circ k = 1/(-h''+wh) = 1/(w+m^2)h$ et $A = B = 1$ ou encore, pour tout t dans I,

$$y(t) \leq \frac{\cos\left(m\left(t - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\cos\left(m\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} \max\left(\lambda, \mu, \sup_{t\in I} \frac{f(t)}{(m^2+w(t))\cos\left(m\left(t-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}\right)$$

et

$$y(t) \geq \frac{\cos\left(m\left(t - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\cos\left(m\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} \inf\left(\lambda, \mu, \inf_{t\in I} \frac{f(t)}{(m^2+w(t))\cos\left(m\left(t-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}\right) .$$

Partie IV

Question IV.1.1 Avec les notations de l'énoncé, $y = y_1 - y_2$ est solution de (P) pour les données $(\lambda_1 - \lambda_2, \mu_1 - \mu_2, f_1 - f_2)$ et, en conséquence, par positivité de a, b, A et B,

$$y_1 - y_2 \leq a \max(A(\lambda_1-\lambda_2), B(\mu_1-\mu_2), \sup_{s\in I} b(s)(f_1(s) - f_2(s))) \leq 0$$

i.e. $y_1 \leq y_2$.

Question IV.1.2 Si y_1 et y_2 sont toutes deux solutions de (P) pour les données (λ, μ, f), en appliquant ce qui précède successivement aux deux couples (y_1, y_2) et (y_2, y_1), on obtient $y_1 = y_2$, i.e. si (P) a une solution pour la donnée (λ, μ, f), elle est unique.

Question IV.2 Avec les hypothèses de l'énoncé, les solutions de l'équation différentielle $uy'' + vy' + wy = 0$ sont les fonctions de la forme $c.\sin(\pi(t-\varphi)/(\beta-\alpha))$ pour c et φ deux scalaires. En particulier les fonctions

$$t \mapsto \sin\left(\pi\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \qquad \text{et} \qquad t \mapsto -\sin\left(\pi\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

sont toutes deux solutions de (P) pour les données $(0,0,0)$, bien qu'évidemment distinctes.

D'après la question précédente (P) ne peut donc vérifier $(P.M)$.