Partie I
Le carré

Question I.1.1. On considère trois cas donnés par x dans $\mathcal{R}$, x sur l'un des quatres segments ou x dans le reste du plan. Ces trois régions sont respectivement décrites par les inégalités et égalités suivantes :

1. $\max\{|x|,|y|\} < 1$.
2. $\max\{|x|,|y|\} = 1$.
3. $\max\{|x|,|y|\} > 1$.

Dans le premier domaine, la quantité $r = \min\{1 - |x|; 1 - |y|\}$ est donc strictement positive et si N est un point du disque ouvert de centre M et de rayon r, de coordonnées (x',y'), on a

$$|x'| \leq |x| + |x' - x| < |x| + r \leq 1 \quad \text{et} \quad |y'| \leq |y| + |y' - y| < |y| + r \leq 1 \ .$$

Par conséquent le disque considéré est entièrement inclus dans $\mathcal{R}$ et M n'appartient donc pas à la frontière de $\mathcal{R}$.

Dans le second domaine, si r est un réel strictement positif arbitraire posons $r' = \min\{1/2; r/2\}$. Le point M appartient au disque ouvert de centre M et de rayon r et n'appartient pas à $\mathcal{R}$. Soit N le point de coordonnées $(x',y') = (x - sgn(x)r', y - sgn(y)r')$ où sgn désigne la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_+^*$, -1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et 0 en 0. On a $d(M,N) = \sqrt{2}r' < r$ et donc N appartient au disque ouvert de centre M et de rayon r. Par contre on a

$$|x'| = ||x| - r'| \quad \text{et} \quad |y'| = ||y| - r'| \ .$$

Or

$$|x| - r' < |x| \leq 1 \quad \text{et} \quad r' - |x| \leq r' < 1$$

et donc $|x'| < 1$. De même $|y'| < 1$ et donc N appartient à $\mathcal{R}$. Pour tout disque ouvert de centre M on a donc trouvé deux points de ce disque appartenant l'un à $\mathcal{R}$, l'autre à son complémentaire, i.e. M est sur la frontière de $\mathcal{R}$.

Enfin, dans le troisième domaine, la quantité $r = \max\{|x| - 1, |y| - 1\}$ est strictement positive et si N est un point du disque ouvert de centre M et de rayon r, de coordonnées (x',y'), on a

$$|x'| > |x| - r \quad \text{et} \quad |y'| > |y| - r$$

et donc

$$\max\{|x'|,|y'|\} > \max\{|x|,|y|\} - r = 1 \ .$$

Par conséquent le disque considéré ne rencontre pas $\mathcal{R}$ et M n'appartient donc pas à la frontière de $\mathcal{R}$.

Il en résulte que $\delta\mathcal{R}$ est la réunion des quatre segments $]A,B[$, $]B,C[$, $]C,D[$ et $]D,A[$.

Question I.1.2. Le triangle OAD est formé des points de $\mathcal{R}$ tels que $|y| \leq x$ et donc son intérieur est exactement l'ensemble des points (x,y) tels que $0 \leq |y| < x < 1$.

On considère un point T de $\delta\mathcal{R}$. Ses coordonnées sont donc soit $(\pm 1, y')$, soit $(x', \pm 1)$. Dans le premier cas on a

$$d(M,T) = \sqrt{(x \mp 1)^2 + (y - y')^2} \geq |x \mp 1| = 1 \mp x \geq 1 - x$$

avec égalité si et seulement si $y' = y$ et $\pm 1 = 1$. Dans le second cas on a

$$d(M,T) = \sqrt{(x-x')^2 + (y \pm 1)^2} \geq |y \pm 1| = 1 - |y| > 1 - x\ .$$

Par conséquent $d(M,\delta\mathcal{R}) = 1 - x$ et cette distance n'est atteinte qu'en $T = (1,y)$, et donc $n(M) = 1$.

Question I.1.3. L'intervalle ouvert $]OA[$ est défini par $0 < y = x < 1$. Le même calcul que précédemment montre que

$$d(M,T) \geq 1 - x \quad \text{ou} \quad d(M,T) \geq 1 - y$$

avec égalité seulement dans les cas $T = (1,y)$ ou $T = (x,1)$. On a donc bien $d(M,\delta\mathcal{R}) = 1 - x = 1 - y$ et $n(M) = 2$.

Question I.1.4. Pour $T = (x,y)$ dans $\delta\mathcal{R}$, on a

$$d(O,T) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \max\{|x|,|y|\} = 1$$

avec égalité si et seulement si $\min\{|x|,|y|\} = 0$. On a donc $d(O,\delta\mathcal{R}) = 1$ et cette distance est atteinte uniquement en $T = (1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ ou $(0,-1)$. Par conséquent $n(O) = 4$.

Question I.1.5. Soit r une isométrie du plan préservant $\mathcal{R}$ et $\delta\mathcal{R}$ (en fait cette seconde partie est impliquée par la première supposition). Pour M dans $\mathcal{R}$, on a

$$d(M,\delta\mathcal{R}) = d(r(M),\delta\mathcal{R}) \quad \text{et} \quad n(M) = n(r(M))\ .$$

En effet si T appartient à $\delta\mathcal{R}$, on a $d(M,T) = d(r(M),r(T))$. La bijectivité de r entraîne que le minimum sur T dans $\delta\mathcal{R}$ de chacune des deux quantités est la distance à $\delta\mathcal{R}$, et que ces deux distances sont égales. De plus cette distance est atteinte en T pour M si et seulement si elle est atteinte en $r(T)$ pour $r(M)$. La bijectivité de r entraîne donc une fois encore que $n(M) = n(r(M))$.

Remarquons que les rotations de centre O et dont une mesure de l'angle est $\pi/2$, π ou $3\pi/2$ préservent $\mathcal{R}$ et $\delta\mathcal{R}$ puisqu'elles préservent les ensembles $\{|x|,|y|\}$.

Or $\mathcal{R}$ est la réunion de l'intérieur de OAD, de $]O,A[$, de leurs images par ces trois rotations et de O. On a donc $n(M) \geq 2$ uniquement pour les points de $]O,A[$, de leurs images par l'une des trois rotations et pour O, i.e. pour les points de $]A,C[$ et de $]B,D[$.

