PREMIÈRE ÉPREUVE CAPES EXTERNE 1998

par

François Sauvageot

Partie I

Question I.1.1. L'énoncé est très mal rédigé et c'est pourquoi je me permets de démontrer une propriété caractéristique de I_p qui éclaire ce qu'il se passe, même si elle n'est pas demandée !

On montre par récurrence sur l'entier naturel non nul p que I_p est ouvert dans $\mathbf{R}$ et qu'il est formé des points x de I tels que f^p (l'itérée p fois de f) est définie en x.

Attention ! c'est une notion subtile ; en effet f^p est la composée p fois de la restriction de f à I_p et non juste de f, car il y a un problème de domaine de définition.

Pour $p = 1$, on a $I_1 = I$ est ouvert dans $\mathbf{R}$. Comme f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$, I_1 est bien l'ensemble des points où f est définie.

Montrons que l'hypothèse au rang p entraîne le résultat au rang $p+1$. Comme I_p est ouvert dans $\mathbf{R}$, la continuité de f sur I montre que I_{p+1} est ouvert dans I. Mais comme I est ouvert dans $\mathbf{R}$, être ouvert dans I est équivalent à l'être dans $\mathbf{R}$ et donc I_{p+1} est ouvert dans $\mathbf{R}$.

Attention ! il faut vraiment faire ce raisonnement. Par exemple si I était $[0;1]$ et f la fonction nulle, on aurait $I_2 = I = [0;1]$ qui est bien ouvert dans I **mais pas** dans $\mathbf{R}$.

Pour que f^{p+1} soit définie en x, il faut et il suffit que f^p soit définie en $f(x)$, autrement dit que $f(x)$ appartienne à I_p et donc que x appartienne à I_{p+1}.

Il en résulte que $I_{p+1} \subset I_p$ pour tout entier naturel p supérieur à 1 puisque si f^{p+1} est définie en x, f^p l'est a fortiori.

D'après la propriété caractéristique de I_p, A est exactement l'ensemble des points où toutes les f^p $(p \geq 1)$ sont définies. C'est évidemment le cas pour un point fixe de f, autrement dit $\Omega \subset A$ et, d'après l'hypothèse sur Ω, ceci montre que A est non vide.

Si $x \in A$, $f^p(x)$ est défini pour tout entier naturel p supérieur à 1. Il en est de même, a fortiori, pour $f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$ et donc $f(x) \in A$, i.e. A est stable par f (i.e. $f(A) \subset A$).

Question I.1.2 En fait x_0 peut-être le premier terme d'une suite récurrente associée à f si et seulement si toutes les itérées de f sont définies en x_0, i.e. si et seulement si $x_0 \in A$. Et alors, puisque A est stable par f, on a $x_n \in A$ pour tout entier naturel n (par récurrence sur n). On a alors $x_n \in I_p$ pour tout entier naturel p supérieur à 1.

Question I.1.3. On l'a déjà fait en I.1.1.! En effet on a montré que I_p est exactement le domaine de définition de f^p. En particulier f^{p+1} est la composée de f (restreinte à I_{p+1}) suivie de f^p. La première application étant continue par hypothèse sur f, la continuité de f^p pour tout entier naturel p supérieur à 1 en résulte par récurrence sur p.

Puisque la suite prend ses valeurs dans A, donc dans I_p, l'assertion demandée est immédiate.

Question I.1.4. On a, pour x dans $I =]0;2[$,

$$x = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow x = 2x - 1$$

et donc $\Omega = \{1\}$ dans tous les cas.

Toutes les applications considérées sont strictement croissantes donc bijectives. On en déduit les résultats suivants :

1. $f(I) =]0;\sqrt{2}[\subset I$ et donc $I_2 = I_1$, d'où $I_p = I_1$ pour tout entier naturel p supérieur à 1 et, pour finir, $A = I =]0;2[$.
2. Pour que toutes les itérées de f soient définies, il faut donc que x^{2^p} soit dans I pour tout entier naturel p supérieur à 1. Il en résulte que $x \in A$ si et seulement si $|x| \leq 1$ et, finalement, $A =]0;1]$.
3. Si $x_0 = x \in A$ définit une suite récurrente, on a $x_{n+2} - x_{n+1} = 2(x_{n+1} - x_n) = 2^{n+1}(x_1 - x_0) = 2^{n+1}(x-1)$ pour tout entier naturel n. Comme tous ces points sont dans A et donc dans I, on a forcément $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq 2$ et il en résulte qu'on doit avoir $x = 1$. D'où $A = \Omega = \{1\}$.

Question I.2. Comme $x_0 \in A$, la suite récurrente est bien définie. De plus, comme f est croissante, cette suite récurrente est monotone. Elle converge donc dans I si et seulement si elle est bornée par des points de I. Sa limite est alors évidemment un point fixe de f (par continuité de f) et constitue un majorant de la suite (dans le cas croissant) ou un minorant de la suite (dans le cas décroissant).

Il en résulte que la suite converge si et seulement si elle est majorée (respectivement minorée) par un point fixe de f dans le cas croissant (respectivement décroissant). Le premier cas équivaut à $x_1 \geq x_0$, i.e. $x_0 \leq f(x_0)$. Le second équivaut à $x_0 \geq f(x_0)$.

