

Préliminaires

Question 0.1. Soit (u,v) une base quelconque de \mathcal{E} . Si x et y sont dans \mathcal{E} ; on peut les écrire de façon unique $x = au + bv$ et $y = cu + dv$ avec a, b, c et d réels. On a alors

$$\begin{aligned} x.\psi(y) = \psi(x).y &\Leftrightarrow (au + bv).(c\psi(u) + d\psi(v)) = (a\psi(u) + b\psi(v)).(cu + dv) \\ &\Leftrightarrow (ad - bc)(u.\psi(v) - \psi(u).v) = 0. \end{aligned}$$

En particulier si la base (u,v) vérifie $u.\psi(v) = \psi(u).v$, alors ψ est symétrique. En fait on a même: ψ est symétrique si et seulement si pour toute base (u,v) de \mathcal{E} , $u.\psi(v) = \psi(u).v$.

Question 0.2. Si ψ est un automorphisme, ψ^{-1} l'est aussi et on a $(\psi^{-1})^* = (\psi^*)^{-1}$. En conséquence ψ est symétrique si et seulement si ψ^{-1} l'est.

Question 0.3. Soit λ, μ et ν trois scalaires non tous nuls. La fonction de M , $\lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{BM} + \nu\overrightarrow{CM}$ est la fonction vectorielle de Liebniz.

Supposons que la somme des poids barycentriques $(\lambda + \mu + \nu)$ est nulle, la fonction de Liebniz est alors constante, égale à $\mu\overrightarrow{AB} + \nu\overrightarrow{AC}$. Comme A, B et C sont affinement indépendants, \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont linéairement indépendants (c'est en fait équivalent). Et donc la fonction de Liebniz n'est nulle que si $\mu = \nu = 0$. Mais alors $\lambda = -\mu - \nu = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse « λ, μ et ν non tous nuls ».

Partie I

Question I.1. Soit M et N distincts de A, B et C . On a

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}}\right) = \arg\left(\frac{(m-a)(n-a)}{(b-a)(c-a)}\right).$$

De plus P étant le polynôme unitaire de racines a, b et c , on a $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ et donc $P'(z) = (z-b)(z-c) + (z-a)(z-b) + (z-a)(z-c)$. Il en résulte, puisque P n'a que des racines simples,

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}}\right) = \arg\left(\frac{Q(a)}{P'(a)}\right).$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}}\right) [\pi] \Leftrightarrow \frac{m-a}{b-a} / \frac{c-a}{n-a} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{(m-a)(n-a)}{(b-a)(c-a)} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{(a-m)(a-n)}{(a-b)(a-c)} \in \mathbb{R}^*.$$

Or $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ et $P'(a) = (a-b)(a-c)$. Il en résulte

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}}\right) [\pi] \Leftrightarrow \frac{Q(a)}{P'(a)} \in \mathbb{R}^*.$$

D'où l'assertion sur M et N isogonaux relativement à ABC .

Le même calcul vaut pour les angles modulo 2π en remplaçant \mathbb{R}^* par \mathbb{R}_+^* . D'où l'assertion sur les points strictement isogonaux.

Question I.2.1. Puisque la fraction rationnelle Q/P n'a que des pôles simples, le coefficient de chaque pôle t dans sa décomposition en éléments simples est donné par $Q(t)/P'(t)$. On a donc

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + \frac{\gamma}{z-c}.$$

(Rappel: si t est un pôle simple de $Q(z)/P(z)$ on a $Q(z)/P(z) = a_t/(z-t) + \dots$ et donc $Q(z)(z-t)/P(z) = a_t +$ une fonction qui s'annule en t . En passant à la limite en $z = t$, on a $a_t = Q(t)/P'(t)$.)

Si on réduit au même dénominateur le membre de droite on obtient $P(z)$ au dénominateur et, au numérateur, un polynôme de degré 2 dont le coefficient dominant est $\alpha + \beta + \gamma$. Par identification, ce polynôme étant en fait Q , on doit avoir $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Question I.2.2. On applique la formule de décomposition en éléments simples en $z = m$ et en $z = n$. Comme ce sont des racines de Q , le membre de droite est nul et on obtient les deux égalités demandées.

