Partie I

Question I.1.1 Puisque les bissectrices extérieure et intérieure sont orthogonales, la question est donc de savoir si la parallèle à (Ox) passant par M est une bissectrice des droites (MP), (MQ). Comme on étudie des angles de droites, cette assertion est équivalente à une congruence modulo π des angles entre vecteurs directeurs de ces droites. Un vecteur directeur de chacune de ces droites est donné respectivement par $\vec{u}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$ et l'égalité caractéristique des bissectrices s'écrit

$$\widehat{(\overrightarrow{MP}, \vec{u})} = \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{MQ})}\ [\pi]$$

ce qui est bien équivalent à la formule de l'énoncé en tenant compte de $\widehat{(\overrightarrow{MP}, \vec{u})} = -\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{MP})}$.

Question I.1.2 Il n'y a pas de façon simple de simplifier la somme des deux angles et on doit recourir à un développement du sinus (rappelons que $\sin(\vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{v}, \vec{w})/(||\vec{v}||.||\vec{w}||)$) :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{MP})} + \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{MQ})}\right) &= \sin\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{MP}}\right)\cos\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{MQ}}\right) + \cos\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{MP}}\right)\sin\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{MQ}}\right) \\
&= \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-x \\ 0 & b-y \end{vmatrix}}{MP}\frac{-a-x}{MQ} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a-x \\ 0 & -b-y \end{vmatrix}}{MQ}\frac{a-x}{MP} \\
&= \frac{(a+x)(y-b) - (a-x)(y+b)}{MP.MQ} \\
&= 2\frac{xy - ab}{MP.MQ}
\end{aligned}$$

Question I.1.3 C'est le lieu des points distincts de P et Q tels que $xy = ab$. Autrement dit si P est sur un des axes ce sont les deux axes privés de P et Q, et si P n'est pas sur un des axes c'est l'hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les axes de coordonnées et qui passe par P, privée de P et Q.

Question I.2.1 On se place dans le repère où les asymptotes de $\mathcal{H}$ sont les axes de coordonnées. Soit Q le symétrique de P par rapport à O. Comme P' est sur l'hyperbole, la question I.1.3 montre que les bissectrices de (PP') et (QP') sont parallèles aux axes de coordonnées. On remarque alors que I est l'image de P' par l'homothétie h de centre P et de rapport $1/2$ et O est de la même façon l'image de Q par h. Comme les homothéties préservent les angles (ce sont des cas très particuliers de similitudes), il en résulte que l'image d'une bissectrice de (PP') et (QP') par h est une bissectrice des images de ces deux droites, c'est-à-dire de (PI) et (OI). La droite (PI) n'est autre que la droite (PP') et l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle (la partie vectorielle de l'homothétie est une homothétie vectorielle qui préserve les droites vectorielles). Il en résulte que les bissectrices de (IO) et (PP') sont des droites parallèles à celles de (PP') et (QP'), donc parallèles aux axes de coordonnées, donc aux asymptotes de l'hyperbole.

Question I.2.2 On applique le résultat précédent en faisant tendre P' vers P. Le point I tend alors lui aussi vers P et la parallèle à (Ox) passant par I tend donc vers la parallèle à (Ox) passant par P. Comme les angles entre cette droite et (IO) et (PP') sont opposés pour chacune de ces droites, il en est de même à la limite, i.e. les droites (PO) et $\mathcal{T}_P$ admettent des bissectrices parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

Si on n'est pas satisfait de cet argument géométrique (suggéré par le prélude au problème), on peut trouver un argument analytique. La bissectrice est parallèle aux axes si et seulement si le sinus qui intervient en I.1.2 est nul (comme on l'a déjà utilisé en I.1.3). Comme on parle d'angle, on aurait très bien pu normaliser les vecteurs et on obtient que le résultat de la question I.2.1 peut être reformulé en

$$\sin\left(\widehat{(\vec{u}, \frac{\overrightarrow{IO}}{IO})} + \widehat{(\vec{u}, \frac{\overrightarrow{PP'}}{PP'})}\right) = 0$$

et si maintenant on fait tendre P vers P', le vecteur $\overrightarrow{IO}$ n'est rien d'autre que $(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{P'O})/2$ et tend donc vers $\overrightarrow{PO}$, tandis que $\overrightarrow{PP'}\ /PP'$ tend vers un vecteur tangent unitaire à l'hyperbole (en P). Le sinus étant une fonction continue des coordonnées des vecteurs qui interviennent (comme on le voit avec la formule qu'on a déjà utilisée qui donne le sinus comme un déterminant divisé par un produit de normes) et comme aucun des vecteurs ne tend vers 0, le sinus reste nul à la limite et, en utilisant I.1.2 dans le sens réciproque, on obtient le résultat demandé.