Remarquons que, si x est fixe, $x_0 \leq x$ entraîne $x_1 = f(x_0) \leq f(x) = x$ et donc, en fait, $x_n \leq x$ pour tout entier naturel n. Il en résulte que la limite, si elle existe, est le plus petit point fixe de f supérieur à x_0 (cas $x_0 \leq f(x_0)$) ou le plus grand point fixe de f inférieur à x_0 (cas $x_0 \geq f(x_0)$). Remarquons que ces plus grand et plus petit éléments (dans Ω ensemble des points fixes de f) existent bien puisque Ω est fermé en tant qu'image réciproque de 0 par l'application continue $f - Id$.

Enfin si la suite ne converge pas dans I, c'est qu'elle tend vers une des bornes de I (par monotonie). Il en résulte que x_n tend vers β si $x_0 \leq f(x_0)$ et vers α si $x_0 \geq f(x_0)$.

Question I.3.1. Puisque I est ouvert et que f' est continue avec $|f'(r)| < 1$, on peut trouver ε de sorte que, en posant $k = (1 + |f'(r)|)/2 < 1$, on ait $V_\varepsilon \subset I$ et $|f'(x)| \leq k$ pour tout x dans V_ε. L'assertion résulte alors de l'inégalité des accroissements finis pour deux points de V_ε.

Question I.3.2. Si une suite récurrente converge vers r alors elle appartient à V_ε à partir d'un certain rang, par définition de la notion de convergence.

Réciproquement l'inégalité précédente montre que $x \in V_\varepsilon$ entraîne $f(x) \in V_\varepsilon$ et donc $|f^p(x) - r| \leq k^p|x - r|$ pour tout entier naturel p supérieur à 1. Donc $x_N \in V_\varepsilon$ entraîne $|x_{N+p} - r| \leq k^p\varepsilon$ et donc la suite récurrente converge vers r.

Nous venons de remarquer que V_ε est stable par f, donc que toutes les itérées de f y sont définies et, pour finir, que V_ε est inclus dans A.

L'ensemble A_r est donc formé de tous les x_0 de A tels qu'il existe un entier naturel p tel que $x_p = f^p(x_0) \in V_\varepsilon$. Comme $V_\varepsilon \subset A$, $f^p(x_0) \in V_\varepsilon$ entraîne $f^p(x_0) \in A$ et donc que toutes les itérées de f sont définies en x_0, i.e. $x_0 \in A$. Il en résulte

$$A_r = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} (f^p)^{-1}(V_\varepsilon)$$

qui est bien ouvert par continuité de f^p. (On a noté f^0 l'identité).

Question I.4.1. Puisque I est ouvert et que f' est continue avec $|f'(r)| > 1$, on peut trouver ε de sorte que l'on ait $V_\varepsilon \subset I$ et $|f'(x)| \geq 1$ pour tout x dans V_ε. L'assertion résulte alors du théorème des accroissements finis pour deux points de V_ε.

Question I.4.2. Si la suite est stationnaire à partir d'un certain rang, elle converge évidemment vers sa valeur stationnaire. Réciproquement si la suite convergence vers r répulsif, alors elle prend ses valeurs dans V_ε à partir d'un certain rang, disons N. Mais alors, pour tout entier naturel p on a $|x_{N+p} - r| = |f^p(x_N) - f^p(r)| \geq |x_N - r|$ et donc la suite ne peut tendre vers r si $|x_N - r| > 0$. Il en résulte $x_N = r$ et donc que la suite est stationnaire à partir du rang N.

Question I.5.1. Pour $0 < x < 2$, on a

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{5}x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{21} - \sqrt{5}}{2}$$

et alors on a

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5}}x = 1 - \sqrt{\frac{21}{5}} < 1 - \sqrt{4} = -1$$

donc on a un unique point fixe et il est répulsif.

Question I.5.2. Remarquons que f est décroissante et que $f(I) =]0; 4/\sqrt{5}[\subset I$. Il en résulte que $f \circ f$ est définie sur I et on a

$$f \circ f(x) = \frac{4 - \frac{1}{5}(4 - x^2)^2}{\sqrt{5}} = \frac{4 + 8x^2 - x^4}{5\sqrt{5}} .$$

Le polynôme, de degré 4, $f \circ f(x) - x$ admet comme facteur le polynôme $f(x) - x$, ce qui s'écrit

$$\frac{4 - 5\sqrt{5}x + 8x^2 - x^4}{5\sqrt{5}} = \frac{x^2 + \sqrt{5}x - 4}{\sqrt{5}} P(x)$$

avec P un polynôme de degré 2, disons $ax^2 + bx + c$. Par identification des termes de degré 4, il vient $a = -1/5$; avec les termes de degré 0, il vient $c = -1/5$; avec les termes de degré 3, il vient $b = 1/\sqrt{5}$. D'où

$$f \circ f(x) - x = -\frac{1}{5\sqrt{5}}(x^2 + \sqrt{5}x - 4)(x^2 - \sqrt{5}x + 1)$$

et on en déduit que les points fixes (sur I) sont, par ordre croissant,

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad \frac{\sqrt{21} - \sqrt{5}}{2} \qquad \frac{\sqrt{5} + 1}{2} .$$

Question I.5.3. On a déjà remarqué $f(I) \subset I$ et donc on a $A = I$. Comme il n'y a qu'un point fixe de f dans I et qu'il est répulsif, la suite récurrente de premier terme x_0 converge si et seulement si elle est stationnaire à partir d'un certain rang.

