
PREMIÈRE ÉPREUVE CAPES EXTERNE 1999

par

François Sauvageot

Partie I

Question I.1.1. Pour i un entier compris entre 1 et p , écrivons P sous la forme

$$P(X) = (X - \lambda_i)^{m_i} Q_i(X)$$

avec $Q_i \in \mathbf{R}[X]$ et $Q_i(\lambda_i) \neq 0$. On a donc

$$P'(X) = (X - \lambda_i)^{m_i-1} (m_i Q_i(X) + (X - \lambda_i) Q_i'(X))$$

et λ_i est donc racine de P' avec la multiplicité $m_i - 1$ (si m_i vaut 1, ce n'est donc pas une racine).

De plus le théorème de Rolle nous assure de l'existence d'une racine de P' dans chaque intervalle $]\lambda_{i+1}; \lambda_i[$, pour i entre 1 et $p - 1$. Ce qui fait au moins $p - 1 + \sum_i (m_i - 1) = p - 1 + n - p = n - 1$ racines pour P' . Puisque P' est de degré $n - 1$, P' n'a pas d'autres racines et ses racines sont exactement de l'ordre que l'on a trouvé, i.e. les λ_i sont de multiplicité $m_i - 1$ et les μ_i sont des racines simples.

Remarquons également que ce résultat reste valable quand p vaut 1 puisqu'alors $P(X) = (X - a)^n$ et $P'(X) = n(X - a)^{n-1}$. Il l'est également quand n vaut 1 puisqu'alors $p = 1$ et P' est constant. Enfin si P n'est pas unitaire, le résultat subsiste. On a donc démontré que si P est un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles, notées $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$, avec $\lambda_p < \lambda_{p-1} < \dots < \lambda_1$ et des multiplicités respectives m_i , alors P' a toutes ses racines réelles et celles-ci sont les λ_i avec multiplicité $m_i - 1$ ainsi que $p - 1$ racines simples $(\mu_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ avec $\lambda_{i+1} < \mu_i < \lambda_i$.

Question I.1.2 On démontre par récurrence sur l'entier naturel k inférieur à n que toutes les racines de $P^{(k)}$ sont réelles et sont inférieures à λ_1 .

Pour $k = 0$, c'est l'hypothèse initiale sur P . Si c'est vrai pour $P^{(k)}$ avec $n - k = \deg(P^{(k)}) \geq 1$, ça l'est pour $P^{(k+1)}$ en appliquant I.1.1 à $P^{(k)}$.

Il en résulte que aucun des $P^{(k)}$ (pour k inférieur à n) ne s'annule sur $]\lambda_1; +\infty[$ et donc y garde un signe constant égal à celui qu'il a quand la variable tend vers $+\infty$. Ce signe est donc le signe du coefficient dominant de $P^{(k)}$, i.e. $n(n-1) \dots (n-k+1)$ et on en déduit

$$\forall x > \lambda_1, \quad P^{(k)}(x) > 0.$$

Question I.2.1. On écrit encore P sous la forme $(X - \lambda_1)^{m_1} Q_1(X)$ avec Q_1 ayant des racines toutes strictement inférieures à λ_1 . D'après I.1.1 on peut aussi écrire P' sous la forme

$$P'(X) = (X - \lambda_1)^{m_1-1} R_1(X)$$

avec R_1 n'ayant que des racines strictement inférieures à λ_1 . Il en résulte, pour $x > \lambda_1$,

$$g(x) = x - (x - \lambda_1) \frac{Q_1(x)}{R_1(x)}$$

où Q_1/R_1 est une fraction rationnelle sans pôle (ni racine) sur $]\lambda_1; +\infty[$. Cette formule est en fait aussi valable en λ_1 . Sous cette forme on a clairement affaire à une fonction de classe C^∞ sur $]\mu_1; +\infty[$ et donc, *a fortiori*, sur $]\lambda_1; +\infty[$.

Question I.2.2. Comme $n \geq 2$, d'après la question précédente, P, P' et P'' sont strictement positifs pour $x > \lambda_1$; il vient immédiatement $g(x) < x$ sur ce même domaine.

