Première épreuve CAPES externe 1997

François Sauvageot

Janvier 2001

Partie I

Question I.1.1 Puisque f_k est une fonction exponentielle, elle de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et donc, a fortiori, sur $\mathbf{R}_+^*$. On a aussi $f_k' = -\log k f_k$ et donc, pour tout entier naturel r, $f_k^{(r)} = (-1)^r (\log k)^r f_k$.
Soit maintenant α_0 un réel strictement positif quelconque, par décroissance de f_k, on a

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^* \quad \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow |f_k^{(r)}(\alpha)| \leq \frac{(\log k)^r}{k^{\alpha_0+1}} \ .$$

D'après le critère de convergence des séries de Bertrand, le membre de droite est le terme général (en k) d'une série convergente et donc $\sum_{k\geq 1} f_k^{(r)}$ est normalement convergente sur l'intervalle $[\alpha_0; +\infty[$.

Question I.1.2 Soit α_0 un réel strictement positif quelconque. Pour r entier naturel soit (H_r) la propriété : $S = \sum_{k\geq 1} f_k$ est une fonction de classe C^r sur $I = [\alpha_0; +\infty[$ et on a, pour tout α dans cet intervalle,

$$S^{(r)}(\alpha) = \sum_{k\geq 1} f_k^{(r)}(\alpha) \ .$$

La propriété (H_0) est vraie d'après le théorème de dérivation des séries : comme $\sum_{k\geq 1} f_k(\alpha_0)$ est une série de Riemann convergente, la série $\sum_{k\geq 1} f_k$ converge simplement en au moins un point de l'intervalle I. Comme les fonctions f_k sont de classe C^1 sur I et par convergence normale de la série $\sum_{k\geq 1} f_k'$, S est bien de classe C^1 sur I et on a $S' = \sum_{k\geq 1} f_k'$.
Supposons maintenant que, pour un certain entier naturel r, on ait S de classe C^r sur I et $S^{(r)} = \sum_{k\geq 1} f_k^{(r)}$. En particulier $\sum_{k\geq 1} f_k^{(r)}(\alpha_0)$ converge, toutes les $f_k^{(r)}$ sont de classe C^1 sur I et la série $\sum_{k\geq 1} f_k^{(r+1)}$ converge normalement sur I. Par conséquent la série $\sum_{k\geq 1} f_k^{(r)}$ converge uniformément sur I et admet $\sum_{k\geq 1} f_k^{(r+1)}$ comme dérivée. Autrement dit $S^{(r)}$ est dérivable, de dérivée $S^{(r+1)} = \sum_{k\geq 1} f_k^{(r+1)}$.
Nous avons donc bien montré que la propriété (H_r) est héréditaire, ce qui assure qu'elle est vraie pour tout entier naturel r. Par conséquent S est de classe C^∞ sur I. Comme α_0 a été choisi arbitrairement dans $\mathbf{R}_+^*$, il résulte que S est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ et ses dérivées sont données par la formule

$$\forall r \in \mathbf{N} \qquad S^{(r)} = \sum_{k\geq 1} f_k^{(r)} \ .$$

Question I.1.3 Toutes les fonctions f_k sont décroissantes et convexes (cette seconde propriété résultant de la log-convexité de f_k ou de la convexité de l'exponentielle). Leur somme l'est donc également par conservation des inégalités à la limite : soit x et y deux réels strictement positifs et λ un réel compris entre 0 et 1, on a

$$\big(\forall k \in \mathbf{N}^* \quad x \leq y \Rightarrow f_k(x) \geq f_k(y)\big) \Rightarrow \left(x \leq y \Rightarrow \sum_{k\geq 1} f_k(x) \geq \sum_{k\geq 1} f_k(y)\right)$$

et

$$\big(\forall k \in \mathbf{N}^* \quad f_k(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f_k(x)+(1-\lambda)f_k(y)\big) \Rightarrow \left(\sum_{k\geq 1} f_k(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda \sum_{k\geq 1} f_k(x)+(1-\lambda)\sum_{k\geq 1} f_k(y)\right) .$$

Question I.2.1 Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, on a, pour tout entier naturel non nul k,

$$\forall t \in [k; k+1] \qquad \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{k^{\alpha+1}} .$$

Chacun des termes de cette double inégalité étant une fonction continue de la variable t, on peut intégrer entre k et $k+1$. On obtient alors

$$\frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{k^{\alpha+1}} .$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul et N un entier strictement supérieur à n. En sommant la première partie de l'encadrement de $k=n$ à N, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \leq \int_n^{N+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} .$$