Pour étudier cette possibilité, on se raccroche à $f \circ f = f^2$. Comme f est décroissante, f^2 est croissante sur I. On a également déjà étudié $f^2 - Id = -(x^2 + \sqrt{5}x - 4)(x^2 - \sqrt{5}x + 1)/5\sqrt{5}$ et on connaît son signe sur I : il est positif avant

$(\sqrt{5}-1)/2$ ($-$ par $-$ par $+$), négatif entre $(\sqrt{5}-1)/2$ et $(\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$ ($-$ par $-$ par $-$), positif entre $(\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$ et $(\sqrt{5}+1)/2$ ($-$ par $+$ par $-$) et, enfin, négatif après $(\sqrt{5}+1)/2$ ($-$ par $+$ par $+$).

La suite $(x_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ est croissante ou décroissante selon que ce signe est positif ou négatif en x_0. Dans le cas où x_0 est fixe sous f^2 la suite est stationnaire. Dans les autres cas, on va utiliser le I.2. Dans le premier cas la suite est croissante, majorée par le premier point fixe de f^2, elle converge donc vers ce point fixe. Dans le second cas, elle est décroissante et minorée par ce même point fixe ; elle l'admet donc comme limite. Dans le troisième cas, elle est croissante et majorée par le troisième point fixe, elle converge donc vers lui. Enfin le dernier cas donne aussi le troisième point fixe comme limite. En conclusion la suite $(x_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ converge tout le temps. Sa limite est $(\sqrt{5}-1)/2$ si $x_0<(\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$; c'est $(\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$ si $x_0=(\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$; enfin c'est $(\sqrt{5}+1)/2$ si $x_0>(\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$.

La suite $(x_{2p+1})_{p\in\mathbf{N}}$ converge aussi puisque f est continue. Comme un point fixe de f^2 est envoyé par f sur un autre point fixe de f^2, distinct de lui si ce n'est pas un point fixe de f, on voit (et un calcul le corrobore) que $(\sqrt{5}\pm 1)/2$ sont échangés par f et on a donc la situation suivante :

- La suite récurrente déterminée par x_0 est convergente si et seulement si x_0 est l'unique point fixe de f sur I.
- Dans le cas contraire les suites de termes pairs et impairs convergent toutes les deux vers les deux points fixes de f^2 qui ne sont pas des points fixes de f. Si x_0 est plus grand que le point fixe de f la suite des termes pairs converge vers le plus grand des points fixes de f^2 et celle des termes impairs vers le plus petit de ces points fixes. Quand x_0 est plus petit, les deux suites ont le comportement inverse.

PARTIE II

Question II.1. On utilise les résultats de I.3. On choisit k comme dans I.3.1. et N comme dans I.3.2. On a alors, par récurrence sur l'entier naturel p

$$|x_{N+p}-r|\leq k^p|x_N-r|$$

et le résultat en découle en écrivant $n=N+p$.

La suite $(k^{-n}|x_n-r|)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc bornée par $\max\{k^{-p}|x_p-r| \;/\; 0\leq p\leq N\}$ et donc $|x_n-r|=O(k^{-n})$.

Question II.2.1. On a, pour un certain y_j compris entre x_j et x_{j+1},

$$x_{j+1}-r=f(x_j)-f(r)=(x_j-r)\left(f'(r)+\frac{(x_j-r)f''(y_j)}{2}\right)$$

d'après la formule de Taylor avec reste (dite de Taylor-Lagrange). Comme f' ne s'annule pas en r, la formule de l'énoncé s'en déduit avec

$$R_j=\frac{(x_j-r)f''(y_j)}{2f'(r)}$$

qui est bien un $O(k^j)$ puisque $f''(y_j)$ est une quantité bornée (quand j tend vers l'infini, x_j et x_{j+1} tendent vers r, donc y_j aussi et, par continuité de f'', $f''(y_j)$ tend vers $f''(r)$).

L'expression de x_n-r en fonction de x_0-r s'en déduit par récurrence sur n.

Question II.2.2. L'annulation de $1+R_j$ entraîne l'annulation de $x_{j+1}-r$ et alors la suite récurrente serait stationnaire à partir de ce rang là, ce qui est exclus par hypothèse. Il en résulte que $\ln(|1+R_j|)$ est bien défini.

La suite R_j étant un $O(k^j)$, elle tend vers 0. Par le théorème de comparaison entre séries, la convergence **absolue** de la série de terme général $\ln(|1+R_j|)$ est équivalente à la convergence absolue de la série de terme général R_j. Cette dernière convergence est entraînée par la convergence de la série de terme général k^j, toujours par le théorème de comparaison entre séries.