On a de plus

$$g' = 1 - \frac{P'^2 - P''P}{P'^2} = \frac{P''P}{P'^2}$$

et donc g' est strictement positive pour $x > \lambda_1$. Donc g est strictement croissante sur ce domaine. Soit donc $x > \lambda_1$. Pour tout couple (y, y') tel que $\lambda_1 < y < y' < x$, on a $g(y) < g(y') < g(x)$ et donc, en passant à la limite quand y tend vers λ_1 par valeurs supérieures, on obtient, par continuité de g ,

$$\lambda_1 = g(\lambda_1) \leq g(y') < g(x).$$

D'où l'encadrement désiré.

Remarque : si la multiplicité de λ_1 dans P est supérieure à 2, alors elle est la même dans PP'' et dans $(P')^2$, à savoir $2m_1 - 2$ et donc $g'(\lambda_1) > 0$. Dans ce cas g est donc strictement croissante sur $]\lambda_1; +\infty[$.

Question I.2.3. On montre par récurrence sur l'entier naturel n que $\lambda_1 < x_{n+1} < x_n$.

Pour $n = 0$, on a $x_0 = b > \lambda_1$ par hypothèse et $x_1 = g(x_0)$ vérifie $\lambda_1 < x_1 < x_0$ d'après I.2.2.

Si l'hypothèse est vraie au rang n , on a en particulier $\lambda_1 < x_{n+1}$ et donc elle est vraie au rang $n + 1$ en appliquant I.2.2. à $x = x_{n+1}$.

Question I.2.4. On a

$$1 - g' = \left(\frac{P}{P'}\right)' = \left(\left(\frac{P'}{P}\right)^{-1}\right)' = -\frac{(P'/P)'}{(P'/P)^2}.$$

Or

$$\frac{P'}{P} = d \log(P) = \sum_{i=1}^p \frac{m_i}{x - \lambda_i}$$

et donc, pour tout $x > \lambda_1$,

$$1 - g'(x) = \frac{\sum_i \frac{m_i}{(x - \lambda_i)^2}}{\left(\sum_i \frac{m_i}{x - \lambda_i}\right)^2}.$$

Question I.2.5. Soit $x > \lambda_1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs

$$\left(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_p}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sqrt{m_1}}{x - \lambda_1}, \dots, \frac{\sqrt{m_p}}{x - \lambda_p}\right)$$

donne le résultat voulu. On a effet

$$\left(\sum_i \frac{m_i}{x - \lambda_i}\right)^2 \leq \sum_i m_i \cdot \sum_i \frac{m_i}{(x - \lambda_i)^2} = n \sum_i \frac{m_i}{(x - \lambda_i)^2}.$$

Question I.2.6. On a déjà vu que g' est strictement positive pour $x > \lambda_1$ en I.2.2. La seconde inégalité résulte de I.2.4 et I.2.5. en tenant compte de la stricte positivité de tous les termes intervenant dans l'inégalité I.2.5.

Question I.2.7. Soit $x > \lambda_1$, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à g sur $[\lambda_1; x]$, on a

$$|g(x) - \lambda_1| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) |x - \lambda_1|.$$

Montrons par récurrence sur l'entier naturel k que

$$|x_k - \lambda_1| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k |x_0 - \lambda_1|.$$

Pour $k = 0$, c'est même une égalité. Si l'inégalité est vraie au rang k , on a, d'après ce qui précède,

$$|x_{k+1} - \lambda_1| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) |x_k - \lambda_1| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k+1} |x_0 - \lambda_1|.$$

La propriété annoncée en résulte. Si k est un entier naturel, de $a \leq \lambda_1 \leq x_0 = b$, on déduit immédiatement

$$0 \leq x_k - \lambda_1 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k (b - a).$$

Question I.3.1. Si $m < n - m_p$, on peut appliquer I.2.3 à P_{m-1} puisque c'est un polynôme unitaire de degré supérieur à 2 ayant toutes ses racines réelles et ayant au moins deux racines distinctes. Comme ρ_m est la plus grande racine, on en déduit immédiatement que $x^{(m)}$ converge en décroissant vers ρ_m .