Question I.1.6. Le raisonnement précédent s'applique en fait à la situation suivante : on se donne s une similitude du plan de rapport λ envoyant $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$ ainsi que $\delta\mathcal{R}$ sur $\delta\mathcal{R}'$ (cette seconde condition est en fait automatique), alors, pour M dans $\mathcal{R}$, on a

$$\lambda d(M,\delta\mathcal{R}) = d(s(M),\delta\mathcal{R}) \quad \text{et} \quad n(M) = n(s(M))\ .$$

La démonstration suit les mêmes arguments que la précédente.

Si maintenant on se donne $\mathcal{R}'$ un carré $A'B'C'D'$, remarquons que $(B',\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'})$ forme un répère orthogonal du plan dont les vecteurs de base ont même norme. Il en est de même pour $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$. Il existe dont une unique application affine s envoyant (B,A,C) sur (B',A',C') et cette application est en fait une similitude. Comme D est le barycentre de $(A,1)$, $(B,-1)$ et $(C,1)$ son image est le barycentre de $(A',1)$, $(B',-1)$ et $(C',1)$, c'est donc D'. Or $\mathcal{R}'$ et $\delta\mathcal{R}'$ sont définis (par des conditions barycentriques) à partir de A', B', C' et D' comme $\mathcal{R}$ et $\delta\mathcal{R}$ le sont à partir de A, B, C et D ; comme s préserve les barycentres, s envoie donc $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$ et $\delta\mathcal{R}$ sur $\delta\mathcal{R}'$. Le squelette de $\mathcal{R}'$ est donc l'image par s du squelette de $\mathcal{R}$, i.e. la réunion de $]s(A),s(C)[=]A',C'[$ et de $]s(B),s(D)[=]B',D'[$, ou encore la réunion des diagonales, sommets non compris.

Le disque

Question I.2.1. Soit M un point de $\mathcal{R}$ distinct de A, N le point de $\delta\mathcal{R}$ (i.e. du cercle de centre A et de rayon r) situé sur la demi-droite issue de A passant par M et T un point quelconque de ce cercle.

On a
$$r = d(A,T) \leq d(A,M) + d(M,T)$$
avec égalité si et seulement si M est sur $[A,T]$, i.e. si et seulement si $T = N$. Il en résulte $d(M,\delta\mathcal{R}) = r - d(A,M)$ et $n(M) = 1$.

Question I.2.2. Pour tout point du cercle, on a $d(A,T) = r$ et donc $d(A,\delta\mathcal{R}) = r$ et $n(A) = +\infty$.

Question I.2.3 . Il en résulte que le squelette de $\mathcal{R}$ est $\{A\}$.

Le triangle

Question I.3.1. Les coefficients barycentriques de M relativement à (A,B,C) sont proportionnels aux aires des triangles formés par M et les deux sommets opposés. Rappelons la démonstration : soit M donné par ses coefficients barycentriques
$$M = \alpha A + \beta B + \gamma C \qquad \text{avec } \alpha + \beta + \gamma = 1 \ .$$
On a donc
$$\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{CB} = \alpha\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{BC} \ .$$
Il en résulte
$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) &= \alpha^2 \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + \alpha\beta \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) - \alpha\gamma \det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}) \\
&= \alpha \left(\alpha \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + \beta \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - \gamma \det(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC})\right) \\
&= \alpha \left(\alpha \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + \beta \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) - \gamma \det(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})\right) \\
&= \alpha \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\,(\alpha + \beta + \gamma) \\
&= \alpha \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \ .
\end{aligned}$$
Or, en désignant par $\mathcal{A}$ l'aire d'un triangle, on a $|\det(\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XZ})| = 2\mathcal{A}(XYZ)$. Si maintenant M est intérieur à ABC tous ses coefficients barycentriques sont positifs et on a donc
$$(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{\mathcal{A}(MBC)}{\mathcal{A}(ABC)},\frac{\mathcal{A}(MCA)}{\mathcal{A}(ABC)},\frac{\mathcal{A}(MAB)}{\mathcal{A}(ABC)}\right) \ .$$
Comme l'aire de MBC est la moitié du produit de a avec la distance de M à (BC), il en résulte
$$d(M,(BC)) = \frac{2\alpha S}{a} \ .$$

Question I.3.2. Dans le cas du cercle inscrit, toutes les distances de M aux droites portant les côtés du triangle sont égales et donc les rapports α/a, β/b et γ/c sont égaux. Il en résulte que les coordonnées barycentriques de I sont proportionnelles aux longueurs des côtés opposés :
$$(\alpha_I,\beta_I,\gamma_I) = \left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right) \ .$$

Question I.3.3. On peut récrire le résultat précédent sous la forme
$$(a+b+c)I = aA + bB + cC$$

et donc

$$aA = (a+b+c)I - bB - cC\ .$$

Or un point M est intérieur à IBC si et seulement si ses coefficients barycentriques relativement à I, B et C sont tous strictement positifs. Calculons-les en fonction des coefficients relatifs à A, B et C :

$$M = \alpha A + \beta B + \gamma C = \frac{\alpha(a+b+c)}{a} I + (\beta - \frac{\alpha b}{a})B + (\gamma - \frac{\alpha c}{a})C$$

et M est donc intérieur à IBC si et seulement si

$$\alpha > 0\,,\quad \beta - \frac{\alpha b}{a} > 0 \quad \text{et} \quad \gamma - \frac{\alpha c}{a} > 0$$

ou, autrement dit,

$$0 < \frac{\alpha}{a} < \min\left(\frac{\beta}{b},\frac{\gamma}{c}\right)\ .$$

À noter que l'énoncé comporte une erreur puisqu'il néglige la positivité de α. Il est à supposer que l'auteur pensait que l'hypothèse M appartient à $\mathcal{R}$ mise en I.3.1. est encore valable pour cette question …

Question I.3.4. On a (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} &= \left(\alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BC} \\
&= \alpha\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \gamma a^2 \\
&\geq -\alpha ca + \gamma a^2 \\
&\geq a^2 c\left(\frac{\gamma}{c} - \frac{\alpha}{a}\right) \\
&> 0\ .
\end{aligned}$$

Soit N la projection orthogonale de M sur (BC), on a

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BC} = \overline{BN}.\overline{BC} > 0$$

et donc N et C appartiennent à une même demi-droite issue de B, ou encore N est sur la demi-droite issue de B, passant par C.