Question I.3 Si B et C sont symétriques par rapport à O, comme ils appartiennent à l'hyperbole de même que A, la question I.1.3 donne le résultat demandé.

Réciproquement soit B' le symétrique de B par rapport à O. Supposons qu'il soit distinct de A. On sait alors que les bissectrices de (AB) et (AB') sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole (d'après I.1.3). Comme il en est de même pour les bissectrices de (AB) et (AC), c'est que $(AC) = (AB')$. Cette droite coupe l'hyperbole en au plus deux points : A et C. Comme B' appartient à l'hyperbole (puisque le centre de cette conique est l'intersection de ses asymptotes, i.e. O), c'est que $B' = C$.

Si maintenant on suppose que $A = B'$, on peut faire le raisonnement en partant de C. Si C' est le symétrique de C par rapport à O, il est distinct de B' puisque $B \neq C$ et donc de A. Le même raisonnement que précédemment montre que $C' = B$ et donc $B' = C$ ce qui est une contradiction car $A \neq C$.

Question I.4 Soit D le point diamétralement opposé à A. Puisque $[A, D]$ est un diamètre on a, en supposant B et C différents de D,

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

et donc

$$\begin{aligned}(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{DB}}) + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{DC}}) &= (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB}}) + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}}) \\ &= (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}) + \pi\ [\pi] \\ &= 0\ [\pi]\end{aligned}$$

puisque les bissectrices de (AB) et (AC) sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole. D'après I.1.3 cela prouve que D appartient à l'hyperbole.

Si on suppose $B = D$ ou $C = D$ le résultat est immédiat **cependant** il pourrait y avoir un quatrième point. L'énoncé est imprécis en ce point. Montrons qu'il n'en est rien. Soit D un éventuel quatrième point d'intersection entre le cercle et le triangle. D'après ce qui précède le point diamétralement opposé à D est également sur l'hyperbole. On a donc affaire à deux couples de points diamétralement opposés (i.e. deux diamètres) disons $[A, B]$ et $[C, D]$ avec B et C symétriques par rapport à O.

Notons qu'en particulier $(ACBD)$ est un rectangle. Notons surtout que la symétrie orthogonale s par rapport à la médiatrice de $[B, C]$ préserve le cercle puisque cette dernière passe par le centre du cercle (qui est évidemment équidistant de B et de C), préserve le rectangle $(ACBD)$ (puisque la médiatrice de $[B, C]$ est aussi celle de $[A, D]$), préserve O (puisque c'est le milieu de $[B, C]$). L'hyperbole équilatère est définie par une certaine condition de rapport de distances ($MF/MH = e$ ou $|MF - MF'| = 2a$) et est donc transformée par s en une symétrie dont les foyers sont les images par s des foyers (puisque $|s(M)s(F) - s(M)s(F')| = |MF - MF'| = 2a$), dont le centre est l'image par s du centre (puisque c'est le milieu des foyers) et qui même aussi équilatère (car la condition pour cela est que l'excentricité vaille $\sqrt{2}$ et que cette dernière est égale au rapport $FF'/2a$) avec axe focal, axe non transverse, asymptotes images de leurs analogues (puisque $s(FF') = (s(F)s(F'))$ etc.). Comme ces deux hyperboles contiennent toutes les deux A, B, C et D il en résulte que soit leur intersection est réduite à ces quatre points (distincts) soit ces hyperboles sont confondues. La première possibilité ne peut se produire ; en effet les deux hyperboles admettent O comme centre de symétrie, leur intersection est donc aussi invariante par la symétrie centrale de centre O. Comme B et C sont symétriques par rapport à O cela signifierait que A et D le sont aussi. Mais alors les droites (BC) et (AD) contiendraient toutes les deux O et devraient pourtant être parallèle (en tant que côtés opposés d'un rectangle). On en déduit donc que s préserve l'hyperbole. C'est donc que c'est la symétrie soit par rapport à l'axe focal soit par rapport à l'axe transverse. Comme (BC) est la perpendiculaire passant par O à sa médiatrice, cela revient à dire que (BC) est soit l'axe non transverse, soit l'axe focal. Le premier cas est impossible puisque justement l'axe non transverse ne coupe pas l'hyperbole. Dans le second cas B et C sont alors les sommets de l'hyperbole et la droite (DB) étant la perpendiculaire à (BC) passant par B est tout simplement la tangente en B à l'hyperbole. Mais cette tangente ne recoupe pas l'hyperbole et ceci est encore une contradiction puisque D devrait s'y trouver. En résumé il ne peut y avoir de quatrième point.