Si maintenant $m \geq n - m_p$, P_{m-1} est de la forme $(X - \lambda_p)^j$ pour un entier j compris entre 1 et m_p et g_{m-1} est donc définie, pour $x > \lambda_p$, par

$$g_{m-1}(x) = x - \frac{1}{j}(x - \lambda_p).$$

Cette fonction laisse stable l'intervalle $[\lambda_p; +\infty[$, y admet λ_p comme unique point fixe et y est contractante de rapport $1 - 1/j$. D'après le théorème du point fixe, la suite $x^{(m)}$ converge donc vers $\rho_m = \lambda_p$. Comme de plus g_{m-1} est croissante, la suite $x^{(m)}$ est monotone. Enfin, comme λ_p est la borne inférieure de l'intervalle $[\lambda_p; +\infty[$, la convergence a donc nécessairement lieu en décroissant, i.e. on retrouve tous les résultats du cas $m < n - m_p$.

Question I.3.2. On a

$$\begin{aligned} \frac{P'_{m-1}}{P_{m-1}} &= d \log(P_{m-1}) = \sum_{j \geq m} \frac{1}{x - \rho_j} \\ \frac{P'}{P} &= d \log(P) = \sum_j \frac{1}{x - \rho_j} \\ \frac{P'_{m-1}}{P_{m-1}} &= \frac{P'}{P} - \sum_{j < m} \frac{1}{x - \rho_j} = \frac{P' - \sum_{j < m} \frac{P}{x - \rho_j}}{P} \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{P_{m-1}(x)}{P'_{m-1}(x)} = \frac{P(x)}{P'(x) - \sum_{j < m} \frac{P(x)}{x - \rho_j}}.$$

On peut donc calculer la suite $x_k^{(m)}$ en n'utilisant que des termes connus ou approchés : P, P' (qui sont connus grâce à leurs coefficients et non, évidemment, grâce à leurs racines) et les ρ_j pour $j < m$.

PARTIE II

Question II.1.1. On a

$$\sigma_{n,0}(\lambda) = \sigma_{n-1,0}(\lambda') = 1$$

et

$$\sigma_{n,n}(\lambda) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \lambda_n \sigma_{n-1,n-1}(\lambda').$$

On suppose maintenant $1 \leq k \leq n-1$. En considérant l'expression de $\sigma_{n,k}$ et en distinguant les termes dans lesquels apparaît λ_n des autres termes, on obtient directement

$$\begin{aligned} \sigma_{n,k}(\lambda) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k = n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k < n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \\ &= \lambda_n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n-1} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{k-1}} + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k < n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \\ &= \lambda_n \sigma_{n-1,k-1}(\lambda') + \sigma_{n-1,k}(\lambda'). \end{aligned}$$

On remarque que ce calcul est valable avec la convention qu'une somme sur le vide (comme il en apparaît si $k = 1$) est nulle. On remarque aussi que cette formule est valable pour tout n et k à condition de poser $\sigma_{n,k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

Question II.1.2. On va montré par récurrence sur l'entier strictement positif n , la formule suivante

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}^n \quad \phi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n,k}(\lambda) X^{n-k}.$$

Pour $n = 1$, on a $\phi_1(\lambda) = X - \lambda$ et la formule donne

$$\sigma_{1,0}(\lambda)X - \sigma_{1,1}(\lambda) = X - \lambda.$$

Supposons que la formule soit vraie pour $n - 1$. Soit λ dans \mathbf{R}^n et λ' le point de \mathbf{R}^{n-1} qui lui est associé par la question précédente. On a, en utilisant les conventions et le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} \phi_n(\lambda) &= (X - \lambda_n)\phi_{n-1}(\lambda') \\ &= (X - \lambda_n) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\lambda') X^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (\sigma_{n-1,k}(\lambda') + \lambda_n \sigma_{n-1,k-1}(\lambda')) X^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n,k}(\lambda) X^{n-k} \end{aligned}$$

Question II.2. Par définition de la norme sur $\mathbf{R}_n[X]$, la continuité de ϕ_n équivaut à celle de ses coefficients dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$, i.e. à la continuité des $(-1)^k \sigma_{n,k}$. Comme ce sont des polynômes, la continuité est claire.