Remarque : on a besoin de la convergence absolue pour se dispenser de l'hypothèse (non satisfaite ici) de positivité du terme général.

Remarquons que la suite $(R_j)_{j\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et donc que $1+R_j$ est positif à partir d'un certain rang. Ainsi le produit considéré a un signe constant à partir d'un certain rang. Sa convergence est donc équivalente à sa convergence absolue. Celle-ci est impliquée par la convergence de son logarithme (puisque l'exponentielle est continue) et sa limite est l'exponentielle de la limite de son logarithme ; en particulier c'est un nombre non nul.

D'après la formule du II.2.1. $\varpi(x_0) = (x_0 - r)\prod_{j=0}^{\infty}(1+R_j)$ qui est bien non nul car $x_0 \neq r$ puisque la suite n'est pas stationnaire.

Question II.3.1. Il s'agit juste de la formule de Taylor-Young :

$$x_{j+1} - r = f(x_j) - f(r) = \frac{(x_j - r)^2}{2}(f"(r) + o(1))$$

ce que l'on récrire sous la forme de l'énoncé puisque $f"(r)$ est non nul.

Remarquons que $1+S_j$ ne peut être nul sinon $x_{j+1}-r$ le serait et la suite serait stationnaire. On peut donc considérer $|1+S_j|$ élevé à une puissance non entière.

Démontrons la formule demandée par récurrence sur l'entier naturel n supérieur à 2.

Pour $n=2$, on a

$$x_2 - r = \frac{f"(r)}{2}(x_1 - r)^2(1+S_1) = \left(\frac{f"(r)}{2}\right)^3 (x_0 - r)^4(1+S_0)^2(1+S_1)$$

et on a $(1+S_0)^2 = |1+S_0|^2 = \left(|1+S_0|^{2^{-1}}\right)^4$, ce qui prouve la formule attendue.

Supposons la formule valable au rang n et prouvons la au rang $n+1$. On a

$$x_{n+1} - r = \frac{f"(r)}{2}(x_n - r)^2(1+S_n)$$

et la formule résulte de l'hypothèse de récurrence en remarquant, comme précédemment, que $(1+S_{n-1})^2 = |1+S_{n-1}|^2 = \left(|1+S_{n-1}|^{2^{-1}}\right)^4$.

Question II.3.2. On procède comme en II.2.2. en considérant le logarithme de l'expression. On a

$$\ln\left(|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right) = 2^{-j-1}\ln(|1+S_j|) = o(2^{-j-1})$$

puisque S_j tend vers 0 quand j tend vers l'infini. La série des logarithmes est donc absolument convergente et le produit considéré est donc convergent (on n'a pas, ici, de problème avec son signe, puisque c'est un produit de termes positifs) vers une quantité positive non nulle (qui est encore l'exponentielle de la somme de la série des logarithmes).

Question II.3.3. L'expression $2^n\ln(\pi_n)$ est le reste de la série de terme général $2^{n-j-1}\ln(|1+S_j|)$ (à partir de l'indice $n-1$). On a

$$\sum_{j=n-1}^{\infty} 2^{n-j-1}\ln(|1+S_j|) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\ln(|1+S_{n-1+j}|) \leq \max\{\ln(|1+S_j|) \;/\; n-1 \leq j\}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}$$

et tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini puisqu'il en est de même pour S_n.

On choisit évidemment (les valeurs absolues étant là pour assurer que la quantité est positive)

$$\lambda(x_0) = \left|\frac{f"(r)}{2}(x_0 - r)\right| \prod_{j=0}^{\infty} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$$

et on doit vérifier qu'on a bien le résultat espéré. Le rapport $x_n - r$ avec $2(\lambda(x_0))^{2^n}/f"(r)$ est égal à

$$\frac{1 + S_{n-1}}{(\pi_n)^{2^n}}$$

qui tend bien vers 1 puisque S_n tend vers 0 et que $\pi_n^{2^n}$ tend vers $\exp(0) = 1$.

Puisque la suite de terme général $x_n - r$ tend vers 0, l'équivalent précédent impose $|\lambda(x_0)| < 1$. Le fait qu'il soit non nul vient de la non nullité de $f"(r)$, de $x_0 - r$ et du produit infini (II.3.2.).

PARTIE III

Question III.1. Comme f est une fraction rationnelle, elle est de classe C^∞ partout où elle est définie. Son seul pôle étant à l'origine, son domaine de définition est $\mathbf{R}^*$ et, a fortiori, f est bien de classe C^2 sur I.

Pour trouver ses points fixes, on écrit, pour x dans I

$$f_p(x) = x \Leftrightarrow px = (p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}} \Leftrightarrow x^p = a$$

et donc l'unique point fixe de f est $r = a^{1/p}$. On a

$$f'(r) = \frac{p-1}{p}(1 - \frac{a}{r^p}) = 0$$

et

$$f"(r) = \frac{a(p-1)}{r^{p+1}} = (p-1)a^{-1/p} \neq 0\ .$$

On est bien dans la situation du II.3. (point fixe super attractif).