Question I.2.3 . On peut récrire les égalités précédentes sous la forme

$$\frac{\alpha(\bar{m} - \bar{a})}{|m - a|^2} + \frac{\beta(\bar{m} - \bar{b})}{|m - b|^2} + \frac{\gamma(\bar{m} - \bar{c})}{|m - c|^2} = 0$$

ou encore, en prenant les conjugués complexes,

$$\frac{\alpha(m - a)}{|m - a|^2} + \frac{\beta(m - b)}{|m - b|^2} + \frac{\gamma(m - c)}{|m - c|^2} = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha}{|m - a|^2} \overrightarrow{AM} + \frac{\beta}{|m - b|^2} \overrightarrow{BM} + \frac{\gamma}{|m - c|^2} \overrightarrow{CM} = 0 .$$

Il en résulte que M est le barycentre de A, B et C affectés des coefficients $\sigma\alpha/|m - a|^2, \sigma\beta/|m - b|^2$ et $\sigma\gamma/|m - c|^2$, avec σ de sorte que la somme fasse 1 (σ existe d'après 0.3).

De même N est le barycentre de A, B et C affectés des coefficients $\tau\alpha/|n - a|^2, \tau\beta/|n - b|^2$ et $\tau\gamma/|n - c|^2$, avec τ de sorte que la somme fasse 1.

Un point est sur une droite (XY) si et seulement s'il est barycentre de X et Y et, donc, il nous faut démontrer que les coordonnées barycentriques de M et N sont toutes non nulles. Cela résulte du fait que α, β et γ sont non nuls .

Un point appartient à l'intérieur d'un triangle si et seulement s'il est barycentre à coefficients tous positifs des sommets ou, ce qui revient au même, à coefficients tous de même signe. Comme $\alpha + \beta + \gamma = 1$, les trois coordonnées de M (ou de N) sont toutes de même signe si et seulement si α, β et γ sont strictement positifs, i.e. M et N strictement isogonaux.

Question I.3. En considérant son coefficient dominant et ses racines, on peut factoriser Q sous la forme

$$Q(z) = (\alpha + \beta + \gamma)(z - m)(z - n) = (z - m)(z - n) \quad \text{et on a aussi} \quad \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{\alpha}{z - a} + \frac{\beta}{z - b} + \frac{\gamma}{z - c} .$$

Il en résulte que $Q(a) = \alpha P'(a)$, $Q(b) = \beta P'(b)$ et $Q(c) = \gamma P'(c)$. Donc, d'après I.1, M et N sont isogonaux relativement à ABC .

Question I.4.1. La condition $C1$ exprime le fait que M n'appartient pas aux droites (AB) , (BC) et (CA) ; elle est donc nécessaire. Pour la seconde, si N existe on peut construire le polynôme Q de la question I.1 ainsi que les quantités α, β et γ et alors

$$\lambda|m - a|^2 + \mu|m - b|^2 + \nu|m - c|^2 = (\alpha + \beta + \gamma)\sigma = \sigma \neq 0$$

où σ est la quantité introduite en I.2.3. La condition $C2$ est donc nécessairement vérifiée.

Question I.4.2. Soit $\Sigma = \lambda|m - a|^2 + \mu|m - b|^2 + \nu|m - c|^2$. Posons $\alpha = \lambda|m - a|^2/\Sigma$, $\beta = \mu|m - b|^2/\Sigma$ et $\gamma = \nu|m - c|^2/\Sigma$; ce sont trois réels non nuls (d'après $C1$) de somme 1. On peut donc considérer le polynôme Q de la question I.3. Comme

$$\begin{aligned} Q(m) &= \frac{\lambda|m - a|^2(m - b)(m - c) + \mu|m - b|^2(m - c)(m - a) + \nu|m - c|^2(m - a)(m - b)}{\Sigma} \\ &= \frac{(m - a)(m - b)(m - c)}{\Sigma} (\lambda(\bar{m} - \bar{a}) + \mu(\bar{m} - \bar{b}) + \nu(\bar{m} - \bar{c})) = 0 \end{aligned}$$

par définition des coordonnées barycentriques, Q est un polynôme unitaire admettant m comme racine. Il en résulte qu'il existe un complexe n tel que $Q(z) = (z - m)(z - n)$ et que n est l'abscisse d'un point isogonal à M , d'après I.3.