Le même argument montre que $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}$ est strictement positif et que donc N appartient à la demi-droite issue de C passant par B. Il en résulte que N appartient au segment $[B,C]$. Comme N réalise le minimum de la distance de M à un point de (BC), *a fortiori* il réalise le minimum sur le segment $[B,C]$ et donc

$$d(M,(BC)) = d(M,[B,C]) = d(M,N)\ .$$

La projection orthogonale N étant l'unique point de (BC) à réaliser le minimum de distance de M à un point de (BC), c'est encore vrai par rapport aux points de $[B,C]$. Comme $d(M,[A,B]) \leq d(M,(AB))$ et $d(M,[A,C]) \leq d(M,(AC))$, on a aussi

$$d(M,N) = d(M,(BC)) = \frac{2S\alpha}{a} < \min\left(\frac{2S\beta}{b},\frac{2S\gamma}{c}\right) = \min\left(d(M,(AC)),d(M,(AB))\right) \leq \min\left(d(M,[A,C]),d(M,[A,B])\right)$$

et donc $n(M) = 1$.

Question I.3.5. Considérons les points de $[IB[$. Ils appartiennent simultanément à IAB et IBC et les arguments de I.3.3. montrent que

$$0 \leq \frac{\alpha}{a} = \frac{\gamma}{c} \leq \frac{\beta}{b}$$

et ceux de I.3.4. montrent que

$$d(M,(BC)) = d(M,[B,C]) \quad \text{et} \quad d(M,(AB)) = d(M,[A,B])\ .$$

Comme on a justement $d(M,(BC)) = d(M,(AB))$ puisque M appartient à la bissectrice en A à ABC (et aussi parce que $\alpha/a = \gamma/c$), le minimum de distance de M aux côtés de ABC est atteint au moins en les projections orthogonales de M sur (BC) et sur (AB). Comme M est distinct de B (et que ABC n'est pas aplati), ces deux projections sont distinctes et $n(M) \geq 2$.

Les mêmes arguments montrent que $n(M) = 1$ pour tout point intérieur à l'un des triangles IBC, IAB ou ICA et $n(M) \geq 2$ pour tout point de $[I,A[$, $[I,B[$ ou $[I,C[$. Donc le squelette de $\mathcal{R}$ est la réunion de $[I,A[$, $[I,B[$ et $[I,C[$.

Le parallélogramme

Question I.4.1. On a

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) &= \left(\widehat{\overrightarrow{AD},-\overrightarrow{AB}}\right)\\
&= \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right) + \pi\\
&= \pi - \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$3\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) = \pi$$

(cette égalité étant évidemment une égalité de mesures d'angles comprises modulo 2π).

Il en résulte que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$ est $\pi/3$ modulo $2\pi/3$, ou encore que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$ est $\pi/3$, π ou $5\pi/3$ modulo 2π. Mais on sait aussi que le sinus de cet angle est strictement positif et donc que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$ admet $\pi/3$ comme mesure.

On calcule maintenant

$$BD^2 = BA^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = AD^2(4 + 1 + 4\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})) = AD^2(5 + 4\cos(4\pi/3)) = 3AD^2$$

et

$$AD^2 = BA^2 + BD^2 + 2\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BA} = AD^2(4 + 3 + 4\sqrt{3}\cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{BA}))$$

et donc

$$\cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{BA}) = -\frac{6}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Il en résulte

$$\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}) = \cos(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}) = -\cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{BA}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et donc $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}\right)$ admet $\pm\pi/6$ comme mesure. Au vu de l'orientation choisie, c'est l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}}\right)$ qui est positif et donc une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}\right)$ est $-\pi/6$.

Question I.4.2. Le squelette est l'ensemble des points qui sont équidistants de deux côtés qui sont aussi les côtés qui réalisent le minimum de distance à la frontière du parallélogramme.

Soit donc I le point d'intersection des bissectrices issues de A et D, J le point d'intersection des bissectrices issues de B et C, le squelette est la réunion de $]A,I]$, $]D,I]$, $[I,J]$, $]B,J]$ et $]C,J]$.

Question I.4.3. L'angle entre AD et CD est $2\pi/3$ puisque CD est parallèle à AB. Dans le triangle AID les angles sont donc ceux-ci : $\pi/6$ en A, $\pi/3$ en D et $\pi/2$ en I. Comme AID est rectangle en I, on a

$$AI = AD\sin(\hat{D}) = l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et on obtient de même

$$AI = CJ = l\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad AJ = CI = \frac{l}{2}\ .$$

Et on a $IK = AI\sin(\pi/6)/\sin(2\pi/3) = l/2$, donc $IJ = 2l - l/2 - l/2 = l$. La longueur totale du squelette est donc

$$(2+\sqrt{3})l\ .$$

L'ellipse

Question I.5.1. La tangente en (x_0,y_0) à l'ellipse est donnée par l'équation cartésienne

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

et donc sa normale admet $(x_0/a^2,y_0/b^2)$ comme vecteur directeur. Les points de cette normale sont donc de la forme

$$\left(x_0 - \frac{tx_0}{a^2}, y_0 - \frac{ty_0}{b^2}\right) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}\ .$$

Son intersection avec l'axe des abscisses est donc $(x_0(1-b^2/a^2),0)$ ou encore $(x_0c^2/a^2,0)$. Comme x_0 varie strictement entre $-a$ et a, le lieu cherché est donc l'ensemble des points $(x,0)$ avec $|x| < c^2/a$.