Chacune des deux expressions étant convergente quand N tend vers l'infini, d'après le critère de Riemann, on en déduit

$$\rho_\alpha(n) \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$$

ou encore

$$\rho_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha n^\alpha} .$$

Pour l'autre inégalité, on somme l'autre partie de l'encadrement de $n+1$ à N et on obtient

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$$

et par suite, par convergence quand N tend vers l'infini,

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \rho_\alpha(n)$$

ou encore

$$\frac{1}{\alpha(n+1)^\alpha} \leq \rho_\alpha(n) .$$

Il en résulte

$$\frac{1}{\alpha(n+1)^\alpha} \leq \rho_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha n^\alpha} .$$

Question I.2.2 Soit n un entier naturel non nul ; on a

$$0 \leq n^\alpha(S_\alpha - \sigma_\alpha(n)) = n^\alpha \rho_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha}$$

et donc $S_\alpha = \sigma_\alpha(n) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
Pour $n=1$, on a $\sigma_\alpha(1) = 1$ et o(1) est, par définition, une fonction tendant vers 0. On obtient donc exactement $\lim_{\alpha\to\infty} S_\alpha = 1$.

Question I.2.3.a Comme $S_\alpha = 1 + \rho_\alpha(1)$, il suffit de montrer que $\rho_\alpha(1) - \frac{1}{\alpha}$ est borné au voisinage de 0. En utilisant l'inégalité (1), on a

$$\left|\rho_\alpha(1) - \frac{1}{\alpha}\right| \leq \frac{1-2^{-\alpha}}{\alpha} \,.$$

Quand α tend vers 0, le terme de droite tend vers l'opposé de la dérivée en 0 de $t \mapsto 2^{-t}$, c'est-à-dire $\log 2$. En particulier c'est une quantité bornée dans un voisinage de 0.

Question I.2.3.b Soit h la fonction, définie pour t sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$h(t) = \frac{\log t}{t^{\alpha+1}} \,.$$

C'est une fonction dérivable, en tant que quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. Sa dérivée est donnée par la formule, pour t dans $[3; +\infty[$,

$$h'(t) = \frac{1-(\alpha+1)\log t}{t^{\alpha+2}} \,.$$

Or, si $t \geq 3$, $\log t > \log e = 1$ et donc h' est négative sur $[3; +\infty[$. Par suite h est décroissante sur ce même intervalle. Comme $\rho_\alpha(3) = S(\alpha) - \sigma_\alpha(3)$, la dérivée de $\alpha \to \rho_\alpha(3)$, notée $\rho'_\alpha(3)$ vaut

$$S'(\alpha) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\log k}{k^{\alpha+1}}$$

soit

$$\rho'_\alpha(3) = -\sum_{k=4}^{\infty} h(k) \,.$$

Comme h est décroissante, on peut comparer série et intégrale. On a donc

$$\begin{aligned}
\rho'_\alpha(3) &\geq -\sum_{k=4}^{\infty} \int_{k-1}^{k} h(t)dt \\
&\geq -\int_{3}^{\infty} h(t)dt \\
&\geq -\left[-\frac{\alpha \log t + 1}{\alpha^2 t^\alpha}\right]_3^\infty \\
&\geq -\frac{1+\alpha\log 3}{\alpha^2 3^\alpha}
\end{aligned}$$

La dérivée de $\alpha \to \rho_\alpha(3) - \frac{1}{\alpha}$ est donc minorée par $(3^\alpha - 1 - \alpha\log 3)/(\alpha^2 3^\alpha)$. Or, par concavité du logarithme, pour tout réel strictement positif x, $x - 1 \geq \log x$ (le logarithme est en-dessous de sa tangente en 1). En appliquant cette inégalité à $x = 3^\alpha$, on en déduit que la dérivée de $\alpha \to \rho_\alpha(3) - \frac{1}{\alpha}$ est positive. Cette fonction est donc croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Question I.2.3.c Comme $\alpha \to \sigma_\alpha(3)$ est continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0. Par conséquent $\rho_\alpha(3) - \frac{1}{\alpha} = (S_\alpha - \frac{1}{\alpha}) + \sigma_\alpha(3)$ est une fonction bornée de α au voisinage de 0, en tant que somme de deux telles fonctions. Comme elle est croissante, elle admet une limite à droite en 0. Il en est donc de même pour $S_\alpha - \frac{1}{\alpha}$, toujours par continuité de $\alpha \to \sigma_\alpha(3)$.