D'après l'expression de f', f est décroissante sur $]0; r]$ et croissante sur $[r; +\infty[$. Il en résulte que $f(I) = [r; +\infty[\subset I$ et donc $A = I$. Autrement dit, pour tout valeur initiale x_0 dans I, la suite récurrente associée à f est bien définie. Pour un indice supérieur à 1, x_n est l'image de x_{n-1} et appartient donc à $f(I)$ et donc $x_n \geq r$.

Il en résulte que la suite est monotone à partir du rang 1 puisque f est croissante sur $[r; +\infty[$. De plus

$$f(x) - x = \frac{1}{p}(\frac{a}{x^{p-1}} - x) = \frac{x}{p}(\frac{r^p}{x^p} - 1)$$

et donc, pour $x \geq r$, on a $f(x) \leq x$. La suite est donc décroissante à partir du rang 1. Comme r est l'unique point fixe de f et que r est plus petit que x_1, la suite récurrente converge vers r d'après I.2.

Question III.2. On calcule, pour u et v réels,

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u^2 + av^2}{2uv}$$

et donc, si $x_n = u_n/v_n$, alors $x_{n+1} = u_{n+1}/v_{n+1}$. Il reste, pour conclure, à vérifier que $x_0 = u_0/v_0$, ce qui est vrai.

On a, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} + \sqrt{a}v_{n+1} = u_n^2 + av_n^2 + 2\sqrt{a}u_n v_n = (u_n + \sqrt{a}v_n)^2$$

et donc

$$u_n + \sqrt{a} = (u_0 + \sqrt{a}v_0)^{2^n} = (x_0 + \sqrt{a})^{2n} .$$

De même

$$u_n - \sqrt{a} = (u_0 - \sqrt{a}v_0)^{2^n} = (x_0 - \sqrt{a})^{2n} .$$

D'où

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{u_n}{v_n} \\ &= \sqrt{a}\frac{(u_n + \sqrt{a}v_n) + (u_n - \sqrt{a}v_n)}{(u_n + \sqrt{a}v_n) - (u_n - \sqrt{a}v_n)} \\ &= \sqrt{a}\frac{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}} . \end{aligned}$$

On cherche $\lambda_2(x_0)$ qui est l'unique constante **positive** (ce n'est pas rappelé dans l'énoncé ... mais sinon il n'y a pas unicité contrairement à ce que pourrait faire croire le dit énoncé !) donnant l'équivalent rappelé. On a

$$f"(\sqrt{a}) = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}} - 1\right) \\ &= \frac{(x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}} \\ &= \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} \frac{1}{1 - \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}} \\ &\sim \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} \end{aligned}$$

puisque $0 \leq |x_0 - \sqrt{a}| < |x_0| + |\sqrt{a}| = x_0 + \sqrt{a}$ et donc

$$\left|\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right| < 1 .$$

D'où la valeur recherchée de $\lambda_2(x_0)$.

Question III.3.1. On se place dans la situation du III.2 avec $a = r^{2q}$. Comme, pour tout x_0, la suite récurrente associée à f est définie et donc positive, on peut en définir sa racine q-ième. On a donc

$$x_{n+1}^{1/q} = \left[\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{r^{2q}}{x_n}\right)\right]^{1/q} = g_q(x_n^{1/q})$$

et donc, si $x_0 = y_0^q$, on a, pour tout entier naturel n, $x_n = y_n^q$. En particulier la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie pour tout rang et la question III.2 montre que

$$y_n = r\left(\frac{(y_0 + r^q)^{2^n} + (y_0^q - r^q)^{2^n}}{(y_0 + r^q)^{2^n} - (y_0^q - r^q)^{2^n}}\right)^{1/q}$$

et
$$y_n - r = x_n^{1/q} - (r^q)^{1/q} = \frac{x_n - r^q}{x_n^{(q-1)/q} + \ldots + r^{(q-1)/q}} .$$
En vertu du résultat du III.2 (pour le numérateur) et de la convergence de x_n vers r (pour le dénominateur), on a
$$y_n - r \sim \frac{2r^q \lambda_2(x_0)^{2^n}}{qr^{q-1}} = \frac{2r}{q}\left(\frac{|y_0^q - r^q|}{y_0^q + r_0^q}\right)^{2^n}$$
et donc
$$C = \frac{2r}{q} \qquad \mu_q = \frac{|y_0^q - r^q|}{y_0^q + r_0^q} .$$
Remarque : ce résultat est encore valable pour une suite stationnaire puisqu'on obtient alors $0 \sim 0$, ce qui est vrai ...