Question I.5.2. L'idée directrice est que si M appartient à la normale en T à l'ellipse et a une ordonnée de même signe, alors $d(M,T)$ est minimale. On peut trouver cela en se rappelant de la formule des extrema liés. En effet la fonction $f(x,y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ est minimale sur la courbe $g(x,y) = x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ en des points tels que la différentielle de f est proportionnelle à la différentielle de g. Ceci s'écrit

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x-x_0) & 2\frac{x}{a^2} \\ 2(y-y_0) & 2\frac{y}{b^2} \end{vmatrix} = 0$$

ou encore $(x-x_0,y-y_0)$ parallèle à $(x/a^2,y/b^2)$ qui n'est rien d'autre que le vecteur normal à l'ellipse en (x,y) comme on l'a déjà remarqué précédemment. Il faut donc que M appartienne à une normale de l'ellipse.

La question précédente laisse penser que la réponse est le lieu que l'on vient de trouver et on va donc séparer les cas.

Soit $M=(x_0,0)$ un point de $\mathcal{R}$ d'ordonnée nulle. Posons $x_1=a^2x_0/c^2$. Soit maintenant $T=(x,y)$ un point quelconque de l'ellipse, on a

$$\begin{aligned} d(M,T)=(x-x_0)^2+y^2 &= x^2-2x_0x+x_0^2+y^2 \\ &= b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2x_0x+x_0^2 \\ &= b^2+\frac{c^2}{a^2}x^2-2x_0x+x_0^2 \\ &= b^2+\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2x_0}{c^2}\right)^2+x_0^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right) \\ &= \frac{c^2}{a^2}(x-x_1)^2+b^2-\frac{b^2x_0}{c^2} \end{aligned}$$

et en particulier cette quantité est minimale si et seulement si $|x-x_1|$ est minimal.

Si M appartient à $\mathcal{V}$, on a $|x_0|<c^2/a$ et donc $|x_1|<a$; aussi il existe exactement deux points T_1 et T_1' de l'ellipse ayant x_1 comme abscisse, ceux pour $y_1=\pm b\sqrt{1-x_1^2/a^2}$. Le minimum est donc atteint uniquement pour les points de l'ellipse tels que $x=x_1$, i.e. pour T_1 et T_1'. On a donc $n(M)=2$ et tous ces points appartiennent au squelette de $\mathcal{R}$.

Supposons maintenant que x_0 soit tel que $|x_0|\geq c^2/a$. Cette fois-ci $|x_1|\geq a$ et donc le minimum est atteint pour $x=sgn(x_1)a$ (ce qui est soit A, soit A') et uniquement là. On a donc $n(M)=1$ et M n'appartient pas au squelette de $\mathcal{R}$.

Soit maintenant un point M de $\mathcal{R}$ d'ordonnée non nulle. On commence par montrer qu'il existe un point T_1 de l'ellipse d'ordonnée de même signe que celle de M et tel que la normale en T_1 à l'ellipse passe par M. C'est en fait presque une certitude d'après la remarque du début, mais faisons le de manière élémentaire !

On cherche donc (x_1,y_1) tel que $x_0=x_1(1-t/a^2)$ et $y_0=y_1(1-t/b^2)$ pour un t dans $]0,b^2[$ avec $x_1^2/a^2+y^2/b^2=1$. On calcule

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=\frac{x_0^2}{a^2(1-t/a^2)^2}+\frac{y_0^2}{b^2(1-t/b^2)^2}-1\ .$$

C'est donc une fonction continue de t sur $[0;b^2[$. Quand t tend vers b^2 par valeurs inférieures, cette fonction tend vers $+\infty$. Sa valeur en 0 est

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1$$

et est donc inférieure à 0 puisque M est intérieur à l'ellipse. L'existence d'un tel point T_1 est donc garantie !

Soit maintenant N le point d'intersection de (T_1M) avec (AA'). D'après ce qui précède N est de coordonnées $(x_1c^2/a,0)$ et le point T_1 est le même que celui que l'on avait associé à N dans la discussion précédente. En particulier le disque fermé de centre N et de rayon NT_1 coupe l'ellipse en deux points T_1 et T_1'. Comme M est entre N et T_1, le disque fermé de centre M et de rayon MT_1 est inclus dans le disque précédent et possède donc au plus deux points de l'ellipse. Mais T_1 et T_1' sont symétriques par rapport à l'axe focal (AA') et donc N appartient à leur médiatrice. Il en résulte que M n'y appartient pas et donc que $d(M,T_1')>d(M,T_1)$. Ceci prouve que $n(M)=1$ et donc que M n'appartient pas au squelette de $\mathcal{R}$.

En résumé le squelette de $\mathcal{R}$ est $\mathcal{V}$.

La tête de chat

Question I.6.1. Comme d'habitude la question est de trouver les lieux d'équidistance entre les diverses composantes de $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{R}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on se contente d'étudier la moitié d'abscisses positives. Dans cette moitié la distance à un point de la frontière d'abscisse négative est toujours plus grande que la distance à son symétrique et donc on est conduit à étudier les lieux d'équidistance entre les deux segments et l'arc de cercle. Entre les deux segments, on sait, c'est la bissectrice qui donne le squelette. Quand le premier segment s'interrompt on compare la distance au point B au second segment, l'égalité de ces deux distances définit une parabole de foyer B et de directrice (UT). Le point O appartient à cette parabole et donc le cercle n'interviendra pas : aucun point n'est équidistant du cercle et du reste de la frontière (sauf O).

On va donc démontrer que le squelette est la réunion de la bissectrice intérieure de $[KB)$ et $[K,T)$ commençant par K (non inclus) et stoppée en P le point qui se projette orthogonalement en B (i.e. l'intersection de la bissectrice et de la perpendiculaire en B à (KB)) et de l'arc de parabole de foyer B et de directrice (UT) commençant en P et terminant en O.

Soit donc P l'intersection de la bissectrice intérieure de $[KB)$ et $[K,T)$ et de la perpendiculaire en B à (KB). On note H sa projection orthogonale sur (UT). On partitionne la tête de chat grâce aux segments $[K,P]$, $[B,P]$, $[P,H]$, $[O,T]$, $[O,B]$ et à l'arc de parabole entre P et O.

On va calculer les coordonnées des points intervenants.