Question II.3.1. D'après II.1.2, on a

$$a_0 = (-1)^n \sigma_{n,n}(\lambda) = (-1)^n \prod_i \lambda_i$$

et donc a_0 est non nul puisqu'aucun des λ_i n'est nul

Question II.3.2. Soit x un réel non nul, on a

$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_k a_k x^{n-k} = \sum_k a_{n-k} x^k$$

et donc le polynôme Q coïncide sur \mathbf{R}^n avec le polynôme $\sum_k a_{n-k} X^k$, c'est donc qu'il lui est égal. On a donc, pour tout entier k compris entre 0 et n ,

$$b_k = a_{n-k} .$$

Question II.3.3. On a

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^n \prod_i \left(\frac{1}{x} - \lambda_i\right) \\ &= \prod_i (1 - \lambda_i x) \\ &= \left(\prod_i (-\lambda_i)\right) \prod_i \left(x - \frac{1}{\lambda_i}\right) \\ &= a_0 \prod_i \left(x - \frac{1}{\lambda_i}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{a_0} Q = \phi(\delta)$$

pour

$$\delta = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right).$$

Question II.3.4. Le coefficient général de Q/a_0 étant $b_k/a_0 = a_{n-k}/a_0$, on a, pour tout entier k entre 0 et n ,

$$\begin{aligned} (-1)^{n-k} \sigma_{n,n-k}(\delta) &= \frac{b_k}{a_0} \\ &= \frac{a_{n-k}}{a_0} \\ &= \frac{(-1)^k \sigma_{n,k}(\lambda)}{(-1)^n \sigma_{n,n}(\lambda)} \end{aligned}$$

et donc

$$\sigma_{n,n-k} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right) = \frac{\sigma_{n,k}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)}.$$

Question II.4.1. Le polynôme P'/n est unitaire (puisque P l'est) et, d'après I.1.1., toutes ses racines sont réelles, donc il est bien dans l'image de ϕ_{n-1} .

Question II.4.2. On a

$$P(X) = \sum_k a_{n-k} X^{n-k}$$

et donc

$$\frac{1}{n} P'(X) = \sum_k \frac{n-k}{n} a_{n-k} X^{n-1-k}.$$

En utilisant la formule II.1.2, on en déduit, pour tout entier k entre 0 et n ,

$$\sigma_{n-1,k}(\mu') = (-1)^k \frac{n-k}{n} a_{n-k} = \frac{n-k}{n} \sigma_{n,k}(\lambda)$$

et donc

$$\sigma_{n,k}(\lambda) = \frac{n}{n-k} \sigma_{n-1,k}(\mu').$$

Question II.5.1. C'est l'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée aux vecteurs $(1, \dots, 1)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (c'est aussi l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne quadratique).

On a donc égalité si et seulement si tous les λ_i sont égaux.

Question II.5.2. On a

$$\begin{aligned} (n-1)(\sigma_{n,1}(\lambda))^2 - 2n\sigma_{n,2}(\lambda) &= (n-1) \left(\sum_i \lambda_i \right)^2 - 2n \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \\ &= n \sum_i \lambda_i^2 - \left(\sum_i \lambda_i \right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

d'après II.5.1. On a égalité si et seulement si tous les λ_i sont égaux.

Question II.6. Si l'un des λ_i est nul, on a $\sigma_{n,n}(\lambda) = 0$. L'inégalité est alors claire et il y a égalité si et seulement si $\sigma_{n,n-1}(\lambda)$ est nul. Si λ_i est nul, alors $\sigma_{n,n-1}(\lambda)$ est le produit des autres λ_j , on n'a donc égalité si et seulement si au moins deux des λ_i sont nuls.

Si aucun des λ_i n'est nul, on pose μ le vecteur de \mathbf{R}^n formé des inverses des λ_i et on a

$$0 \leq (n-1) (\sigma_{n,1}(\mu))^2 - 2n\sigma_{n,2}(\mu) = (n-1) \left(\frac{\sigma_{n,n-1}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)} \right)^2 - 2n \frac{\sigma_{n,n-2}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)}.$$

D'où

$$(n-1) (\sigma_{n,n-1}(\lambda))^2 - 2n\sigma_{n,n-2}(\lambda)\sigma_{n,n}(\lambda) \geq 0.$$

De plus il n'y a égalité que si tous les $1/\lambda_i$ sont égaux, i.e. tous les λ_i sont égaux.