Remarque : on pourrait pousser encore un peu plus loin et montrer qu'en fait, si B est diamétralement opposé à A alors le cercle est tangent à l'hyperbole en B. Essayez de le faire ! On peut aussi montrer que les seuls rectangles inscrits dans une hyperbole sont ceux dont les sommets sont les quatre points d'intersection entre l'hyperbole et un cercle de centre O. Si l'hyperbole est donnée par $xy = 1$ cela veut dire que le rectangle admet pour sommets $(x, 1/x)$, $(1/x, x)$, $(-x, -1/x)$ et $(-1/x, -x)$. On aurait aussi pu tout démontrer en se ramenant à étudier justement l'hyperbole $xy = 1$ et effectuer des calculs en coordonées cartésiennes ...

Partie II

Question II.1.1 L'hyperbole ayant les axes de coordonnées pour asymptotes, elle admet pour équation cartésienne $xy = k$ pour une certaine constante (non nulle) k. Notons $\Im(u)$ la partie imaginaire du nombre complexe u et remarquons que $xy = \Im(z^2)/2$ et donc que l'hyperbole est aussi donnée par l'équation $\Im(z^2) = 2k$. On a $2k = \Im(\omega^2)$ puisque Ω appartient à l'hyperbole et donc l'équation de l'hyperbole est $\Im(z^2) = \Im(\omega^2)$ ou encore $\Im(z^2 - \omega^2) = 0$ ou enfin $z^2 - \omega^2$ réel.
Question II.1.2 Le cercle de centre Ω passant par Ω' est formé des points dont la distance à Ω est égale à $\Omega\Omega'$, c'est-à-dire $2|\omega|$ (puisque Ω' est le symétrique de Ω par rapport à O). Le cercle est donc l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - \omega| = 2|\omega|$.

Il est équivalent d'écrire $z - \omega = 2\omega u$ avec u un complexe de module 1, ou encore $z = \omega(1 + 2u)$. Il nous faut donc chercher les u tels que z soit sur l'hyperbole, i.e. $z^2 - \omega^2$ réel. On a

$$z^2 - \omega^2 = \omega^2((1 + 2u)^2 - 1) = 4\omega^2 u(u + 1)$$

et sa quantité conjuguée est (en tenant compte de $u\bar{u} = 1$)

$$\bar{z}^2 - \bar{\omega}^2 = 4\bar{\omega}^2\bar{u}(\bar{u} + 1) = 4\bar{\omega}^2\frac{1}{u}(\frac{1}{u} - 1) = -4\frac{\bar{\omega}^2}{u^2}(u + 1)\ .$$

La condition $z^2 - \omega^2$ réel est donc

$$z^2 - \omega^2 = \bar{z}^2 - \bar{\omega}^2$$

ou encore

$$\omega^2 u = \frac{\bar{\omega}^2}{u^2} \quad \text{ou} \quad u = -1$$

i.e. (puisque ω est non nul, car O n'appartient pas à l'hyperbole)

$$u^3 = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \quad \text{ou} \quad u = -1\ .$$