Le triangle OTU est rectangle en T puisque (UT) est tangente au cercle et que $[O,T]$ est un rayon de ce cercle. Le sinus de l'angle en U est donc donné par le rapport du côté opposé et de l'hypothénuse. C'est donc $1/2$. Donc l'angle en U est $\pi/6$.

Dans le triangle BKU l'angle en U est donc encore $\pi/6$. L'angle en B est l'angle entre (BK) est la verticale, ce qui est aussi l'angle entre UT' et la verticale, i.e. l'angle en U du triangle $OT'U$, qui est encore $\pi/6$ par symétrie. Donc BKU est isocèle en K, d'angle en B et U égaux à $\pi/6$. K est donc sur la médiatrice de B et U et donc d'ordonnée $3/2$. On a

$$\frac{BK}{\sin(\hat{U})} = \frac{BU}{\sin(\hat{K})}$$

et donc $BK = \sin(2\pi/3)/\sin(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$. Si $K = (x,3/2)$, on a aussi

$$\frac{1}{3} = BK^2 = x^2 - \frac{1}{4}$$

et donc $x = 1/\sqrt{12} = 1/2\sqrt{3} = \sqrt{3}/6$, i.e.

$$K = \left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{3}{2}\right) .$$

L'angle en K du triangle KBT étant le complémentaire de l'angle en K du triangle KBU, c'est $\pi/3$. La bissectrice intérieure en K fait donc un angle $\pi/6$ avec $[K,B)$, c'est donc qu'elle est verticale. En particulier P a même abscisse que K. Comme le triangle KBP est rectangle en B, on a $\sin(\hat{P}) = BK/KP$ et donc $KP = 2BK/\sqrt{3} = 2/3$. Il en résulte

$$P = \left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{5}{6}\right) .$$

La droite (UT) admet pour équation

$$\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} - 1 = 0$$

(la pente de cette droite est $-\pi/3$ d'après le calcul de l'angle en U du triangle OTU et $U = (0,2)$ lui appartient).

Les coordonnées de T sont donc

$$T = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

La perpendiculaire à (UT) en P a donc des points de la forme $(\sqrt{3}/6 + t\sqrt{3}/2, 5/6 + t/2)$ et donc la projection H de P sur (UT) admet pour coordonnées

$$H = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right).$$

On vérifie bien que H est sur le segment $[K,T]$.

La parabole de foyer B et de directrice (UT) passe par P et O puisque ces points en sont équidistants.

On va maintenant utiliser les remarques suivantes :

- Pour tout point au dessus de (BP) la distance à $[B,K]$ est aussi la distance à (BK). En dessous de cette droite, la distance à $[B,K]$ est la distance à B.
- Pour tout point au dessus de (OT) la distance à $[K,T]$ est aussi la distance à (KT). En dessous de cette droite, la distance à $[K,T]$ est la distance à T.
- La droite (PH) est située au dessus de (OT).
- À gauche de l'arc de parabole entre P et O, la distance à B est inférieure à la distance à la directrice $(UT) = (KT)$. À droite c'est le contraire qui se produit.

On en déduit l'analyse suivante :

- À l'intérieur des triangles KBP ou KHP la distance d'un point M de $\mathcal{R}$ est donné par la distance de M à $[B,K]$ ou $[H,K]$ et donc $n(M) = 1$.
- En dessous de $[B,P]$ et $[P,H]$ et au-dessus de $[O,T]$, on a deux cas, à gauche de la parabole, le minimum de distance est réalisé en B et à droite il est réalisé sur (UT), c'est-à-dire ici sur $[H,T]$. On a donc encore $n(M) = 1$.
- En dessous de $[O,T]$, le minimum est réalisé sur le cercle et on est ramené à l'étude de I.2., on a donc $n(M) = 1$.
- Sur $]B,P[$ le minimum est en B. Sur $]H,P[$, il est en H. Sur $]O,T[$ il est en T. On a donc partout $n(M) = 1$.
- Maintenant sur $]K,P]$ par la propriété des bissectrices et l'étude de I.3. le minimum est atteint à la fois sur $[B,K[$ et sur $[H,K[$ et donc $n(M) = 2$.
- Sur l'arc de parabole, O non compris, le minimum est atteint à la fois en B et sur $[H,T[$ et donc $n(M) = 2$. Enfin en O on a $n(O) = +\infty$ d'après l'étude de I.2.

Les excentricités des coniques sont 1 puisque ce sont des paraboles, leur foyer commun est B, leurs directrices sont (UT) et (UT') respectivement.

Question I.6.2. Les seuls problèmes éventuels sont en les points de raccordements, i.e. O, P et le symétrique de P par rapport à B.

On veut montrer que (PK) est tangente à la parabole (ce sera la même chose en le symétrique de P). Soit Q un autre point d'intersection, on a (puisque Q appartient à la parabole et à la bissectrice)

$$d(Q,B) = d(Q,(KG)) = d(Q,(KB))$$

et donc (QB) est perpendiculaire à (KB), i.e. $(PB) = (QB)$. Par conséquent $P = Q$ est l'unique point d'intersection de $(PB) = (QB)$ avec $(PK) = (QK)$. Aussi, comme (PK) n'a qu'un point d'intersection avec la parabole, elle est tangente à la parabole.

Comme O n'est pas le sommet de la parabole (car il n'est pas sur la perpendiculaire à (BK) passant par B), les tangentes en O (qui sont (OH) et sa symétrique) ne sont pas horizontales et donc ne se raccordent pas. Le squelette n'admet donc pas de tangente en O.

Question I.6.3 . On a déjà calculé $KP = 2/3$.

On a

$$d(B,(UT)) = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}.0 + \frac{1}{2}.1 - 1\right| = \frac{1}{2}$$

et donc le paramètre de la parabole est $p = 1/2$. Le sommet de la parabole est le milieu de B et de sa projection sur (UT) et l'équation de la parabole est $y = 2px^2 = x^2$ dans un repère adapté. Explicitons ce repère.