En résumé il n'y a égalité que si tous les λ_i sont égaux ou si deux au moins d'entre eux sont nuls.

Question II.7. On montre l'inégalité par récurrence sur l'entier n (supérieur à 2) et on démontre également que le cas d'égalité est obtenu seulement quand les λ_i sont tous égaux ou qu'au moins $n-k+1$ d'entre eux sont nuls.

Pour $n=2$, on n'a que le cas $k=1$ à envisager. On a $n-k+1 = n=2$ et donc l'assertion résulte de II.5.2.

Supposons que le résultat soit vrai pour $n-1$. Si $k = n-1$, on a $n-k+1 = 2$ et donc l'assertion résulte de II.6. Si $k < n-1$, on a

$$\begin{aligned} & (\sigma_{n,k}(\lambda))^2 - \frac{n-k+1}{n-k} \frac{k+1}{k} \sigma_{n,k-1}(\lambda)\sigma_{n,k+1}(\lambda) \\ &= \left(\frac{n}{n-k} \right)^2 (\sigma_{n-1,k}(\mu'))^2 - \frac{n-k+1}{n-k} \frac{k+1}{k} \frac{n}{n-k+1} \frac{n}{n-k-1} \sigma_{n-1,k-1}(\mu')\sigma_{n-1,k+1}(\mu') \\ &= \left(\frac{n}{n-k} \right)^2 \left[(\sigma_{n-1,k}(\mu'))^2 - \frac{n-k}{n-k-1} \frac{k+1}{k} \sigma_{n-1,k-1}(\mu')\sigma_{n-1,k+1}(\mu') \right], \end{aligned}$$

ce qui est bien positif par hypothèse de récurrence appliquée à μ' .

On n'a égalité que si les μ_i sont tous égaux ou si $n-k$ d'entre eux sont nuls. Remarquons que $k < n-1$ et donc $n-k \geq 2$. Autrement dit les cas d'égalité sont : soit P' a une racine multiple d'ordre $n-1$, soit admet 0 comme racine multiple d'ordre $n-k$. D'après I.1.1 les seules racines multiples de P' sont les racines multiples de P , l'ordre de multiplicité de ces racines étant 1 de plus pour P que pour P' (cette propriété est très particulière aux polynômes ayant toutes leurs racines réelles). Il en résulte que soit P admet une racine de multiplicité n , soit il admet 0 comme racine de multiplicité $n-k+1$, ce qui est bien la même chose que : soit tous les λ_i sont égaux, soit au moins $n-k+1$ d'entre eux sont nuls.

PARTIE III

Question III.1. Soit r un réel tel que

$$0 < r < \frac{1}{2} \min_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|.$$

Un tel réel existe puisque tous les λ_i sont distincts deux à deux.

Si maintenant x et y appartiennent respectivement à I_i et I_j , pour i distinct de j , on a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|x - y| \geq |\lambda_i - \lambda_j| - |\lambda_j - y| - |x - \lambda_i| > 0$$

et donc les intervalles I_i et I_j sont disjoints.

Question III.2. Sur I_k la seule racine de P est λ_k et P y change de signe puisque c'est une racine simple de P . Il suffit donc de prendre a_k et b_k de part et d'autre de λ_k .

Question III.3.1. Soit $M = \max(|a|, |b|, 1)$, on a, pour tout x de $[a, b]$,

$$|Q(x)| \leq \|Q\| \cdot \sum_k |x|^k \leq (n+1)M^n \|Q\|.$$

Question III.3.2.a. Pour x parmi les a_k ou les b_k , on a

$$|(Q - P)(x)| \leq \beta \|Q - P\| < \alpha \leq |P(x)|$$

et donc $Q(x) = P(x) + (Q(x) - P(x))$ est du même signe que $P(x)$. Il en résulte

$$Q(a_k)Q(b_k) < 0.$$

Question III.3.2.b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, Q a donc au moins une racine dans chacun des intervalles délimités par a_k et b_k et donc, *a fortiori*, dans tous les I_k . Le polynôme Q ayant au plus n racines réelles, il en résulte que Q a n racines réelles simples, une dans chacun des intervalles disjoints I_k .

PARTIE IV

Question IV.1. L'assertion (R2) résulte de (8) et de $a_k = (-1)^{n-k} \sigma_{n,n-k}$.