En terme de z on a $u = (z - \omega)/(2\omega)$ et donc la condition s'écrit :

$$(z - \omega)^3 = 8\omega\bar{\omega}^2 \quad \text{ou} \quad z = -\omega$$

ce qui peut se condenser sous la forme demandée par l'énoncé.
Question II.1.3 Remarquons que ω est non nul puisque O n'appartient pas à l'hyperbole (c'est son centre de symétrie). En conséquence $8\omega\bar{\omega}^2$ est non nul et admet trois racines cubiques toutes distinctes (si ρ est l'une d'elles, les autres sont $\rho e^{2i\pi/3}$ et $\rho e^{-2i\pi/3}$). Il en résulte que les trois racines de l'équation $(z - \omega)^3 - 8\omega\bar{\omega}^2 = 0$ sont toutes distinctes. Si elles sont en sus distinctes de $-\omega$ on a donc quatre solutions différentes à l'équation du quatrième degré qui décrit l'intersection du cercle et de l'hyperbole : Ω' et trois points A, B et C dont les affixes sont $\omega + \rho$, $\omega + \rho e^{2i\pi/3}$ et $\omega + \rho e^{-2i\pi/3}$. Ces trois points forment donc un triangle équilatéral de centre Ω : on passe de l'un à l'autre par une rotation de centre Ω et d'angle $\pm 2\pi/3$ (puisque cette rotation s'écrit en complexe $z \to \omega + (z - \omega)e^{\pm 2i\pi/3}$).

Il se peut néanmoins que $-\omega$ soit racine de l'équation $(z - \omega)^3 - 8\omega\bar{\omega}^2 = 0$, il est alors racine double de l'équation de II.1.2 et donc le cercle coupe l'hyperbole en un triangle équilatéral dont l'un des sommets est Ω' et, de plus, l'hyperbole et le cercle sont tangents en Ω'. Il nous faut encore chercher les Ω pour lesquels cela se produit. On doit avoir

$$(-\omega - \omega)^3 - 8\omega\bar{\omega}^2 = 0$$

ou encore

$$-8\omega(\omega^2+\bar{\omega}^2)=0\ .$$

Comme ω n'est pas nul, cela signifie que ω^2 est imaginaire pur. Ou encore $x^2=y^2$. On a donc $\omega=x(1\pm i)$. Les trois points d'intersection sont donc Ω' d'affixe $-\omega=-x(1\pm i)$, A d'affixe $\omega+(-\omega-\omega)e^{2i\pi/3}=\omega(1-2(-1/2+i\sqrt{3}/2))=x(1\pm i)(2-i\sqrt{3})=x(2\pm\sqrt{3}+i(\sqrt{3}\mp 2))$ et B d'affixe $\omega+(-\omega-\omega)e^{-2i\pi/3}=x(2\mp\sqrt{3}+i(-\sqrt{3}\pm 2)$.

Question II.2.1 Comme le triangle est équilatéral, B et C sont images de A par une rotation de centre Ω et d'angle $\pm 2\pi/3$. En termes d'affixes cela s'écrit $\beta=\omega+(\alpha-\omega)e^{\pm 2i\pi/3}$ et $\gamma=\omega+(\alpha-\omega)e^{\mp 2i\pi/3}$. Il en résulte $(\beta-\omega)^3=(\gamma-\omega)^3=(\alpha-\omega)^3$. Et donc, si on pose $\rho=\alpha-\omega$, α, β et γ sont trois racines (distinctes) de l'équation de degré 3 $(z-\omega)^3=\rho^3$. Ce sont donc exactement les trois solutions de cette équation (une équation de degré d dans $\mathbf{C}$ a au plus d solutions).