Question III.3.2. Pour utiliser l'indication de l'énoncé, on met x en facteur dans f_p, et il vient (pour x réel strictement positif)
$$\begin{aligned} f_p(x) \leq g_{p-1}(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{p}\left(p - 1 + \frac{r^p}{x^p}\right) \leq x\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{r^{2(p-1)}}{x^{2(p-1)}}\right)\right]^{1/(p-1)} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(p - 1 + \frac{r^p}{x^p}\right)^{p-1} \leq \frac{p^{p-1}}{2}\left(1 + \left(\frac{r}{x}\right)^{2(p-1)}\right) \end{aligned}$$
soit, en posant $t = (r/x)^{2(p-1)}$, (t varie donc dans I lui aussi)
$$\left(p - 1 + t^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{p-1} \leq \frac{p^{p-1}}{2}(1 + t) .$$
Appelons ϕ la fonction définie par le membre de gauche et montrons qu'elle est concave sur $]0; 1[$. Elle est manifestement de classe C^∞ sur I et on peut l'écrire $\phi = \psi^{p-1}$ avec $\psi(t) = p - 1 + t^\alpha$ et $\alpha = p/(2(p-1))$. On a alors $\phi' = (p-1)\psi'\psi^{p-2}$ et $\phi'' = (p-1)\psi^{p-3}(\psi''\psi + (p-2)(\psi')^2)$. Comme ϕ est concave si et seulement si ϕ'' est négative, il vient (par positivité de $p - 1$ et de ψ) : ϕ est concave si et seulement si
$$\alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}(p - 1 + t^\alpha) + (p - 2)\alpha^2 t^{2(\alpha-1)} < 0$$
i.e.
$$(\alpha - 1)(p - 1 + t^\alpha) + \alpha(p - 2)t^\alpha < 0 .$$
De $\alpha(p-1) = p/2$, on déduit $(\alpha-1)(p-1) = p/2 - p + 1 = 1 - p/2$ et $\alpha - 1 + \alpha(p-2) = p/2 - 1$, donc ϕ est concave si et seulement si
$$\left(\frac{p}{2} - 1\right)(t^\alpha - 1) < 0$$
et donc si et seulement si $t < 1$ ou encore $r < x$. La fonction ϕ est donc concave sur l'intervalle $]0; 1[$. En fait elle l'est même sur $]0; 1]$ et c'est ce dont nous allons nous servir (encore, à mon avis, une imprécision de l'énoncé).

Il nous faut trouver une majoration de ϕ et l'inégalité de concavité nous donne malheureusement une minoration. Il faut donc utiliser l'autre propriété caractéristique des fonctions concaves : la courbe est sous ses tangentes. Le point d'abscisse t sur la tangente en t_0 admet comme coordonnées
$$x = t \qquad y = \phi(t_0) + (t - t_0)\phi'(t_0)$$
et pour obtenir l'inégalité voulue il nous faudrait
$$\phi'(t_0) = \frac{p^{p-1}}{2} = \phi(t_0) - t_0\phi'(t_0)$$

et en particulier $\phi(t_0) = (1+t_0)\phi'(t_0)$.

En explicitant cette dernière équation, on obtient

$$p-1+t_0^\alpha = (1+t_0)(p-1)\alpha t_0^{\alpha-1} = \frac{p}{2}(t_0^\alpha + t_0^{\alpha-1})$$

ou encore

$$2(p-1) = (p-2)t_0^\alpha + pt_0^{\alpha-1} \ .$$

Cette dernière équation est manifestement vérifiée pour $t_0 = 1$ et on a alors

$$\phi'(1) = (p-1)\alpha t_0^{\alpha-1}(p-1+t_0^\alpha)^{p-2} = \frac{p}{2}p^{p-2}$$

qui est bien la quantité voulue. Donc, pout $t_0 = 1$ et $0 < t \leq 1$, on a

$$\left(p-1+t^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{p-1} \leq \frac{p^{p-1}}{2}(1+t) \ .$$

Question III.3.3. On démontre la propriété $r < x_n \leq y_n$ par récurrence sur l'entier naturel n. Pour $n = 0$ cela est entraîné par les hypothèses de la question.

Supposons la propriété vraie au rang n. Comme f_p est (strictement) croissante sur $[r;+\infty[$, on déduit de $r < x_n \leq y_n$:

$$r = f_p(r) < f_p(x_n) = x_{n+1} \leq f_p(y_n) \leq g_{p-1}(y_n) = y_{n+1} \ .$$

D'où l'assertion.

On en déduit

$$0 < \frac{x_n - r}{y_n - r} \leq 1$$

et cette quantité est équivalente à (puisque, dans notre cas, C et μ_{p-1} sont non nuls)

$$\frac{2}{Cf_p''(r)}\left(\frac{\lambda_p(x_0)}{\mu_{p-1}(y_0)}\right)^{2^n}$$

ce qui force

$$\lambda_p(x_0) \leq \mu_{p-1}(y_0)$$

i.e.

$$\lambda_p(x_0) \leq \frac{x_0^{p-1} - a^{(p-1)/p}}{x_0^{p-1} + a^{(p-1)/p}} \ .$$

Question III.3.4. Les suites récurrentes u et v définies par x_0 et x_1 comme valeurs initiales vérifient $u_{n+1} = v_n$ pour tout entier naturel n. Par l'unicité de λ_p donnant la vitesse de convergence vers leur limite commune, on en déduit l'égalité recherchée $\lambda_p(x_0) = \sqrt{\lambda_p(x_1)}$.