Question I.2.3.d Soit n un entier naturel non nul. En utilisant l'encadrement (1), on a

$$\sigma_\alpha(n) + \frac{1}{\alpha}\left(n^{-\alpha} - 1\right) \leq S_\alpha - \frac{1}{\alpha} \leq \sigma_\alpha(n) + \frac{1}{\alpha}\left((n+1)^{-\alpha} - 1\right)$$

De plus, pour tout réel strictement positif x, la dérivée de $\alpha \mapsto x^{-\alpha}$ en 0 est égale à $-\log x$. Par conséquent, en passant à la limite à droite en 0 dans l'encadrement précédent, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \leq \gamma \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \, .$$

On a donc

$$0 \leq \gamma - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \right) \leq \log(n+1) - \log n = \log(1 + \frac{1}{n})$$

d'où $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \right)$.

Question I.3.1.a Pour encadrer S_α, il suffit d'encadrer, pour un certain entier naturel non nul n, la quantité $\rho_\alpha(n)$ puisque $\sigma_\alpha(n)$ peut-être connu avec une précision arbitraire. L'encadrement (1) fournit une précision de $(n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha})/\alpha$. Pour $\alpha = 0.5$, on trouve

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{2}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

et donc, pour obtenir une précision de 10^{-3}, il suffit de prendre $n = 100$.
On a en fait une précision de inférieure à 0.000993. Si on effectue les calculs des quantités apparaissant dans $S_{0.5}$ avec la précision 10^{-8}, les erreurs d'arrondi fourniront une erreur d'au plus 100 fois 10^{-8} et donc de 10^{-6} au plus. Au final la quantité calculée sera bien à moins de 10^{-3} de $S_{0.5}$. On trouve $2.412874 \leq \sigma_{0.5}(100) \leq 2.413869$ et donc une valeur décimale par défaut de $S_{0.5}$ à 10^{-3} près est 2.611881.

Question I.3.1.b Pour la précision 10^{-7}, il faudrait $n \geq 10^{14/3}$ et donc $n \geq 46416$. Le nombre de calculs effectués et l'exigence de précision dans le calcul de $1/k^{3/2}$ demanderaient un nombre très élevé d'opérations et il n'est donc pas raisonnable de calculer $S_{0.5}$ avec cette méthode. C'est même impossible avec une calculatrice possédant une précision 10^{-12} ou moins puisque le nombre d'opérations fournit des erreurs d'arrondis a priori supérieures à 10^{-7}.

Question I.3.2.a La fonction h_α est log-convexe, donc convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.

Question I.3.2.b La méthode des trapèzes consiste à remarquer qu'une fonction convexe f (donc continue) est située sous ses cordes. Autrement dit on intègre l'inégalité $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ entre $t = 0$ et $t = 1$ pour tout couple (a, b) de points dans le domaine de définition de f avec $a < b$, et on obtient

$$\int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \, .$$

C'est exactement l'inégalité demandée avec $f = h_\alpha$, $a = k$ et $b = k + 1$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}}\right) \, .$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul et N un entier supérieur à n. On somme cette inégalité de $k = n$ à N et on trouve

$$\int_n^{N+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{2n^{\alpha+1}} + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{1}{2(N+1)^{\alpha+1}} \, .$$

Par convergence quand N tend vers l'infini, on en déduit

$$\frac{1}{\alpha n^\alpha} \leq \frac{1}{2n^{\alpha+1}} + \rho_\alpha(n)$$

soit

$$\frac{1}{\alpha n^\alpha} - \frac{1}{2n^{\alpha+1}} \leq \rho_\alpha(n) \ .$$

Question I.3.2.c Cette fois-ci on remarque qu'une fonction convexe f est au-dessus de ses tangentes et on intègre l'inégalité $f(a)+(t-a)f'(a) \leq f(t)$ entre $t = a-h$ et $t = a+h$ pour a et h, avec h strictement positif, tels que le segment $[a-h; a+h]$ soit inclus dans le domaine de définition de f, et on obtient

$$\int_{a-h}^{a+h} f(t)dt \geq 2hf(a) \ .$$

C'est exactement l'inégalité demandée pour $f = h_\alpha$, $a = k$ et $h = 1/2$:

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \geq \frac{1}{k^{\alpha+1}} \ .$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul et N un entier strictement supérieur à n. On somme cette inégalité de $k = n+1$ à N et on obtient

$$\int_{n+1/2}^{N+1/2} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \geq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \ .$$