On a égalité si et seulement si 0 est racine d'ordre $k+1$ ou si P admet une racine multiple d'ordre n .

Remarque : si 0 est racine d'ordre $k+1$, on a $a_k = a_{k-1} = 0$. Réciproquement, soit en utilisant les inégalités précédentes, soit avec l'argument qu'alors 0 est racine double de $P^{(k-1)}$ et donc racine triple de $P^{(k-2)}$ etc. on en déduit que 0 est racine d'ordre $k+1$ de P .

Question IV.2.1. Pour $k = 2$, l'inégalité s'écrit

$$0 \leq a_2^2 - 2a_1a_3 = -10a^3$$

et donc a doit être négatif ou nul. S'il était nul, on aurait $P(X) = X^5 + 1$ qui n'a pas 5 racines réelles.

Question IV.2.2.a. On écrit les inégalités

$$\begin{aligned} (k=1) \quad & a_1^2 - \frac{5}{2}a_0a_2 \geq 0 \quad \text{soit} \quad a^4 \geq 0, \\ (k=2) \quad & a_2^2 - 2a_1a_3 \geq 0 \quad \text{soit} \quad -10a^3 \geq 0, \\ (k=3) \quad & a_3^2 - 2a_2a_4 \geq 0 \quad \text{soit} \quad 25a^2 \geq 0, \\ (k=4) \quad & a_4^2 - \frac{5}{2}a_3a_5 \geq 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{25}{2}a \geq 0. \end{aligned}$$

Question IV.2.2.b. On a, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - \frac{5}{b^2}x^3 + \frac{1}{b^4}x + 1 \\ &= \frac{1}{b^5} \left((bx)^5 - 5(bx)^3 + bx + b^5 \right) \\ &= \frac{1}{b^5} R(bx) \end{aligned}$$

et donc P a autant de racines réelles que R , et avec les mêmes multiplicités.

Question IV.2.2.c. On a

$$\begin{aligned} S'(X) &= 5X^4 - 15X^2 + 1 \\ &= 5 \left(X^4 - 3X^2 + \frac{1}{5} \right) \\ &= 5 \left(\left(X^2 - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{41}{20} \right) \end{aligned}$$

et donc, en posant

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{\frac{41}{5}}}{2}} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{\frac{41}{5}}}{2}}$$

(ce qui est licite puisque $3^2 = 9 \geq 41/5$), les racines de S' sont $\pm\alpha_2$ et $\pm\alpha_1$, avec

$$-\alpha_1 < -\alpha_2 < \alpha_2 < \alpha_1.$$

Pour le calcul, le plus simple est de réduire au maximum l'expression de S en divisant S par S' (afin d'obtenir une expression de degré au plus 3), puis d'utiliser les propriétés des racines. On a donc

$$S(X) = \frac{X}{5} \left(X^4 - 3X^2 + \frac{1}{5} \right) - X \left(2X^2 - \frac{4}{5} \right)$$

et donc, pour α une racine de S' , on a

$$S(\alpha) = -\alpha \left(2\alpha^2 - \frac{4}{5} \right).$$

Donc

$$S(\alpha_2) = \alpha_2 \left(\frac{4}{5} - 2\alpha_2^2 \right) \quad \text{et} \quad S(-\alpha_1) = \alpha_1 \left(2\alpha_1^2 - \frac{4}{5} \right).$$

Comme $0 < \alpha_2 < \alpha_1$, il nous suffit de voir

$$\frac{4}{5} - 2\alpha_2^2 \leq 2\alpha_1^2 - \frac{4}{5}$$

ou encore

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \geq \frac{4}{5}.$$

Or α_1^2 et α_2^2 sont les racines du polynôme $X^2 - 3X + 1/5$ et donc $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 3$, qui est bien supérieur à $4/5$. D'où $S(\alpha_2) < S(-\alpha_1)$ et aussi (par imparité de S') $S(\alpha_1) < S(-\alpha_2)$.