D'où

$$\lambda_p(x_0) \leq \sqrt{\frac{x_1^{p-1} - a^{(p-1)/p}}{x_1^{p-1} + a^{(p-1)/p}}} \qquad x_1 = f_p(x_0) \ .$$

PARTIE IV

Question IV.1.1. C'est le genre de question tellement précise qu'on ne sait vraiment pas quoi répondre ! Il me semble que l'auteur attend une réponse de ce genre : comme f' est positive au voisinage de r et que toute suite convergeant vers r finit par rester dans un voisinage arbitrairement petit de r, la suite récurrente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.

La formule de Taylor montre alors

$$x_{n+1} - r = (x_n - r)\left(1 + \frac{(x_n - r)^p f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}\right)$$

pour un certain ξ compris entre r et x_n. La monotonie de la suite et la convergence vers r montrent que, nécessairement,

$$|x_{n+1} - r| \leq |x_n - r|$$

et donc, pour n assez grand,

$$(x_n - r)^p f^{(p+1)}(\xi) < 0 \ .$$

Remarquons que $f^{(p+1)}$ garde elle aussi un signe constant au voisinage de r. Il en résulte que si p est pair, on doit avoir $f^{(p+1)}(r) < 0$ et alors on peut avoir aussi bien des suites récurrentes qui convergent vers r en croissant ou en décroissant (à partir d'un certain rang).

Si p est impair et $f^{(p+1)}(r) < 0$ la suite doit converger en décroissant car $x_n > r$. Et si $f^{(p+1)}(r) > 0$ la suite doit converger en croissant.

Question IV.1.2. On veut donc se ramener à une suite convergeant vers 0 en décroissant (la décroissance étant, comme on l'a vu, équivalente à la négativité de $f^{(p+1)}(r)$). On considère donc soit $x_n - r$, soit $r - x_n$ suivant le comportement de x_n. Il nous faut donc trouver la fonction qui fait de ces suites des suites récurrentes.

Dans le premier cas on a $x_{n+1} - r = f(x_n) - r = f(x_n - r + r) - r$ et donc on remplace f par $x \mapsto f(x + r) - r$.

Dans le second cas on a $r - x_{n+1} = r - f(x_n) = r - f(r - (r - x_n))$ et on remplace donc f par $x \mapsto r - f(r - x)$.

Question IV.2.1. On a

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (a(n+1) + \alpha)^{-1/p} \\ &= (a + y_n^{-p})^{-1/p} \\ &= y(ay_n^p + 1)^{-1/p} \end{aligned}$$

et on peut poser $g_a(y) = y(ay_n^p + 1)^{-1/p} = (a + y^{-p})^{-1/p}$ pour y réel strictement positif. C'est bien une fonction continue et même de classe C^∞, dont la dérivée est $(-1/p)(-p)y^{-p-1}(a + y^{-p})^{-1-1/p}$ qui est bien positive (i.e. g_a est croissante).

Donc on a bien des suites récurrentes associées à g_a. Réciproquement si on a une telle suite, on pose $\alpha = y_0^{-p}$ et on retrouve la suite y_n. Donc les suites considérées sont bien toutes les suites récurrentes associées aux g_a.

Question IV.2.2. Il suffit de montrer un encadrement entre les développements limités. On a

$$g_a(x) = x(1 - \frac{a}{p}x^p + o(x^{p+1})) \qquad f(x) = x + \frac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} + o(x^{p+1})$$

et l'encadrement en découle.

On raisonne alors comme en III.3.3. La croissance de f et l'encadrement montrent que si une telle inégalité est vraie à un certain rang, elle est vrai pour les rangs plus grands (pour peu que l'on reste dans le domaine de validité de l'encadrement et où f est croissante). En effet, si $x_n \leq y_n$, on a $x_{n+1} \leq f(y_n) \leq g_b(y_n) = y_{n+1}$.

Comme première valeur on choisit x_N pour les trois de sorte que toutes les suites restent dans $]0;\epsilon[$ à partir de ce rang. La valeur au rang k des suites de termes initiaux x_N associées respectivement à g_a, f et g_b sont les trois termes de l'inégalité recherchée et on a bien le résultat voulu.

Question IV.2.3. Majorons et minorons la quantité $(N+k)^{1/p}x_{N+k}$ pour k un entier naturel arbitraire.

On a

$$(N+k)^{1/p}x_{N+k} \leq \left(\frac{N+k}{bk+x_N^{-p}}\right)^{1/p} \sim b^{-1/p}$$

et

$$(N+k)^{1/p}x_{N+k} \geq \left(\frac{N+k}{ak+x_N^{-p}}\right)^{1/p} \sim a^{-1/p} .$$

Pour tout η il existe donc un rang à partir duquel la suite prend des valeurs comprises entre $a^{-1/p}-\eta$ et $b^{-1/p}+\eta$. On peut choisir a et b de telle sorte que ces quantités soient exactement $l-2\eta$ et $l+2\eta$ avec

$$l = \left(\frac{p}{(p+1)!}\left|f^{(p+1)}(0)\right|\right)^{-1/p} .$$

Et ceci c'est exactement dire que la suite x_n converge vers l. On remarquera que le terme dont on prend la valeur absolue est en fait négatif par hypothèse.