Par convergence quand N tend vers l'infini, on en déduit

$$\rho_\alpha(n) \leq \int_{n+1/2}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)^\alpha} \ .$$

Question I.3.3 Il s'agit encore d'encadrer $\rho_\alpha(n)$ pour n un entier naturel non nul bien choisi et donc d'estimer la différence entre le majorant et le minorant trouvés précédemment. Pour $\alpha = 0.5$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)^\alpha} - \frac{1}{\alpha n^\alpha} + \frac{1}{2n^{\alpha+1}} &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n^3}} \\
&= 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2n}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n(2n+1)}} + \frac{1}{2\sqrt{n^3}} \\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n(2n+1)}(\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1})} + \frac{1}{2\sqrt{n^3}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}}\frac{\sqrt{2n+1}(\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1})-4n}{n\sqrt{2n+1}(\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}}\frac{\sqrt{2n(2n+1)}-(2n-1)}{n\sqrt{2n+1}(\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}}\frac{2n(2n+1)-(2n-1)^2}{n\sqrt{2n+1}(\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n(2n+1)}+2n-1)} \\
&< \frac{1}{2\sqrt{n}}\frac{6n-1}{n\sqrt{2n}2\sqrt{2n}(4n-1)} \\
&< \frac{3}{4n\sqrt{n}.3n} = \frac{1}{4n^{5/2}}
\end{aligned}$$

Il nous suffit donc de choisir n tel que $n \geq (10^7/4)^{2/5}$, i.e. $n \geq 363$. Avec des calculs d'une précision 10^{-12}, on aura, en tenant compte des erreurs d'arrondis, un calcul de $S_{0.5}$ d'une précision de $0.9995\ 10^{-7}$. Il s'en suit, à 10^{-7} près par défaut,

$$S_{0.5} \simeq 2.612375298899 \ .$$

Remarque : cette méhode fournit la précision 10^{-3} pour $n=10$.

Question I.3.4.a Soit n un entier naturel non nul. On écrit, comme en I.3.1.a,

$$\frac{1}{\alpha}\left(n^{-\alpha}-1\right)-\frac{1}{2n^{\alpha+1}}+\sigma_\alpha(n)\leq S_\alpha-\frac{1}{\alpha}\leq\frac{1}{\alpha}\left((n+\frac{1}{2})^{-\alpha}-1\right)+\sigma_\alpha(n)$$

et, en prenant la limite à droite en 0, on trouve l'inégalité demandée :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n-\frac{1}{2n}\leq\gamma\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log\left(n+\frac{1}{2}\right)\ .$$

Question I.3.4.b Pour approcher γ, il suffit que la différence entre le majorant et le minorant trouvés précédemment soit assez petite. On a, pour tout entier naturel n non nul,

$$\log n+\frac{1}{2n}-\log\left(n+\frac{1}{2}\right)=\log\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2n(2n+1)}<\frac{1}{4n^2}$$

et il suffit donc de prendre n tel que $n\geq 10^3/2=500$. Il s'en suit avec 500 calculs à 10^{-10} près, une précision inférieure à $\ln(1000/1001)+10^{-3}+5.10^{-8}$, ce qui est inférieur à 6.10^{-7}. Il vient alors, à 10^{-6} près par défaut,

$$\gamma\simeq 0.577215\ .$$

Partie II

Question II.1.1 Toutes les fonctions étudiées sont de classe C^∞ sur $[0;1[$ en tant que sommes et produits de telles fonctions, dont des fonctions puissance.
Pour $j=0$, on a $\phi_0(0)=0$ et $\phi_0^{(r)}(x)=\frac{\alpha\ldots(\alpha+r-1)}{(1-x)^{\alpha+r}}$ et donc $\phi_0^{(r)}(0)=\alpha\ldots(\alpha+r-1)$, ce qui est bien la formule demandée pour $j=0$.
Pour $j\geq 1$, on a

$$\phi_j^{(r)}=\alpha\ldots(\alpha+j-1)\sum_{k=0}^{r}C_r^k\frac{d^k}{dx^k}(x^j)\frac{d^{r-k}}{dx^{r-k}}((1-x)^{-(\alpha+j)}-1)\ .$$