Pour calculer cette expression, qui symétrique en fonction des racines d'un certain polynôme, on peut utiliser les formules de Newton. Rappelons comment les trouver : soit $P(z)$ le polynôme à coefficients complexes défini par $P(z)=(z-\omega)^3-\rho^3$. Comme ses racines sont α, β et γ et qu'il y en a bien trois (autant que le degré de P), P est un multiple de $(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$. Comme les coefficients dominants de ces deux polynômes sont égaux, on a en fait égalité entre ces deux expressions. En développant cette égalité on a donc

$$(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)=z^3-3\omega z^2+3\omega^2 z-\omega^3-\rho^3$$

et

$$\left\{\begin{array}{lcl}\sigma_1&=&\alpha+\beta+\gamma=3\omega\\ \sigma_2&=&\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3\omega^2\\ \sigma_3&=&\alpha\beta\gamma=\omega^3+\rho^3\ .\end{array}\right.$$

Comme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$, on a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9\omega^2-6\omega^2=3\omega^2\ .$$

Question II.2.2 D'après II.1.1 un point d'affixe z appartient à l'hyperbole si et seulement si, pour un point quelconque de l'hyperbole, d'affixe w, on a z^2-w^2 réel. On applique cela à $z=\omega$ et $w=\alpha$:

$$\omega^2-\alpha^2=\frac{1}{3}\left((\beta^2-\alpha^2)+(\gamma^2-\alpha^2)\right)\in\mathbf{R}$$

puisque B et C appartiennent à l'hyperbole (et donc $\beta^2-\alpha^2$ et $\gamma^2-\alpha^2$ sont réels).

Question II.2.3 Il nous faut donc déterminer les fonctions symétriques élémentaires de ces trois nombres. On a

$$\begin{array}{lcl}\sigma_1&=&(\alpha^2-\omega^2)+(\beta^2-\omega^2)+(\gamma^2-\omega^2)\\ &=&0\\ \sigma_2&=&(\alpha^2-\omega^2)(\beta^2-\omega^2)+(\beta^2-\omega^2)(\gamma^2-\omega^2)+(\gamma^2-\omega^2)(\alpha^2-\omega^2)\\ &=&\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-2\omega^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+3\omega^4\\ &=&(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma-6\omega^4+3\omega^4\\ &=&9\omega^4-6\omega(\omega^3+\rho^3)-3\omega^4\\ &=&-6\omega\rho^3\\ \sigma_3&=&(\alpha^2-\omega^2)(\beta^2-\omega^2)(\gamma^2-\omega^2)\\ &=&(\alpha\beta\gamma)^2-\omega^2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+\omega^4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\omega^6\\ &=&(\omega^3+\rho^3)^2-\omega^2(9\omega^4-6\omega(\omega^3+\rho^3))+3\omega^6-\omega^6\\ &=&\omega^6(1-9+6+3-1)+\omega^3\rho^3(2+6)+\rho^6\\ &=&(8\omega^3+\rho^3)\rho^3\end{array}$$

L'équation cherchée est donc

$$z^3-6\omega\rho^3 z-(8\omega^3+\rho^3)\rho^3=0\ .$$

Comme toutes les racines de cette équation sont réelles (et que le coefficient dominant est aussi réel), tous les coefficients du membre de gauche sont réels. On en déduit $\omega\rho^3$ et $(8\omega^3+\rho^3)\rho^3$ réels.

Question II.2.4 Puisque $\omega\rho^3$ est réel (et que ω est non nul puisqu'il appartient à l'hyperbole), on a $\rho^3 = \lambda\bar{\omega}$ pour un certain réel λ. Remarquons que λ est non nul sinon ρ le serait et les trois points A, B et C seraient confondus. D'où

$$(8\omega^3+\rho^3)\rho^3 = \lambda(8\omega^3\bar{\omega}+\lambda\bar{\omega}^2) = 8\lambda\omega\bar{\omega}(\omega^2+\bar{\omega}^2)+\lambda\bar{\omega}^2(\lambda-8\omega\bar{\omega}) .$$

Le premier terme est réel et le second est un multiple réel de $\bar{\omega}^2$. Ce complexe ne peut être nul car sinon Ω serait sur un des axes de coordonnées (qui sont des asymptotes). Donc cette expression n'est réelle que si le second terme est nul, i.e. $\lambda = 8\omega\bar{\omega}$ d'où

$$\rho^3 = \lambda\bar{\omega} = 8\omega\bar{\omega}^2 .$$

Il en résulte que A, B et C sont les racines de $(z-\omega)^3 - 8\omega\bar{\omega}^2 = 0$ et sont donc, d'après II.1.2, sont situés sur le cercle centré en Ω et passant par Ω', le symétrique de Ω par rapport à l'origine. Autrement dit le cercle circonscrit à (ABC) passe par Ω'.