Pour l'unicité, remarquons que si N est isogonal à M relativement à ABC , on peut construire Q comme en I.1, en déduire des réels α, β et γ . Comme ces trois réels sont reliés à λ, μ et ν par les formules de I.2.3, ils sont uniquement déterminés par M, A, B et C . Mais alors il existe un unique polynôme de degré deux dont les valeurs en a, b et c sont données à l'avance et donc Q est le polynôme de la question I.3: Q est uniquement déterminé par M, A, B et C . D'où l'unicité de N en tant que seconde racine de Q (éventuellement $M = N$ si la racine est double).

Question I.4.3. Si M est dans Δ , ses coordonnées barycentriques sont toutes strictement positives et donc $C1$ et $C2$ sont bien vérifiées.

On peut utiliser les formules précédentes pour trouver N . En effet on reprend les notations de I.4.2 et on considère à nouveau le polynôme Q introduit en I.3. Par relation entre les racines, on a

$$m + n = \alpha(b + c) + \beta(c + a) + \gamma(a + b)$$

et

$$mn = \alpha bc + \beta ca + \gamma ab .$$

En particulier

$$n = \frac{\lambda|m - a|^2(b + c) + \mu|m - b|^2(c + a) + \nu|m - c|^2(a + b)}{\sigma} - m .$$

Les coordonnées barycentriques de M sont des fonctions affines de M et sont donc des fonctions de classe C^∞ de M . Le module au carré étant un fonction polynômiale des coordonnées affines, il est aussi de classe C^∞ . Il en résulte que σ , puis n le sont également. La fonction g est donc bien de classe C^∞ .

De plus si M est isogonal à N relativement à ABC , la réciproque est également vraie par unicité du polynôme Q de la question I.3. Donc g est sa propre fonction réciproque, qui se trouve donc bien être de classe C^∞ , i.e. g est un C^∞ -difféomorphisme involutif de Δ dans lui-même.

Question I.4.4. Il suffit de voir que la condition $C2$ s'obtient en développant le déterminant par rapport à sa dernière ligne ou encore que (λ, μ, ν) est proportionnel à $(Im[(m - b)(\bar{m} - \bar{c})], Im[(m - c)(\bar{m} - \bar{a})], Im[(m - a)(\bar{m} - \bar{b})])$. Il suffit donc de vérifier

$$Im[(m - b)(\bar{m} - \bar{c})]\overrightarrow{AM} + Im[(m - c)(\bar{m} - \bar{a})]\overrightarrow{BM} + Im[(m - a)(\bar{m} - \bar{b})]\overrightarrow{CM} = 0$$

soit

$$Im[(m - b)(\bar{m} - \bar{c})](m - a) + Im[(m - c)(\bar{m} - \bar{a})](m - b) + Im[(m - a)(\bar{m} - \bar{b})](m - c) = 0$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} (m - a)(m - b)(\bar{m} - \bar{c}) & -(m - a)(m - c)(\bar{m} - \bar{b}) & +(m - b)(m - c)(\bar{m} - \bar{a}) \\ -(m - b)(m - a)(\bar{m} - \bar{c}) & +(m - c)(m - a)(\bar{m} - \bar{b}) & -(m - c)(m - b)(\bar{m} - \bar{a}) \end{pmatrix} = 0 .$$

Ce qui est vrai.

Remarque : les coordonnées barycentriques d'un point par rapport à un repère affine sont données par les aires (en général par les volumes) des triangles (simplexes) obtenus en joignant le point à 2 (n-1) des points du repère affine. Ces surfaces sont algébriques, i.e. sont données par un déterminant. On a donc

$$(\lambda, \mu, \nu) \sim (det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}), det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}), det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))$$

et ces déterminants sont justement (à une constante multiplicative près) donnés par les parties imaginaires considérées précédemment.

Le développement de ce déterminant se fait rapidement si on calcule un des termes et qu'on obtient les 5 autres par permutation de a , b et c (en tenant compte des signes, comme dans la formule générale donnant le déterminant).