Question IV.2.2.d. Les maxima locaux de P sont obtenus en $-\alpha_1$ et α_2 , tandis que les minima locaux sont obtenus en $-\alpha_2$ et α_1 . Il en résulte que $S(x) = y$ admet 5 solutions distinctes pour $|y| < S(\alpha_2)$, 5 solutions dont une double pour $|y| = S(\alpha_2)$, 3 solutions distinctes pour $S(\alpha_2) < |y| < S(-\alpha_1)$, 3 solutions dont une double pour $|y| = S(-\alpha_1)$ et, enfin, une seule solution pour $|y| > S(-\alpha_1)$.

Il en résulte que R a 5 racines réelles distinctes si et seulement si $|b|^5 < S(\alpha_2)$ ou encore

$$a < -\frac{1}{(S(\alpha_2))^{2/5}}.$$

Question IV.3.1. On a, pour $1 \leq k \leq n - 1$,

$$\frac{k+1}{k} \leq 2 \quad \text{et} \quad \frac{n-k+1}{n-k} \leq 2$$

et donc

$$\frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} \leq 4.$$

Donc si $a_{k-1}a_{k+1} \geq 0$ (H2) entraîne (R2) et sinon (R2) est automatique.

Question IV.3.2. La quantité $a_1^2 - 4a_0$ est le discriminant du trinôme $X^2 + a_1X + a_0$ et donc (H2) entraîne que P a deux racines réelles distinctes.

Question IV.3.3. Par hypothèse de récurrence le polynôme

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}X^k$$

admet $n - 1$ racines réelles distinctes. Comme tous les a_k sont strictement positifs, ce polynôme est strictement positif pour x positif. Il en résulte que

$$Q(X) = X \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}X^k \right)$$

admet $n - 1$ racines réelles distinctes strictement négatives et une racine (simple) nulle.

Question IV.3.4. D'après ce qui précède, on a $N_0 = n$.

Question IV.3.5. Soit $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_{n-1}$ les racines de Q' (réelles et distinctes d'après I.1.1) et t strictement supérieur à $\max |Q(\mu_i)|$. L'équation $Q(x) = -t$ a au plus deux racines réelles puisque Q est strictement monotone sur les intervalles $] -\infty; \mu_{n-1}[$, $[\mu_{i+1}; \mu_i]$ et $[\mu_1; +\infty[$.

Comme $n \geq 3$, Q n'a donc pas toutes ses racines réelles.

Il en résulte que S est non vide. Étant minoré par 0, il admet une borne inférieure positive.

Question IV.3.6. L'application $t \rightarrow Q_t$ est continue de \mathbf{R}_+ dans $\mathbf{R}_n[X]$ et, d'après (R1), l'ensemble H des polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$ ayant n racines réelles distinctes est ouvert. Donc le complémentaire de H est un fermé de $\mathbf{R}_n[X]$ et S , qui est l'image réciproque par ϕ de ce complémentaire, est aussi fermé dans \mathbf{R}_+ , donc aussi dans \mathbf{R} (puisque \mathbf{R}_+ est fermé).

En particulier $\alpha = \inf(S)$ appartient à S . Comme 0 n'appartient pas à S , α est strictement positif.

Question IV.3.7. Comme α appartient à S , on a $N_\alpha < n$.

Question IV.3.8.a. Pour t positif, les racines de Q_t sont négatives puisque $Q_t(x) = Q(x) + t$ est strictement positif pour x positif. De plus x est racine d'un Q_t si et seulement si x est tel que $Q(x) = -t$. Donc x est racine de l'un des Q_t pour $0 \leq t < \alpha$ si et seulement si $Q(x)$ appartient à $] -\alpha; 0]$.

Comme la limite de $|Q|$ en l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) est $+\infty$, l'ensemble $Q^{-1}(] -\alpha; 0])$ est borné, donc inclus dans un intervalle $[-M; M]$ pour un certain M strictement positif, et donc dans l'intervalle $[-M; 0]$.

En résumé les racines de Q_t pour t dans $[0; \alpha[$ sont toutes dans l'intervalle $[-M; 0]$.

Question IV.3.8.b. Cela résulte immédiatement de la compacité de $[-M; 0]^n$. (Noter qu'on n'avait pas besoin d'ordonner les racines de Q_t pour cela.)