Partie III

Question III.1.1 Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ admet pour coordonnées $(c-b, k/c-k/b)$ qui est un multiple de $(1, -k/(bc))$ ou encore de $(bc, -k)$. Il en résulte qu'une droite perpendiculaire à (BC) admet pour équation $bcx-ky+u=0$ pour une certaine constante (une droite perpendiculaire à une droite de direction $\vec{v}$ est formée de points $M = M_0 + t\vec{w}$ pour un certain point M_0 avec t réel et $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{v}$ et donc on $\overrightarrow{OM}.\vec{v} = \overrightarrow{OM_0}.\vec{v}$ est donc constant sur la droite ; il en résulte que si (x,y) sont les coordonnées d'un point M de la droite et (α,β) les coordonnées du vecteur $\vec{v}$, on a $\alpha x+\beta y = \overrightarrow{OM}.\vec{v}$ est une constante, i.e. une droite perpendiculaire à une droite de direction $\vec{v}$ admet une équation de la forme $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$). Comme la hauteur issue de A passe par A, on détermine u de sorte que ce soit le cas. On a donc $abc-k/a+u=0$ et donc la hauteur issue de A admet

$$bc(x-a)-k(y-k/a) = 0 .$$

On cherche un point d'intersection entre la droite et l'hyperbole, on écrit donc

$$bc(x-a)-k(y-k/a) = 0 \quad \text{et} \quad xy = k ,$$

d'où $bcx^2+(k^2/a-abc)x-k^2=0$ (en multipliant la première équation par x) dont une racine est évidemment a (puisque A appartient à la fois à la droite et à l'hyperbole) et donc l'autre est $-k^2/(abc)$ (car le produit des deux racines vaut le terme constant divisé par le coefficiant dominant). Les coordonnées des deux (éventuellement confondus) points d'intersection sont :

$$(a, \frac{k}{a}) \qquad \text{et} \qquad (-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}) .$$

Le second point d'intersection ayant des coordonnées symétriques en a, b et c, un calcul similaire pour les deux autres hauteurs montre qu'il appartient à toutes les hauteurs du triangle (ABC), c'est donc l'orthocentre de ce triangle. Et on vient de montrer qu'il est sur l'hyperbole.

Question III.1.2 D étant, a priori, le second point d'intersection de la hauteur issue de A il ne peut être confondu avec A que s'il n'y a en fait qu'un seul point d'intersection (i.e. $a = -k^2/(abc)$) et donc que la hauteur issue de A est tangente (en A) à l'hyperbole.

Question III.1.3 Prenons trois de ces points au hasard. La question III.1.1 montre que, pour chacune des deux hyperboles, l'orthocentre du triangle formé par ces trois points appartient encore à l'hyperbole, donc à l'intersection de celles-ci.

Reste à voir que cet orthocentre est distinct des trois sommets et que c'est donc le quatrième point d'intersection. Rappelons que l'orthocentre de (ABC) est A si et seulement si (ABC) est rectangle en A.

Appelons $(A_i)_{1\leq i\leq 4}$ les quatre points d'intersections. Si aucun des triangles formés par ces quatre points n'est rectangle, on a terminé. Supposons donc que l'un d'entre eux soit rectangle et appelons A_1 le sommet où le triangle est rectangle (et A_i, A_j les deux autres). Remarquons qu'aucun des deux autres triangles ayant A_1 pour sommet ne peut être rectangle en A_1 car sinon trois des points seraient alignés (ce qui est impossible puisqu'une droite coupe l'hyperbole en au plus deux points). Remarquons également que le triangle ne comportant pas A_1 comme sommet (i.e. $(A_2A_3A_4)$ ne peut avoir A_1 pour orthocentre car l'orthocentre d'un triangle et deux des sommets déterminent le troisième sommet. Le triangle $(A_2A_3A_4)$ ayant deux sommets en commun avec $(A_1A_iA_j)$ ne peut donc avoir le même orthocentre que lui sans lui être égal). Il en résulte que $(A_2A_3A_4)$ est rectangle sinon son orthocentre fournirait un cinquième point d'intersection entre les deux hyperboles. Appelons A_2 le sommet où ce triangle est rectangle. Alors le triangle $A_1A_3A_4$ ne peut avoir A_2 comme orthocentre, doit être rectangle et ne peut être rectangle en A_1. Appelons A_3 le sommet où il est rectangle. On voit encore que $A_1A_2A_4$ doit être rectangle sans pouvoir l'être en A_1 ni en A_2.