Le premier terme est

$$|m|^4 - |m|^2 m(\bar{b} + \bar{c}) - |m|^2 \bar{m}(a + c) + m^2 \bar{b}\bar{c} + \bar{m}^2 ac + |m|^2(|c|^2 + a\bar{b} + c\bar{b} + a\bar{c}) - m(\bar{b}|c|^2 + a\bar{b}\bar{c}) - \bar{m}(a\bar{b}c + a|c|^2) + a\bar{b}|c|^2$$

et le déterminant est donc égal à

$$\begin{aligned} & |m|^2(c\bar{b} - b\bar{c} + a\bar{c} - c\bar{a} + b\bar{a} - a\bar{b}) \\ & - m(\bar{b}|c|^2 - \bar{c}|b|^2 + \bar{c}|a|^2 - \bar{a}|c|^2 + \bar{a}|b|^2 - \bar{b}|a|^2) - \bar{m}(a|c|^2 - c|a|^2 + b|a|^2 - a|b|^2 + c|b|^2 - b|c|^2) \\ & + a\bar{b}|c|^2 - b\bar{a}|c|^2 + b\bar{c}|a|^2 - c\bar{b}|a|^2 + c\bar{a}|b|^2 - a\bar{c}|b|^2 \end{aligned}$$

et est donc imaginaire pur.

Question I.4.5. Quitte à la diviser par i , l'équation précédente est de la forme $u|m|^2 + vm + \bar{v}\bar{m} + w = 0$ avec u et w réels et est donc celle d'un cercle. Comme manifestement ce déterminant est nul pour $m = a$, $m = b$ ou $m = c$, ce cercle passe par A , B et C : c'est le cercle circonscrit à ABC .

Remarque : en fait on n'a pas besoin de calculer le déterminant ! Il est nul si et seulement si les lignes sont liées. Autrement dit si et seulement s'il existe trois complexes u , v et w , non tous nuls, tels que

$$u(m - z) + v(\bar{m} - \bar{z}) + w|m - z|^2 = 0$$

pour $z = a$, $z = b$ et $z = c$. Il n'est pas dur de voir qu'en fait w doit être non nul. Ainsi, quitte à prendre soit la partie imaginaire, soit la partie réelle, on peut supposer u , v et w réels (et toujours w non nul). On est donc face à l'équation d'un cercle qui passe par M , i.e. le déterminant est nul si et seulement s'il existe un cercle passant par M qui contienne également A , B et C . Ceci n'est évidemment possible que si M est sur le cercle circonscrit à ABC .

Partie II

Question II.1.1. On a

$$\Phi(M) = \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{A'B'}) + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{A'B'}$$

et donc

$$\Phi(M) = \overrightarrow{CA} \cdot \phi(\overrightarrow{AB}) - \phi(\overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \cdot (\phi(\overrightarrow{AB}) - \phi^*(\overrightarrow{AB})) .$$

Et donc Φ est constante.

Question II.1.2. On vient de le démontrer ...

Question II.1.3. Dans ce cas $\delta_A = (AO)$ est perpendiculaire à $(B'C')$ et on a donc $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0$. Et de même $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{C'A'} = 0$ et $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{A'B'} = 0$. D'où $\Phi(O) = 0$.

Il en résulte $\overrightarrow{AB} \cdot \phi(\overrightarrow{AC}) = \phi(\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC}$. De plus, comme A, B et C sont affinement indépendants, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de \mathcal{E} . Par conséquent, d'après 0.1, ϕ est symétrique.

Question II.1.4. Si ϕ est symétrique, Φ est nulle, d'après l'expression donnée en II.1.2.

Remarquons que δ_A et δ_B ne sont pas parallèles, sinon $(B'C')$ et $(C'A')$ le seraient. Soit donc O leur point de concours ; on a alors $\Phi(O) = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{A'B'} = 0$ et donc O appartient à δ_C . Et donc δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes, i.e. $A'B'C'$ est orthologique à ABC .

Question II.2. Remarquons que l'application affine qui applique A' sur A, B' sur B et C' sur C , n'est rien d'autre que f^{-1} , dont la partie linéaire est ϕ^{-1} .

Il en résulte que les deux conditions sont équivalentes, d'après II.1, à ϕ symétrique, d'une part, et à ϕ^{-1} symétrique d'autre part. D'après 0.2 ces deux conditions sont équivalentes.

Notons $\Omega = \phi(O)$. Comme $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0$, on a $\overrightarrow{A'\Omega} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ puisque ϕ est symétrique. Donc Ω appartient à $\delta_{A'}$. Avec les mêmes arguments on en déduit que Ω appartient à $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$, i.e. $O' = \Omega = f(O)$.