Le terme $\frac{d^k}{dx^k}(x^j)$ s'annule en 0 sauf quand $k=j$. On en déduit $\phi_j^{(r)}(0)=0$ si $r<j$. Si $r\geq j$, on a par contre

$$\phi_j^{(r)}(0)=\alpha\ldots(\alpha+j-1)j!C_r^j\frac{d^{r-j}}{dx^{r-j}}((1-x)^{-(\alpha+j)}-1)(0)$$

soit

$$\phi_j^{(r)}(0)=\alpha\ldots(\alpha+j-1)\frac{r}{(r-j)!}\frac{d^{r-j}}{dx^{r-j}}((1-x)^{-(\alpha+j)}-1)(0)\ .$$

Le terme $\frac{d^{r-j}}{dx^{r-j}}((1-x)^{-(\alpha+j)}-1)$ s'annule quand $r-j=0$. On en déduit $\phi_j^{(j)}(0)=0$.
Enfin si $r>j$, on a

$$\frac{d^{r-j}}{dx^{r-j}}((1-x)^{-(\alpha+j)}-1)=\frac{(\alpha+j)\ldots(\alpha+r-1)}{(1-x)^{\alpha+r}}$$

et on trouve bien

$$\phi_j^{(r)}(0)=\alpha\ldots(\alpha+r-1)\frac{r}{(r-j)!}\ .$$

Question II.1.2 Soit p et r des entiers tels que $p > r \geq 1$. On a

$$(g_p - g_r)^{(r)}(0) = \sum_{j=r}^{p-1} u_j \phi_j^{(r)}(0) = 0 \ .$$

Cette égalité étant encore trivialement vraie si $p = r$.
Remarquons de plus que les ϕ_j et donc les g_p sont de classe C^∞ (en fait développables en série entière au voisinage de 0).
En particulier la formule de Taylor-Young en 0 prouve que g_p y est un $\mathrm{O}(x^k)$ si et seulement si g_p et ses $k-1$ premières dérivées s'y annulent.
Comme toutes les ϕ_j et donc toutes les g_p sont nulles en 0, on a pour tout entier naturel p non nul

$$g_p(x) = \mathrm{O}(x^{p+1}) \Leftrightarrow g_p'(0) = \ldots = g_p^{(p)}(0) = 0 \Leftrightarrow g_1'(0) = g_2''(0) = \ldots = g_p^{(p)}(0) = 0$$

d'où

$$\left(\forall p \in \mathbf{N}^* \quad g_p(x) = \mathrm{O}(x^{p+1})\right) \Leftrightarrow \left(\forall r \in \mathbf{N}^* \quad g_r^{(r)}(0) = 0\right) \ .$$

Question II.1.3 On a $g_1'(0) = u_0\phi_0'(0) - 1 = u_0\alpha - 1$ et, si p est un entier supérieur à 2,

$$g_p^{(p)}(0) = \sum_{j=0}^{p-1} u_j \alpha \ldots (\alpha + p - 1) \frac{p!}{(p-j)!} = (p!)\alpha \ldots (\alpha + p - 1) \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{(p-j)!} \ .$$

On trouve donc immédiatement la condition d'annulation cherchée :

$$\forall r \in \mathbf{N}^* \quad g_r^{(r)}(0) = 0$$

si et seulement si

$$u_0 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbf{N}, p \geq 2 \Rightarrow \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{(p-j)!} = 0 \ .$$

Question II.1.4 Pour n entier naturel, soit (H_n) la propriété : la suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est uniquement déterminée jusqu'au rang n et vérifie αu_j est rationnel, toujours pour j inférieur à n.
On a $u_0 = 1/\alpha$ et donc la propriété (H_0) est vraie.
Supposons (H_{n-1}) vraie pour un certain entier naturel n supérieur à 1. L'équation

$$\alpha u_n = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha u_j}{(n+1-j)!}$$

montre que αu_n est rationnel et uniquement déterminé, donc u_n également est uniquement déterminé. La propriété (H_n) est donc héréditaire et le principe de récurrence permet de conclure qu'il existe une unique suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}}$ vérifiant (5) et que cette suite est, après multiplication par α, rationnelle.

Question II.2.1 Comme $\frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{\alpha+p+1}}\right)$, la série de terme général $\frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right)$ est absolument convergente pour tout entier naturel non nul p.
Par le théorème de comparaison entre séries convergentes, il en résulte que le reste de cette série

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right)$$

est un $\mathrm{O}(\rho_{\alpha+p}(n))$, c'est-à-dire un $\mathrm{O}(n^{-(\alpha+p)})$ d'après I.2.1.