La perpendiculaire en B à (UT) admet des points de la forme $(t\sqrt{3}/2, 1 + t/2)$ et donc la projection B' de B sur (UT) est

$$B' = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{5}{4}\right) .$$

Le sommet S est le milieu de $[B, B']$ et donc

$$S = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{9}{8}\right) .$$

Soit D la parallèle à (UT) passant par S et Δ la droite $(SB) = (BB')$. On se place dans un repère de centre S, d'axe des abscisses D et d'axe des ordonnées Δ. On oriente les axes de sortes que O et P soient dans le premier quadrant, i.e. D dans le sens $[U,T)$ et Δ dans le sens $[S,B)$.

Dans ces conditions les abscisses de P et O sont respectivement données par les distances $B'H$ et $B'T$, c'est-à-dire $\sqrt{3}/6$ et $\sqrt{3}/2$. Les ordonnées sont données par $PH - SB' = PH - p/2 = PH - 1/4$ et $OT - SB' = OT - 1/4$, c'est-à-dire $1/12$ et $3/2$. On vérifie bien que l'on $y = x^2$ dans les deux cas.

La longueur de l'arc de parabole est donc

$$\int_{\sqrt{3}/6}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{\sqrt{3}/6}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1 + 4x^2}dx .$$

Calculons une primitive de l'intégrand. On pose successivement $x = sh(u)/2$, i.e. $u = Argsh(2x)$ et $u = v/2$, i.e. $v = 2u$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + 4x^2}dx &= \int \sqrt{1 + sh^2(u)}\frac{ch(u)du}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int ch^2(u)du \\
&= \frac{1}{4}\int (ch(2u) + 1)du \\
&= \frac{1}{8}\int (ch(v) + 1)dv \\
&= \frac{1}{8}(sh(v) + v) \\
&= \frac{1}{8}(sh(2u) + 2u) \\
&= \frac{1}{4}(sh(u)ch(u) + u) \\
&= \frac{1}{4}\left(sh(u)\sqrt{1 + sh^2(u)} + u\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2x\sqrt{1 + 4x^2} + Argsh(2x)\right) \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4}Argsh(2x)
\end{aligned}$$

et donc la longueur de l'arc de parabole est

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1 + 3} - \frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{1 + 1/3} + \frac{1}{4}Argsh(\sqrt{3}) - \frac{1}{4}Argsh\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) .$$

En se rappelant que $Argsh(t) = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$, on obtient comme longueur

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{3})$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\ln\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \ .$$

La longueur totale est donc la somme de l'expression précédente et de $KB = 2/3$, le tout multiplié par 2, pour tenir compte de la symétrie. On obtient au final

$$\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \ .$$

Soit, à 10^{-4} près :

$$l(sq(\mathcal{R})) \simeq 3.4997 \ .$$

Partie II

Question II.1.1. Montrons directement que $\delta\mathcal{R}$ est égal à $\overline{\mathcal{R}}$ privé de $\mathcal{R}$. Les propriétés demandées en résulteront, En effet, comme $\mathcal{R}$ est ouvert, son complémentaire est fermé et donc $\delta\mathcal{R}$ est fermé comme intersection de deux fermés ($\overline{\mathcal{R}}$ et le complémentaire de $\mathcal{R}$). Comme $\mathcal{R}$ est borné, il est inclus dans un certain disque fermé et donc $\overline{\mathcal{R}}$ est aussi inclus dans ce disque fermé (prendre l'adhérence préserve les inclusions). Il en résulte que $\delta\mathcal{R}$ est aussi borné et est donc à la fois fermé et borné, donc compact dans Π. Pour la même raison $\overline{\mathcal{R}}$ est aussi compacte. Il reste à voir que $\delta\mathcal{R}$ est non vide.

Montrons donc que $\delta\mathcal{R}$ est égal à $\overline{\mathcal{R}}$ privé de $\mathcal{R}$. En effet un point M de $\delta\mathcal{R}$ est adhérent à $\mathcal{R}$ puisque tout disque de centre de M rencontre $\mathcal{R}$ et on peut donc construire une suite de points de $\mathcal{R}$ convergeant vers M (par exemple en prenant des points de $\mathcal{R}$ au hasard dans les disques centrés en M et de rayons $1/n$ pour n dans $\mathbb{N}^*$). Si par contre M appartient à $\mathcal{R}$, comme ce dernier est ouvert, on peut trouver un disque centré en M entièrement inclus dans $\mathcal{R}$ et donc M n'appartient pas à la frontière de $\mathcal{R}$.

Réciproquement si M appartient à $\overline{\mathcal{R}}$ privé de $\mathcal{R}$, tout disque centré en M rencontre le complémentaire de $\mathcal{R}$ (puisque M est un point de ce complémentaire) et aussi $\mathcal{R}$ par définition de $\overline{\mathcal{R}}$ (puisqu'on peut construire une suite de points de $\mathcal{R}$ convergeant vers M).

Il reste à voir que $\delta\mathcal{R}$ est non vide, i.e. que $\overline{\mathcal{R}}$ contient strictement $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{R}$ est non vide, soit A un de ses points. Comme $\mathcal{R}$ est borné, l'ensemble des distances de A à un point de $\mathcal{R}$ est aussi borné (et non vide) et admet donc une borne supérieure. Soit d cette borne supérieure. Par définition on peut donc trouver une suite (M_n) de points de $\mathcal{R}$ telle que $d(A,M_n)$ tende vers d. Or (M_n) est une suite bornée, on peut donc en extraire une sous-suite convergente dans Π, disons (P_n), i.e. une suite convergente de points de $\mathcal{R}$ telle que $d(A,P_n)$ tende vers d. Soit P cette limite, si P appartenait à $\mathcal{R}$, il existerait un disque de centre P inclus dans $\mathcal{R}$. Hors ce disque contiendrait en particulier des points de la demi-droite issue de P, parallèle à (AP) mais ne contenant pas A. Ces points sont à une distance de A strictement supérieure à $d(A,P) = d$ et ceci serait une contradiction avec la définition de d. Donc P n'appartient pas à $\mathcal{R}$, mais appartient à $\overline{\mathcal{R}}$.