Question II.3. Soit G l'isobarycentre de A, B et C . Par associativité du barycentre, G est également le barycentre de A et A' affectés des coefficients 1 et 2 respectivement. Il en résulte que A' est l'image de A par l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. La même relation existe entre B et B' , et entre C et C' . Autrement dit f est l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$.

En conséquence ϕ est l'homothétie (vectorielle) de rapport $-1/2$. C'est donc un endomorphisme symétrique (puisque scalaire). Il en résulte que ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques.

D'après le théorème de Thalès la droite $(B'C')$ est parallèle à la droite (BC) et donc δ_A est la hauteur de ABC issue de A . Il en résulte que O est l'orthocentre de ABC .

De même $\delta_{A'}$ est la médiatrice de (B, C) et donc O' est centre du cercle circonscrit à ABC .

Partie III

Question III.1. Les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si leurs images par l'homothétie de centre M et de rapport $1/2$ le sont. C'est-à-dire si et seulement si les projections orthogonales de M sur chacun des côtés sont alignées. Cette condition décrit les points du cercle circonscrit à ABC (c'est la droite de Simson).

Redémontrons ce fait avec les notions du problème. On va donc écrire les symétries en complexe et écrire la condition d'alignement. Rappelons que toute symétrie s'écrit sous la forme $z \mapsto u\bar{z} + v$ avec u de module 1 (les symétries sont les similitudes indirectes de rapport 1). On pourrait trouver celle qui laisse fixes A et B en écrivant le système d'équations et on obtiendrait $\sigma_{AB}(z) = ((a - b)\bar{z} - a\bar{b} + \bar{a}b)/(\bar{a} - \bar{b})$.

Néanmoins remarquons que la condition d'alignement de trois points s'écrit en terme d'argument : les points (distincts) d'affixe respective z_1, z_2 et z_3 sont alignés si et seulement si

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}^* .$$

Dans notre cas on doit donc étudier le rapport

$$\frac{\sigma_{AB}(z) - \sigma_{AC}(z)}{\sigma_{AB}(z) - \sigma_{BC}(z)} .$$

Remarquons que le dénominateur s'obtiendra en échangeant les rôles de A et de B dans le numérateur. Ce dernier est une expression de la forme $u\bar{z} + v$ (avec u quelconque), puisque combinaison de termes de cette forme. De plus A est fixé par chacune de ces symétries, donc l'expression doit s'annuler en a . La constante qui manque est donnée par la valeur en un point quelconque, par exemple c . On a donc

$$\sigma_{AB}(z) - \sigma_{AC}(z) = (\bar{z} - \bar{a}) \frac{\sigma_{AB}(c) - c}{\bar{c} - \bar{a}}$$

et aussi

$$\sigma_{AB}(z) - \sigma_{BC}(z) = (\bar{z} - \bar{b}) \frac{\sigma_{AB}(c) - c}{\bar{c} - \bar{b}} .$$

Il en résulte

$$\frac{\sigma_{AB}(z) - \sigma_{AC}(z)}{\sigma_{AB}(z) - \sigma_{BC}(z)} = \frac{(\bar{z} - \bar{a})(\bar{c} - \bar{b})}{(\bar{z} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{a})}$$

et cette dernière quantité est réelle si et seulement si son conjugué complexe l'est, i.e.

$$\frac{(z - a)(c - b)}{(z - b)(c - a)} \in \mathbb{R}^*$$

ou encore si et seulement si a, b, c et z sont cocycliques.

En résumé $A'B'C'$ est un triangle si et seulement si M n'appartient pas au cercle circonscrit à ABC .

On a alors $\delta_{A'} = (A'M)$ puisque (AM') est orthogonale à BC . De même $\delta_{B'} = (B'M)$ et $\delta_{C'} = (C'M)$. Donc les trois droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$ sont concourantes en M et ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques.

Question III.2. $\sigma_{CA}\sigma_{AB}$ est la rotation de centre A et d'angle $2 \left(\widehat{AB, AC'} \right)$. Il en résulte que A est équidistant de C' et de $\sigma_{CA}\sigma_{AB}(C') = \sigma_{CA}(M) = B'$. Donc δ_A est la médiatrice de (B', C') et N est le point de concours des médiatrices du triangle $A'B'C'$, i.e. le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$.