Question II.2.2 Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x)=x^\alpha(g_p(x)+x)$. On a, pour tout entier naturel non nul k,

$$\frac{1}{k^\alpha}g_p\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k^{\alpha+1}}=f\left(\frac{1}{k}\right) .$$

De plus f est une combinaison linéaire de fonctions $x^\alpha\phi_j(x)$. Remarquons que, pour x dans $[0;1[$,

$$x^\alpha\phi_j(x)=\alpha\dots(\alpha+j-1)\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha+j}-x^{\alpha+j}\right)$$

et donc, pour tout entier naturel non nul k,

$$\frac{1}{k^\alpha}\phi_j\left(\frac{1}{k}\right)=\alpha\dots(\alpha+j-1)\left((k-1)^{-(\alpha+j)}-k^{-(\alpha+j)}\right) .$$

Par conséquent, en posant pour tout entier naturel non nul p, $G_p=u_0+\sum_{j=1}^{p-1}\alpha\dots(\alpha+j-1)u_jX^j$, on obtient

$$\frac{1}{k^\alpha}g_p\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{(k-1)^\alpha}G_p\left(\frac{1}{k-1}\right)-\frac{1}{k^\alpha}G_p\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k^{\alpha+1}} .$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul et N un entier strictement supérieur à n. En sommant de $n+1$ à N l'égalité précédente, on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^\alpha}g_p\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n^\alpha}G_p\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{N^\alpha}G_p\left(\frac{1}{N}\right)-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}} .$$

Par convergence quand N tend vers l'infini, on en déduit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}g_p\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n^\alpha}G_p\left(\frac{1}{n}\right)-\rho_\alpha(n) ;$$

Le developpement asymptotique de ρ_α en découle immédiatement en utilisant II.2.1.

Question II.3.1.a Comme $\exp(x)-1$ est développable en série entière et s'annule en 0, on peut trouver f développable en série entière en 0 telle que $\exp(x)-1=xf(x)$. On a alors $f(0)=\exp'(0)=1$ et donc $1/f=\theta$ est développable en série entière au voisinage de 0. En particulier elle y admet des développement limités à tout ordre.
Remarque : les coefficients ν_{2i} sont appelés nombres de Bernoulli. Ils apparaissent notamment dans la formule d'Euler-McLaurin pour le calcul approché d'intégrales. Formule qui sert de point de départ à la méthode de Richardson-Romberg (accélération de la convergence de la suite donnant l'intégrale).

Question II.3.1.b On a

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \frac{x}{x+x^2/2+x^3/6+x^4/24+\mathrm{O}(x^5)}\\ &= \frac{1}{1+(x/2+x^2/6+x^3/24+\mathrm{O}(x^4))}\\ &= 1-(x/2+x^2/6+x^3/24+\mathrm{O}(x^4))+(x/2+x^2/6+\mathrm{O}(x^3))^2-(x/2+\mathrm{O}(x^2))^3+\mathrm{O}(x^4)\\ &= 1-x/2+x^2/12+\mathrm{O}(x^4)\end{aligned}$$

et donc $\nu_0=1$, $\nu_1=-1/2$, $\nu_2=1/12$ et $\nu_3=0$.

Question II.3.2 Par l'unicité de u_j il nous suffit de montrer $\nu_0=\alpha u_0=1$ et $\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\nu_j}{(p-j)!}=0$.

On va écrire $\theta(x)(\exp(x)-1)=x$, utiliser les développements limités à l'ordre p des deux membres et les identifier. On a donc, pour x réel, au voisinage de 0,

$$\left(\sum_{j=0}^{p-1}\nu_j x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)=x+\mathrm{o}(x^p)$$

et en particulier pour le terme en x^p, avec p entier naturel non nul, on trouve

$$\nu_0=1$$

quand $p=1$ et, pour $p\geq 2$, on obtient l'annulation requise :

$$\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\nu_j}{(p-j)!}=0\ .$$

Question II.3.3.a On a, pour tout x réel non nul,

$$\theta(x)=\frac{x}{2\exp(x/2)\mathrm{sh}(x/2)}=\frac{x\exp(-x/2)}{2\mathrm{sh}(x/2)}=\frac{x}{2}\frac{\mathrm{ch}(x/2)-\mathrm{sh}(x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}=\frac{x}{2}\left(\coth(x/2)-1\right)\ .$$

Question II.3.3.b Il en résulte que $x\mapsto\theta(x)+x/2$ est une fonction paire et donc que tous ses termes de degrés impairs (dans son développement limité) sont nuls, i.e. $\nu_1+1/2=\nu_3=\ldots=\nu_{2i+1}=0$ pour tout entier i supérieur à 1.