Remarque : on fait en fait un raisonnement sur les limites inférieure et supérieure de la suite x_n.

Question IV.3. On utilise les expressions obtenues pour le changement de fonction du IV.1.2. et on trouve

$$D = \pm\left(\frac{p}{(p+1)!}\left|f^{(p+1)}(r)\right|\right)^{-1/p} .$$

Question IV.4.1. On remarque que $g = f\circ f$ est une fonction admettant r comme point fixe et telle que $g'(r) = f'(r)^2 = 1$.

L'idée est de chercher des exemples et/ou contre-exemples simples par exemple polynomiaux (vu les conditions de dérivées, donc de développement limité, c'est ce qui semble le plus naturel).

Prenons $f(x) = -x+ax^2$ au voisinage de 0. On a $f\circ f(x) = x-2a^2x^3+a^3x^4$ et $f\circ f$ est donc dans la situation p pair (ici $p+1=3$, i.e. $p=2$) et $(f\circ f)^{(p+1)}(0) = -12a^2 < 0$. On n'a donc pas de contradiction avec la condition nécessaire obtenue en IV.1.1.

Prenons maintenant $f(x) = -x+ax^3$. On a $f\circ f(x) = x-2ax^3+3a^2x^5-3a^3x^7+a^4x^9$ et on est dans la situation $p=2$ est pair avec la dérivée troisième de $f\circ f$ en 0 qui vaut $-12a$. Donc si $a<0$ $f\circ f$ ne peut pas avoir de suite récurrente convergeant vers 0, d'après IV.1.1. C'est donc *a fortiori* vrai pour f.

Remarque : en fait $f\circ f$ n'admet pas toujours de première dérivée non nulle, mais si c'est le cas c'est toujours pour un $p+1$ avec p pair. Le critère de convergence des suites récurrentes se lit donc sur le signe de cette dérivée.

Question IV.4.2. Les suites de termes pairs (respectivement impairs) sont des suites récurrentes pour $f\circ f$ et pour lesquelles IV.3. s'applique, donc, si elles convergent vers un point faiblement attractif, c'est toutes les deux en $\pm D/n^{1/p}$. Les deux signes étant en fait opposés puisque l'une est croissante et l'autre décroissante.

Propriétés utilisées

Topologie induite. : Soit A un sous ensemble de $\mathbf{R}$, ses ouverts sont, par définition de la topologie induite, les ensembles U inclus dans A tels qu'il existe un ouvert V de $\mathbf{R}$ tel que $U = A \cap V$ (on dit que ce sont les traces sur A des ouverts de $\mathbf{R}$). En particulier si A est ouvert, ses ouverts sont aussi des ouverts de $\mathbf{R}$ et on a même l'équivalence entre être ouvert dans A et être un ouvert de $\mathbf{R}$ inclus dans A.

Suites monotones. : Pour une suite monotone, il y a équivalence entre être convergente et être bornée. Et même, plus précisément, si la suite est croissante, elle est convergente si et seulement si elle est majorée. Si elle est décroissante, elle est convergente si et seulement si elle est minorée. Ces propriétés étant encore vraies pour les suites monotones à partir d'un certain rang.

Formules de Taylor. : Le début de la formule est toujours le même, c'st l'expression du reste qui change. On veut donc calculer, pour f de classe C^n au voisinage de a

$$f(x) - \left(f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right) .$$

La formule de Taylor-Young est toujours vraie et exprime que cette quantité est un $o((x-a)^n)$. La formule de Taylor-Lagrange est vraie si $f^{(n+1)}$ existe dans un voisinage de a et est continue en a et exprime que le reste est de la forme

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

pour ξ compris entre x et a. Enfin la formule avec reste intégral est valide si f est en fait de classe C^{n+1} et donne la forme

$$\int_a^x (t-a)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

pour le reste.

Accroissements finis. : Le théorème est en fait la formule de Taylor avec reste de Lagrange au rang $n = 1$. L'inégalité en découle et s'écrit

$$|f(x) - f(a)| \leq |x-a| \sup |f'|$$

où le sup est pris sur les t compris entre a et x.

Comparaison des séries. : Pour les séries à termes positifs si les termes généraux sont équivalents on a le même comportement vis-à-vis de la convergence et on a même des équivalents du reste (cas de convergence) ou de la série tronquée (cas de divergence). Quand les séries ne sont plus à termes positifs, la première partie est encore valable en remplaçant convergence par convergence absolue.

Héron. : Il s'agit je crois de Héron d'Alexandrie qui vécut au premier siècle après Jésus Christ (qui faisait partie de l'école des mécaniciens et a fait des expériences sur la Clepsydre).

Barème

Total	123	
Partie I	45	I.1 5+3+4+6 ; I.2 5 : I.3 2+10 ; I.4 1+3 ; I.5 1+2+3
Partie II	24	II.1 2 ; II.2 3+6 ; II.3 5+2+6
Partie III	27	III.1 3 ; III.2 4 ; III.3 6+6+5+3
Partie IV	27	IV.1 5+2 ; IV.2 4+4+4 ; IV.3 2 ; IV.4 4+2

François Sauvageot