Explicitons un peu plus. On note a_i l'abscisse de A_i. On a vu que $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ est rectangle en A_i (avec $A_5 = A_1$ et $A_6 = A_2$) et donc, d'après III.1.2, on a $a_i^2 a_{i+1}a_{i+2} = -k^2$. On en déduit que a_{i+1} et a_{i+2} sont de signes contraires et que (en faisant le produit de ces 4 équations) $(a_1a_2a_3a_4)^4 = k^8$. Avec la remarque sur les signes cela prouve $a_1a_2a_3a_4 = k^2$ et, en reportant dans chacune des équations et en simplifiant (a_i ne peut être nul en tant qu'abscisse d'un point de l'hyperbole) on obtient $a_1 = -a_2 = a_3 = -a_4$ et donc $A_1 = A_3$ et $A_2 = A_4$. Ceci est une contradiction et donc aucun des quatre triangles ne peut être rectangle !

Question III.1.4 D'après III.1.2 ceci implique que le triangle formé par les trois points d'intersection est rectangle en le point où les deux hyperboles sont tangentes.

Question III.2.1 On multiplie par x^2 (qui ne peut être nul puisque $xy = k$) et on a

$$(x,y) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ x^4 - 2rx^3 + tx^2 - 2skx + k^2 = 0 \, . \end{cases}$$

Le produit des racines est donc le terme constant divisé par le coefficient dominant (multiplié par -1 à la puissance le degré, ici 4), donc c'est k^2.

Question III.2.2 L'abscisse du dernier point d'intersection est nécessairement $k^2/(abc)$ puisque l'équation de degré 4 précédente admet a, b et c comme racines. Comme l'orthocentre du triangle avait $-k^2/(abc)$ comme abscisse d'après III.1.1 et compte tenu du fait qu'on a toujours $y = k/x$ sur l'hyperbole, D est bien le symétrique de ce quatrième point d'intersection par rapport à O (qui n'est le quatrième point que s'il est distinct des trois premiers).

Question III.2.3 Pour un triangle équilatéral le centre du cercle circonscrit est aussi l'orthocentre (et aussi l'isobarycentre, le centre du cercle inscrit et la tête, et la tête ...). On a donc démontré que cet orthocentre (le Ω de II.2.2) appartient à l'hyperbole (c'est III.1.1) et que le quatrième point d'intersection entre le cercle circonscrit à (ABC) et l'hyperbole est le symétrique de l'orthocentre, i.e. de Ω. On a donc retrouvé II.2.2 et II.2.4.

Pour retrouver II.1.3 il faut raisonner dans l'autre sens. Les quatre points d'intersection d'un cercle avec l'hyperbole sont, d'après III.2.2, un triangle et le symétrique de son orthocentre par rapport à l'origine. Ceci est en fait vrai pour n'importe lequel des quatre triangles que l'on peut former à partir des quatre points d'intersection. En particulier pour le triangle qui ne contient pas Ω'. Ceci prouve que Ω est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres points. Comme il était déjà le centre de leur cercle circonscrit, c'est que ce triangle est équilatéral (voir par exemple les relations entre isobarycentre, orthocentre et centre du cercle circonscrit sur la droite d'Euler).

Question III.3.1 Remarquons que si la conique est formée de deux droites, elle comporte deux droites qui sont perpendiculaires l'une à l'autre puisque la hauteur d'un triangle est perpendiculaire au côté opposé.

Cela dit une droite parallèle aux axes (i.e., dans notre cas, aux asymptotes) coupe l'hyperbole en au plus un point (x détermine y et réciproquement puisque $xy = k$) et donc un couple de telles droites ne peut contenir quatre points de l'hyperbole.