Question II.3.4.a On a, pour tout x réel non nul,

$$\mathrm{th}(x)+\coth(x)=\frac{\mathrm{sh}^2(x)+\mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)}=\frac{\mathrm{ch}(2x)}{\mathrm{sh}(2x)/2}=2\coth(2x)\ .$$

Question II.3.4.b Il vient, toujours pour tout x réel non nul,

$$\mathrm{th}(x)=2\coth(2x)-\coth(x)=\frac{\theta(4x)-\theta(2x)}{x}+1$$

et donc le terme d'ordre 0 de th est $2\nu_1+1=0$ et celui d'ordre n, pour $n\geq 1$, est donné par $4^{n+1}\nu_{n+1}-2^{n+1}\nu_{n+1}=2^{n+1}(2^{n+1}-1)\nu_{n+1}$.

Question II.3.4.c Pour i entier naturel non nul, soit (H_i) la propriété : $\mathrm{th}^{(2i-1)}(0)$ est non nul et du signe de $(-1)^{i-1}$.
Comme $\mathrm{th}'(0)=1-\mathrm{th}^2(0)=1$, la propriété (H_1) est vraie.
Soit i un entier naturel non nul tel que (H_i) soit vraie. On a alors $\mathrm{th}^{(2i+1)}=(1-\mathrm{th}^2)^{(2i)}$ et donc

$$\mathrm{th}^{(2i+1)}(0)=-\sum_{k=0}^{2i}C_{2i}^k\mathrm{th}^{(k)}(0)\mathrm{th}^{(2i-k)}(0)\ .$$

Par imparité de th, on $\mathrm{th}^{(k)}(0)=0$ si k est pair et donc

$$\mathrm{th}^{(2i+1)}(0)=-\sum_{k=1}^{i}C_{2i}^{2k-1}\mathrm{th}^{(2k-1)}(0)\mathrm{th}^{(2(i-k+1)-1)}(0)$$

qui, par hypothèse de récurrence, est l'opposé d'une somme de termes tous non nuls et du signe de $(-1)^{k-1}(-1)^{i-k}=(-1)^{i-1}$, c'est donc un nombre non nul du signe de $(-1)^i$. La propriété (H_i) est donc héréditaire et le principe de récurrence permet de conclure que, pour tout entier naturel non nul i, $\mathrm{th}^{(2i-1)}(0)$ est non nul et du signe de $(-1)^{i-1}$.

Question II.3.4.d Soit n un entier naturel non nul. Comme $\mathrm{th}^{(n)}(0)$ est proportionnel, par un facteur positif, à ν_{n+1}, on a bien ν_{2i} du signe de $(-1)^{i-1}$ pour tout entier naturel non nul i.

Question II.4.1 Soit p un entier naturel non nul. On a

$$g_{2p+2} - g_{2p+1} = u_{2p+1}\phi_{2p+1} = \nu_{2p+1}\phi_{2p+1}/\alpha = 0 .$$

Question II.4.2 Soit p un entier naturel non nul. On a

$$\begin{aligned} G_{2p+2} &= u_0 + \sum_{j=1}^{2p+1} u_j \alpha \ldots (\alpha + j - 1) X^j \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{X}{2} + \sum_{i=1}^{p} (\alpha+1)\ldots(\alpha+2i-1)\nu_{2i} X^{2i} \end{aligned}$$

Le résultat en découle grâce à II.2.2. :

$$\rho_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha n^\alpha} - \frac{1}{2n^{\alpha+1}} + \sum_{i=1}^{p}(\alpha+1)\ldots(\alpha+2i-1)\frac{\nu_{2i}}{n^{\alpha+2i}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p+2}}\right) .$$

Partie III

Question III.1.1 Puisque ch est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et paire, on a

1. f est de classe C^∞ sur tout intervalle de la forme $](2k-1)\pi;(2k+1)\pi[$ pour k entier.
2. Soit t un réel ; on peut trouver un entier k tel que $-\pi < t - 2k\pi \leq \pi$. Si $t \neq (2k+1)\pi$, on a $-\pi < 2k\pi - t < \pi$ et donc

   $$f(t) = \mathrm{ch}(xt - 2k\pi x) = \mathrm{ch}(2k\pi x - xt) = f(-t) .$$

   Si au contraire, $t = (2k+1)\pi$, alors $-t = \pi - 2(k+1)\pi$ et donc

   $$f(t) = f(\pi) = f(-t) .$$

   Dans tous les cas on a donc $f(t) = f(-t)$.
3. Pour tout entier k et tout $0 < h < \pi$, on a

   $$f((2k+1)\pi + h) = \mathrm{ch}(-\pi x + hx) = \mathrm{ch}(\pi x - hx) = f((2k+1)\pi - h)$$

   et donc f est continue en $(2k+1)\pi$ (et y vaut $\mathrm{ch}(\pi x)$).