Question IV.3.8.c. Comme Q_t est unitaire, on a $Q_{t_p} = \phi_n(\delta_p)$ et donc, par continuité de ϕ_n

$$R = \phi_n(\delta) = \phi_n\left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \delta_{\sigma(p)}\right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} Q_{t_{\sigma(p)}}.$$

Question IV.3.8.d. Par continuité de $t \rightarrow Q_t$, on a aussi

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} Q_t = Q_\alpha$$

et donc $R = Q_\alpha$.

Question IV.3.8.e. Il en résulte $Q_\alpha = \phi_n(\delta)$ et donc Q_α admet n racines réelles. Ces racines sont nécessairement strictement négatives puisque $Q_\alpha(x) \geq \alpha > 0$ pour x positif. De plus, d'après IV.3.7, Q n'a pas n racines simples, et donc Q a au moins une racine de multiplicité supérieure à 2.

Question IV.3.8.f. Les coefficients de Q_α sont ceux de P à l'exception du coefficient constant qui vaut α . En particulier, pour $k > 1$, on a

$$a_k^2 - 4a_{k+1}a_{k-1} > 0$$

et donc, d'après (R3), on a nécessairement

$$a_1^2 - 4\alpha a_2 \leq 0.$$

En particulier

$$a_1^2 - 4\alpha a_2 < a_1^2 - 4a_0 a_2$$

et, par positivité de a_2 , on en déduit $\alpha < a_0$.

En particulier a_0 n'appartient pas à S et $P = Q_{a_0}$ admet n racines distinctes (et strictement négatives).

Question IV.4. On a à vérifier (H2) pour $k = 1$ et $k = 2$. On obtient

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 = 56 > 0$$

et

$$a_2^2 - 4a_1 a_3 = 1 > 0.$$

On a

$$P'(X) = 3X^2 - 10X + 6$$

et P admet donc des extrema locaux en $(5 \pm \sqrt{7})/3$. Soit x un de ces points, on a

$$P(x) = (3x^2 - 10x + 6) \frac{3x - 5}{9} + \frac{-14x + 39}{9} = \frac{-14x + 39}{9}.$$

D'où

$$P(x) = \frac{-14(5 \pm \sqrt{7}) + 3 \times 39}{27} = \frac{47 \mp 14\sqrt{7}}{27} > 0$$

et donc P n'a qu'une racine réelle (qui est strictement inférieure à $(5 - \sqrt{7})/3$).

Question IV.5.1. On veut

$$a_1^2 - \gamma a_0 > 0 > a_1^2 - 4a_0$$

et on peut donc prendre $a_1 = 2$ et soit $a_0 > 1$ pour $\gamma \leq 0$, soit $1 < a_0 < 4/\gamma$ pour $\gamma > 0$. Par exemple

$$X^2 - 2X + \frac{4 + \gamma}{2\gamma}$$

si $\gamma > 0$ et

$$X^2 - 2X + 2$$

si $\gamma \leq 0$.

Question IV.5.2.a. En posant $b_n = b_{-1} = 0$, on a

$$P_t(X) = \sum_{k=0}^n (b_k + tb_{k-1})X^k$$

et donc les coefficients de P_t sont tous strictement positifs. On a

$$\theta(P_t, k) = \frac{(b_k + tb_{k-1})^2}{(b_{k-1} + tb_{k-2})(b_{k+1} + tb_k)}$$

et donc, si $2 \leq k \leq n-1$,

$$\theta(P_t, k) \sim \frac{t^2 b_{k-1}}{t^2 b_{k-2} b_k} = \theta(B, k-1).$$

Question IV.5.2.b. Si $k = 1$, on a

$$\theta(P_t, 1) \sim \frac{t^2 b_0^2}{b_0 t b_1} = t \frac{b_0}{b_1}$$

et donc $\theta(P_t, 1)$ tend vers $+\infty$ avec t .

Question IV.5.3. Comme B vérifie (H3), on a $\theta(B, k-1) > \gamma$ pour $2 \leq k \leq n-1$ et donc, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, il existe un t_k tel que $\theta(P_t, k)$ soit strictement supérieur à γ pour $t \geq t_k$ et donc, pour t assez grand, P_t vérifie (H3). On a déjà remarqué que P_t vérifie (H1) et comme les racines de P_t sont $-1/t$ et les racines de B , elles ne sont pas toutes réelles.