Remarque : Si X est un espace topologique quelconque et Y est une partie de X, la frontière de Y est formé des points adhérents à Y qui ne lui sont par intérieurs, i.e.

$$Fr(Y) = \overline{Y} \setminus \overset{\circ}{Y} \ .$$

Question II.1.2. Soit T un point de $\delta\mathcal{R}$, on a

$$\phi(M) \leq d(M,T) \leq d(M',T) + d(M,M')$$

et donc

$$\phi(M) \leq \phi(M') + d(M,M') \ .$$

De même

$$\phi(M') \leq \phi(M) + d(M,M')$$

et donc

$$|\phi(M) - \phi(M')| \leq d(M,M') \ .$$

L'application ϕ est donc contractante et donc, *a fortiori*, continue.

Question II.1.3. Soit M un point de $\mathcal{R}$ et N un point quelconque. On considère les points du segment $[M,N]$, i.e. les points de la forme $M_t = tN + (1-t)M$ pour $0 \leq t$. Comme $\mathcal{R}$ est ouvert, l'ensemble X des t tels que M_t appartient à $\mathcal{R}$ est aussi ouvert. Son complémentaire dans $\mathbb{R}_+$, disons Y, est donc fermé. Comme $\mathcal{R}$ est borné, X l'est aussi et donc Y n'est pas vide. On peut donc considérer sa borne inférieure, disons y. Comme Y est fermé, y lui appartient en tant que limite de points de Y et donc M_y n'appartient pas à $\mathcal{R}$. Mais comme X est ouvert et contient 0, donc un intervalle de la forme $[0,a]$ pour un certain a strictement positif, y est supérieur à a et n'est donc pas nul. Comme tous les M_t pour $t < y$ ne sont pas dans Y, ils sont dans X et donc M_t est dans $\mathcal{R}$. On en déduit l'existence d'une suite de points de $\mathcal{R}$ tendant vers M_y et donc M_y appartient à la frontière de $\mathcal{R}$. On a de plus $d(M,M_y) = yd(M,N)$.

Remarquons pour conclure que si N n'appartient pas à $\mathcal{R}$, alors 1 appartient à Y et donc $y \leq 1$. On en déduit

$$\phi(M) \leq d(M,M_y) = yd(M,N) \leq d(M,N)$$

autrement dit $B(M,\phi(M))$ est contenue dans $\mathcal{R}$.

Question II.1.4. Comme l'application distance à M est continue et $\delta\mathcal{R}$ est compact (non vide), ϕ est atteinte en un certain point T de $\delta\mathcal{R}$, i.e.

$$\exists T \in \delta\mathcal{R} \qquad \phi(M) = d(M,T) .$$

Prenons $N = T$ dans le raisonnement précédent. Soit a tel que $d(M,M_a) = r$, i.e. $a = r/d(M,T) = r/\phi(M)$. Comme X est ouvert et $[0,a]$ est inclus dans X (par hypothèse sur r), il existe un réel strictement positif h tel que $[0,a+h[$ soit inclus dans X et donc $y \geq a+h > a$. Comme T appartient à $\delta\mathcal{R}$, on a $y \leq 1$ et, finalement $a < 1$, i.e. $r/\phi(M) < 1$ ou encore $\phi(M) > r$.

Remarque : dans le cas considéré, on a en fait $y = 1$.

On a déjà vu qu'il existait un T dans $\delta\mathcal{R}$ tel que $d(M,T) = \phi(M)$ et donc T appartient à $\bar{B}(M,\phi(M))$ et à $\delta\mathcal{R}$.

Question II.2.1. Soit X l'ensemble des points P du cercle $C(M,\phi(M))$ tels que $d(F,P)$ est supérieure à ϵ. Comme le cercle est compact et la fonction distance à F est continue, X est un fermé inclus dans le compact $C(M,\phi(M))$ et est donc compact. Comme la fonction ϕ est continue, par compacité elle y atteint son minimum.

Comme tout point de $C(M,\phi(M))$ est limite de points de $B(M,\phi(M))$, tout point de X appartient à $\overline{\mathcal{R}}$. S'il n'appartenait pas à $\mathcal{R}$, il appartiendrait donc à $\delta\mathcal{R}$. Comme F est le seul point de $\delta\mathcal{R}$ à appartenir à $\bar{B}(M,\phi(M))$ (et donc *a fortiori* à $C(M,\phi(M))$) et qu'il n'appartient pas à X, il en résulte que X est inclus dans $\mathcal{R}$.

Soit maintenant M un point de $\mathcal{R}$, la fonction distance à M étant continue sur le compact $\delta\mathcal{R}$, elle y atteint son minimum et donc $\phi(M)$ est égal à une certaine distance $d(M,T)$ pour un T dans $\delta\mathcal{R}$. Comme T n'appartient pas à $\mathcal{R}$, on a $M \neq T$ et $d(M,T) > 0$. Par conséquent ϕ ne prend que des valeurs strictement positives sur $\mathcal{R}$ et donc son minimum sur X est aussi strictement positif (puisque c'est aussi une valeur de ϕ). Si on note 2α ce minimum, α répond à la question posée.

Donnons nous un ϵ quelconque inférieur à $\phi(M)$ et le α que l'on vient de lui associer. Choisissons M' sur la demi-droite issue de F contenant M tel que $FM' = FM + MM'$ et $MM' \leq \alpha$.

On veut montrer $\phi(M') > \phi(M)$. Pour cela il suffit de montrer, d'après II.1.4., que $\bar{B}(M',\phi(M))$ est contenue dans $\mathcal{R}$. Soit donc N un point de $\bar{B}(M',\phi(M))$. Considérons le segment $[M,N]$. Comme $MM' \leq \phi(M)$, M appartient à $\bar{B}(M',\phi(M))$ et donc le segment est entièrement contenu dans $\bar{B}(M',\phi(M))$.

S'il n'intersecte pas $C(M,\phi(M))$ c'est que N appartient à $\bar{B}(M,\phi(M))$ et donc à $\mathcal{R} \cup \{F\}$. Mais $FM' = FM + MM' > \phi(M)$ et donc, finalement, N appartient à $\mathcal{R}$.