Il en résulte que f est paire, continue et de classe C^1 (en fait C^∞) par morceaux.

Question III.1.2 Puisque f est paire ses coefficients de Fourier en sinus sont tous nuls.
On a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \mathrm{ch}(xt)\cos(nt)dt &= \left[\frac{\mathrm{sh}(xt)}{x}\cos(nt)\right]_0^\pi + \frac{n}{x}\int_0^\pi \mathrm{sh}(xt)\sin(nt)dt \\ &= (-1)^n\frac{\mathrm{sh}(\pi x)}{x} + \left[\frac{n}{x^2}\mathrm{ch}(xt)\sin(nt)\right]_0^\pi - \frac{n^2}{x^2}\int_0^\pi \mathrm{ch}(xt)\cos(nt)dt \end{aligned}$$

et donc

$$\left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)\int_0^\pi \mathrm{ch}(xt)\cos(nt)dt = (-1)^n\frac{\mathrm{sh}(\pi x)}{x}$$

Il en résulte que les coefficients de Fourier en cosinus, notés a_n, sont donnés par les formules

$$a_0 = \frac{2\text{sh}(\pi x)}{\pi x} \qquad a_n = (-1)^n \frac{2x\text{sh}(\pi x)}{\pi(x^2+n^2)} \ (n \geq 1) \ .$$

Question III.1.3 D'après les propriétés de f énoncées en III.1.1, on peut appliquer le théorème de Dirichlet à f et donc

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$$

pour tout réel t. En particulier pour $t = \pi$, on obtient

$$\cosh(\pi x) = \frac{\text{sh}(\pi x)}{\pi x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x\text{sh}(\pi x)}{\pi(x^2+n^2)} \cos(n\pi)$$

soit encore

$$\pi\coth(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2} \ .$$

Question III.2.1 Pour tout réel x et tout couple d'entiers naturels non nul n et p, on a

$$\frac{2x}{x^2+n^2} = \frac{2x}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k \frac{x^{2k}}{n^{2k}} + (-1)^p \frac{x^{2p}}{n^{2p}}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1}\right)$$

et donc

$$\pi\coth(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k \frac{x^{2k}}{n^{2k}} + (-1)^p \frac{x^{2p}}{n^{2p}}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1}\right) \ .$$

Comme toutes ces séries sont (absolument) convergentes, on obtient

$$\pi\coth(\pi x) - \frac{1}{x} = 2\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1} S_{2k-1} x^{2k-1} + (-1)^p 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{n^{2p+2}}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1} \ .$$

Le dernier terme est absolument majoré par

$$|x|^{2p+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2p+2}} = S_{2p+1}|x|^{2p+1} = \text{O}(x^{2p+1})$$

et on obtient le résultat souhaité.

Question III.2.2 Pour tout réel x, on a

$$\theta(x) = \frac{x}{2}(\coth(x/2) - 1) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1} S_{2k-1} \frac{2x^{2k}}{(2\pi)^{2k}} + \text{O}(x^{2p+2})$$

et donc $\nu_{2i} = 2(-1)^{i-1} S_{2i-1}/(2\pi)^{2i}$ pour $i \geq 1$.
Remarque : ceci montre que la somme des inverses de puissances *paires* des entiers sont des multiples de la même puissance de π par un nombre rationnel.

Question III.3 Pour tout couple d'entiers naturels non nuls n et p, on a

$$(\alpha+1)\dots(\alpha+2p-1)\frac{|\nu_{2p}|}{n^{\alpha+2p}} = 2\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+2p-1)S_{2p-1}}{n^{\alpha+2p}(2\pi)^{2p}} \sim \frac{2}{n^\alpha}\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+2p-1)}{(2\pi n)^{2p}}$$

et, en minorant $\alpha+p+k$ par $\alpha+p$ si $k \geq 0$, le terme de droite est minoré par

$$\frac{2}{n^\alpha}\left(\frac{\alpha+p}{4\pi^2 n^2}\right)^p$$

et tend donc vers l'infini quand p tend vers l'infini. C'est exactement dire que la partie régulière du développement asymptotique de $\rho_\alpha(n)$ n'a pas de limite finie quand p tend vers l'infini.