Question III.3. Le produit de trois symétries orthogonales étant une symétrie orthogonale, il suffit de démontrer que la droite (AM) est fixe par le produit $\sigma_{AB}\sigma_{AN}\sigma_{AC}$. Comme A et M sont distincts, il suffit donc de démontrer que A et M sont fixes par ce produit. Pour A c'est immédiat puisqu'il est sur chacun des axes de symétries. Pour M , on a

$$\sigma_{AC}(M) = B'$$

et, comme (AN) est la médiatrice de (B', C') , on a

$$\sigma_{AN}(B') = C'$$

et donc

$$\sigma_{AB}\sigma_{AN}\sigma_{AC}(M) = \sigma_{AB}(C') = M .$$

Il en résulte

$$\sigma_{AB}\sigma_{AN}\sigma_{AC} = \sigma_{AM} .$$

On a également

$$\sigma_{AN}\sigma_{AC} = \sigma_{AB}\sigma_{AM}$$

et donc

$$2 \left(\widehat{AC', AN} \right) = 2 \left(\widehat{AM, AB} \right)$$

ou encore

$$\left(\widehat{AN, AC'} \right) \equiv \left(\widehat{AB, AM} \right) [\pi] .$$

On obtient de même les autres relations

$$\left(\widehat{B\vec{N}, B\vec{A}}\right) \equiv \left(\widehat{B\vec{C}, B\vec{M}}\right) [\pi] \quad \text{et} \quad \left(\widehat{C\vec{N}, C\vec{B}}\right) \equiv \left(\widehat{C\vec{A}, C\vec{M}}\right) [\pi],$$

i.e. M et N sont isogonaux relativement à ABC .

En appliquant ce résultat à la situation de II.3, il vient que le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont isogonaux relativement à ce triangle.

Question III.4.1. On a $MI = IA'$ puisque σ_{BC} préserve les distances et I est sur l'axe de cette symétrie. Or A' est de l'autre côté de l'axe (BC) par rapport à M , et donc, comme M et N sont intérieurs à ABC , A' et N sont séparés par (BC) . Comme I appartient à la fois à (BC) et (NA') , il vient que N, I et A' sont alignés dans cet ordre et donc $NI + IA' = NA'$. Il en résulte

$$MI + IN = IA' + IN = NA' = r.$$

On en déduit de même $MJ + JN = MK + KN = r$ et donc I, J et K appartiennent à l'ellipse Γ de foyers M et N définie par $P \in \Gamma$ si et seulement si $MP + NP = r$.

Question III.4.2. Par la propriété de réflexion des ellipses, une droite D passant par I est tangente à Γ si et seulement si l'angle entre (NI) et D est égal à l'angle entre D et (MI) . Donc, pour que (BC) soit tangente à Γ , il faut et il suffit que

$$\left(\widehat{I\vec{N}, I\vec{B}}\right) = \left(\widehat{I\vec{C}, I\vec{M}}\right).$$

Comme $\left(\widehat{I\vec{C}, I\vec{M}}\right) = \left(\widehat{I\vec{A}', I\vec{C}}\right) = \left(\widehat{I\vec{N}, I\vec{B}}\right)$, (BC) est bien tangente à Γ en I .

On démontre de même que les deux autres côtés sont tangents à Γ .

Question III.5. Il suffit de démontrer que, en construisant A', B' et C' à partir de M (et ABC) comme en III.1, N est le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$, d'après III.2.

Toujours par la propriété de réflexion des ellipses, on a

$$\left(\widehat{I\vec{N}, I\vec{B}}\right) = \left(\widehat{I\vec{C}, I\vec{M}}\right) = \left(\widehat{I\vec{A}', I\vec{C}}\right)$$

et donc N, I et A' sont alignés dans cet ordre. De plus

$$NA' = NI + IA' = NI + MI = r$$

pour une certaine constante r , par définition des foyers de l'ellipse.

Il en résulte que N est bien équidistant de A', B' et C' et donc les foyers de l'ellipse sont isogonaux relativement à ABC . Ils sont même strictement isogonaux d'après I.2.3 (les foyers sont intérieurs à l'ellipse, donc intérieurs au triangle, puisque l'ellipse est inscrite dans le triangle).