Si maintenant le segment $[M,N]$ rencontre $C(M,\phi(M))$ c'est en un seul point, disons P. Ce P appartient à $\bar{B}(M',\phi(M))$ et on a donc

$$\phi(M) = MP \geq M'P .$$

Soit H la projection orthogonale de P sur la droite $(MM') = (FM)$. On a

$$M'H^2 = M'P^2 - PH^2 \leq MP^2 - PH^2 = MH^2$$

et donc $M'H \leq MH$. Il en résulte que H est sur la demi-droite issue de M passant par M' et donc $FH > FM$. On a donc $FP^2 = FH^2 + PH^2 > FM^2$ et aussi
$$FP > FM \geq \epsilon \ .$$
Donc $\phi(P) > \alpha \geq MM'$. Or
$$NP = NM - NP = NM - \phi(M) \leq NM - NM' \leq MM' < \phi(P)$$
et il en résulte
$$N \in B(P,\phi(P))$$
et II.1.3. montre donc que N appartient à $\mathcal{R}$.

On a donc bien prouvé $\phi(M') > \phi(M)$ pour tout M' choisi comme on l'a indiqué.

Pour trouver un M' appartenant à $\mathcal{R}_0$, il faut reprendre le raisonnement. On considère maintenant un point M' comme précédemment et le disque fermé $\bar{B}(M',r')$ pour un certain r' inférieur à $\phi(M) + MM' = FM'$. Soit Q et Q' les points d'intersection de $C(M',r')$ et $C(M,\phi(M))$, ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport à (MM') et l'ensemble des points de $C(M,\phi(M))$ qui ne sont pas dans $\bar{B}(M',r')$ est exactement constitué de l'arc de $C(M,\phi(M))$ ayant Q et Q' comme extrémités et passant par F.

On se demande si $\bar{B}(M',r')$ est incluse dans $\mathcal{R}$. On reprend donc le raisonnement précédent avec N dans $\bar{B}(M',r')$. Dans le cas où $[M,N]$ n'intersecte pas $C(M,\phi(M))$, les mêmes arguments fournissent N appartient à $\mathcal{R}$. Dans le cas contraire, on a maintenant $FP \geq FQ = FQ'$ et donc si on prend $\epsilon = FQ$ avec son α associé, on aura
$$NP = NM - \phi(M) \leq MM' + M'N - \phi(M) \leq MM' + r' - \phi(M) = MM' + M'Q - MQ \leq 2MM'$$
et donc, si $MM' \leq \alpha/2$, la conclusion sera encore N appartient à $B(P,\phi(P))$ et donc à $\mathcal{R}$.

On a montré au passage que les points P de $\bar{B}(M,\phi(M))$ qui ne sont pas dans $\bar{B}(M',r')$ vérifient $FP < FQ = \epsilon$. Comme F n'appartient pas à $\mathcal{R}$, il n'appartient pas non plus à $\bar{B}(M_0,r)$ qui est fermé, donc on peut trouver un disque ouvert contenant F et ne rencontrant pas $\bar{B}(M_0,r)$ (le complémentaire d'un fermé est ouvert) et donc un disque fermé centré en F ne rencontrant pas $\bar{B}(M_0,r)$. On choisit ϵ suffisamment petit pour que le disque fermé centré en F et de rayon ϵ ne rencontre pas $\bar{B}(M_0,r)$. Dans ces conditions si un point de $\bar{B}(M_0,r)$ n'appartient pas à $\bar{B}(M',r')$, comme il appartient à $\bar{B}(M,\phi(M))$, il devrait appartenir à $\bar{B}(F,\epsilon)$ ce qui est exclus. On a donc prouvé que $\bar{B}(M',r')$ contient $\bar{B}(M_0,r)$ et donc M' appartient à $\mathcal{R}_0$.

Question II.2.2. $\mathcal{R}_0$ est formé des points M de $\mathcal{R}$ tels que $\phi(M) \geq r + d(M,M_0)$. Soit f l'application de Π dans $\mathbb{R}$ qui à M associe $\phi(M) - d(M,M_0)$, c'est une application continue d'après II.1.2.

La condition $f(M) \geq r$ définit donc un fermé X de Π. Son intersection avec le compact $\overline{\mathcal{R}}$ est donc compacte. Or si M appartient à $\delta\mathcal{R}$, on a $f(M) = -d(M,M_0) < 0$ et donc on ne peut avoir $f(M) \geq r$. Il en résulte que
$$\mathcal{R}_0 = X \cap \mathcal{R} = X \cap \overline{\mathcal{R}}$$
est un compact de Π. L'application continue ϕ y atteint donc son maximum en un certain point S_0.

Question II.2.3. Si S_0 n'était pas un point du squelette de $\mathcal{R}$, $\bar{B}(S_0,\phi(S_0))$ contiendrait exactement un point et donc, d'après II.2.1., $\phi(S_0)$ ne serait pas maximum, ce qui est contraire à la définition de S_0.

Question II.2.4. Comme tout point du squelette appartient à $\mathcal{R}$ et que, pour tout point M de $\mathcal{R}$, on a $B(M,\phi(M)) \subset \mathcal{R}$ d'après II.1.3., on a
$$\cup_{S\in sq(\mathcal{R})} B(S,\phi(S)) \subset \mathcal{R} \ .$$

Soit maintenant M_0 un point quelconque de $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{R}$ est ouvert, il existe un disque ouvert contenant M inclus dans $\mathcal{R}$ et donc aussi un disque fermé centré en M_0 contenu dans $\mathcal{R}$. On note r son rayon. La construction précédente montre que S_0 appartient à la fois à $\mathcal{R}_0$ et à $sq(\mathcal{R})$. De la première appartenance on déduit $\bar{B}(S_0,\phi(S_0)) \supset \bar{B}(M_0,r)$ et donc

$$M \in B(S_0,\phi(S_0)) \ .$$

Il en résulte

$$\mathcal{R} = \cup_{S\in sq(\mathcal{R})} B(S,\phi(S)) \ .$$

	Barème	
Total	269	
I.1	26	10+5+2+2+2+5
I.2	9	5+2+2
I.3	35	10+5+5+10+5
I.4	28	8+10+10
I.5	50	20+30
I.6	88	30+8+50
II.1	58	30+8+10+10
II.2	75	40+10+5+20