Une hyperbole équilatère avec les asymptotes parallèles aux axes admet $xy = ax+by+c$ comme équation. Si $(a,b) \neq (0,0)$ l'intersection des deux hyperboles est donnée par l'intersection de l'hyperbole $xy = k$ et de la droite $ax + by + c = 0$ et contient donc au plus deux points. Si $a = b = 0$ les hyperboles sont évidemment disjointes ou confondues.

Question III.3.2

Question III.3.3 Supposons que $\mathcal{C}$ est distincte de $\mathcal{H}$ (sinon on a déjà terminé) et soit E un de ses points qui n'est pas sur $\mathcal{H}$. On introduit l'unique conique décrite à la question précédente ; elle coupe $\mathcal{C}$ en cinq points (A, B, C, D et E) et est donc confondue avec elle. Ce qui prouve l'assertion.

Question III.3.4

Partie IV

Question IV.1 On rappelle que (relation d'Euler) l'isobarycentre G, l'orthocentre D et le centre du cercle circonscrit Ω vérifient que l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$ envoie D sur Ω (en effet Ω est l'orthocentre du triangle formé par les milieux de (ABC) et la dite homothétie envoie les sommets sur les milieux des côtés opposés, comme c'est une similitude, elle préserve l'orthogonalité et donc envoie l'orthocentre de l'un sur l'orthocentre de l'autre).

Il en résulte que G est le barycentre de $(D, 1)$ et $(\Omega, 2)$ ce que l'on peut écrire $3G = D + 2\Omega$. On a donc

$$A + B + C + D' = 3G + D' = D + D' + 2\Omega = 2(O + \Omega)$$

ce qui se traduit en : l'isobarycentre de A, B, C et D' est le milieu de O et Ω.

Question IV.2.1 Par définition (AC) tend vers la tangente $\mathcal{T}_A$. La hauteur est perpendiculaire à (BC) et donc, à la limite, sera perpendiculaire à (AB). Donc la position limite de $\mathcal{D}_A$ est la perpendiculaire à (AB) passant par A.

Question IV.2.2 Comme $3G = A + B + C$, à la limite on a $3G = 2A + B$, i.e. la position limite de G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

Comme Ω est l'intersection de la médiatrice de $[A, B]$ et de la perpendiculaire à (AC) passant par le milieu de $[A, C]$, sa position limite est l'intersection de la médiatrice de $[A, B]$ et de la normale $\mathcal{N}_A$.

Comme D est l'intersection de $\mathcal{D}_A$ et de la perpendiculaire à (AC) passant par B, sa position limite est l'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par A et la perpendiculaire à $\mathcal{T}_A$ passant par B. On a aussi $D = 3G - 2\Omega$.

Comme O est fixe, D' est le symétrique de D par rapport à O, même à la limite.

Quant à $\mathcal{S}$ il devient tangent en A à l'hyperbole (et passe toujours par B et D').

Question IV.3.1 (AB) tendant vers $\mathcal{T}_A$, la perpendiculaire à (AB) passant par A tend vers la normale $\mathcal{N}_A$, i.e. $\mathcal{D}_A$ tend vers $\mathcal{N}_A$.

G tend vers A car $3G = 2A + B$ tend vers $3G = 3A$.

L'intersection des normales tendant vers le centre de courbure, Ω tend vers le centre de courbure en A de l'hyperbole.

Comme $D = 3G - 2\Omega$ cette relation est encore vraie à la limite : $D = 3A - 2\Omega$. De même $D' = 2O + 2\Omega - 3A = 2O - D$.

La position limite de $\mathcal{S}$ est le cercle osculateur à l'hyperbole en A. Il ne rencontre plus l'hyperbole qu'en A et D'. (Si $A = D'$ le point de contact est en fait quadruple.)

Question IV.3.2

Question IV.3.3 On trace la perpendiculaire à (AO) passant par le symétrique de A par rapport à O. Cette droite est la symétrique de la droite (AD') d'après la question précédente et contient donc le point D. On coupe cette droite avec la normale en A et on obtient donc le point D. Puis on utilise la relation $\Omega = A - (D - A)/2$ (i.e. $\vec{O\Omega}=\vec{OA} +1/2.\ \vec{AD}$) pour construire Ω, le centre de courbure recherché.