DEUXIÈME ÉPREUVE CAPES EXTERNE 1999

par

François Sauvageot

Partie I

Question préliminaire La somme de tous les coefficients d'une matrice magique d'ordre n est $n^2(n^2+1)/2$ d'après $\mathbf{P}_1$. Chacune des colonnes contribuant de la même façon à cette somme, c'est que $nK = n^2(n^2+1)/2$ et donc $K = K_n$.

Question I.1. On a $a_{11} + a_{12} = K_2 = a_{11} + a_{21}$ et donc $a_{12} = a_{21}$, ce qui est exclu.

Question I.2.a. On peut répartir les coefficients de M en trois groupes selon qu'ils apparaissent dans 2, 3 ou 4 des équations formant $\mathbf{P}_2$. Notons Σ_2, Σ_3 et Σ_4 ces trois ensembles.

Si un coefficient n'appartient pas à Σ_2, c'est qu'il y a au moins trois façon d'obtenir $K_3 = 15$ comme somme de ce coefficient et de deux couples de nombres, les 6 nombres composant ces couples étant tous distincts deux à deux.

Si ce coefficient vaut 1, c'est que 14 se décompose de trois façon distinctes. Mais un de ces deux nombres vaut au moins 7 (la moitié de 14) et, comme les deux nombres sont distincts, il y a au moins un des deux nombres qui vaut 8. Ce qui ne laisse que deux possibilités : 8 et 9 (15=1+8+6=1+9+5). Et donc 1 apparaît dans Σ_2

De même pour 9 : $6 = 15 - 9$ ne se décompose que de deux façons distinctes $1+5$ et $2+4$. Donc 9 apparaît dans Σ_2.

Question I.2.b. Une des deux décompositions où 1 apparaît met en jeu 9 et 5. Comme 9 est dans Σ_2, 5 est donc forcément au milieu, i.e. $a_{22} = 5$. La seconde décomposition est $1+8+6$, on a donc déjà deux choix : placer 1 dans Σ_2 et donc 9 et 5 en conséquence. On choisit ensuite 6 sur un sommet ajacent à 1. Cela force 8 en l'autre sommet, puis 4 sur le sommet opposé à 6 et 2 sur celui opposé à 8. D'où 3 entre 8 et 4 et 7 entre 6 et 2. On a donc deux choix, le premier a quatre possibilités (on place 1 dans Σ_2) et le second deux (on place 6 sur un sommet adjacent à 1), d'où 8 matrices magiques d'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

PARTIE II

Question II.1.a. L'application ϕ_i de $M_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ qui à une matrice M associe la somme des éléments de la i^e ligne ($\sum_j m_{ij}$) est une forme linéaire et donc

$$L_0 = \bigcap_i Ker\phi_i = Vect\langle\phi_i\rangle^{\perp}$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$. Les formes linéaires coefficients $M \to m_{ij}$ étant indépendantes, les ϕ_i le sont aussi et donc l'espace qu'elles engendrent dans le dual de $M_n(\mathbf{R})$ est de dimension n, et donc L_0 est de dimension $n^2 - n$.

On a $\phi_k(E_{ij} - E_{in}) = 0$ pour tout (i,j,k) et donc les matrices $E_{ij} - E_{in}$ sont dans L_0 pour tout (i,j). Si on se restreint à $j < n$ ces matrices sont manifestement indépendantes et donc forment une base de L_0 par un critère de dimension.

On aurait aussi pu écrire toute matrice $M = (m_{ij})$ de L_0 sous la forme

$$\sum_i \left(\sum_{j<n} m_{ij}(E_{ij} - E_{in}) \right)$$

puisque L_0 est défini par la condition $m_{in} = -\sum_{j<n} m_{ij}$ pour tout i.

Question II.1.b. On a $\phi_i(KI_n) = K$ pour tout i et donc, par linéarité des ϕ_i,

$$\phi_i(M) = K \Leftrightarrow \phi_i(M - KI_n) = 0$$

ou encore

$$M \in L_K \Leftrightarrow M - KI_n \in L_0 \ .$$

Question II.1.c. Il en résulte que

$$L = L_0 + \mathbf{R}I_n$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ et comme $I_n \notin L_0$, on a même

$$L = L_0 \oplus \mathbf{R}I_n$$

et donc L est de dimension $n^2 - n + 1$.

Question II.2.a. La condition est évidemment nécessaire. Remarquons également que la somme des coefficients de toute matrice de L_0 est nulle, puisque la somme de chaque ligne est nulle. Aussi si la somme des coefficients de toutes les colonnes sauf une est nulle, il en est de même pour la dernière colonne. L'équivalence en résulte.

Question II.2.b. Tout comme L_0, C_0 est intersection de noyaux de formes linéaires et est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$, il en est donc de même pour l'intersection $L_0 \cap C_0$.

Les formes coordonnées $M \to m_{ij}$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$, sont indépendantes sur L_0 (puisque les $E_{ij} - E_{in}$ forment une base) et donc les formes linéaires (sur L_0) $\psi_j \ : M \to \sum_i m_{ij}$, pour $1 \leq j \leq n-1$, le sont aussi. Il en résulte

$$L_0 \cap C_0 = \cap_j Ker(\psi_j)$$

est de dimension $dim(L_0) - (n-1) = (n-1)^2$. C'est d'ailleurs évident puisqu'une matrice de $L_0 \cap C_0$ est déterminée par sa matrice extraite de taille $n-1$ obtenue en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne.

On obtient une base de $L_0 \cap C_0$ en prenant les $(E_{ij} - E_{in}) - (E_{nj} - E_{nn})$ i.e. les

$$(E_{ij} - E_{in} - E_{nj} + E_{nn})_{1 \leq i,j \leq n-1} \ .$$

Question II.3.a. Si M appartient à L_K, la somme de tous les coefficients de M est nK. De même si M appartient à $C_{K'}$, cette somme vaut nK' et donc si M appartient à L et C, elle appartient à $L_K \cap C_K$ où K est la somme de tous les coefficients de M divisée par n. La réciproque est évidente.

Question II.3.b. Il en résulte
$$L \cap C = (L_0 \cap C_0) \oplus \mathbf{R} I_n$$
et donc $L \cap C$ est de dimension $(n-1)^2 + 1$.

PARTIE III

Question III.1.a. Si f préserve le carré, elle préserve l'isobarycentre de ses sommets, i.e. le centre du carré.

De plus un couple de sommets consécutifs ne peut s'envoyer que sur un autre couple de sommets consécutifs puisque f est une isométrie. En particulier
$$\vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) \in \left\{\pm\, \overrightarrow{AB}, \pm\, \overrightarrow{AC}\right\} .$$
Le même raisonnement vaut pour $\overrightarrow{AC}$ mais on peut préciser que, comme f est bijective et comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont indépendants, il en est de même de leurs images par $\vec{f}$. Notons qu'il existe un scalaire non nul λ tel que $\overrightarrow{AB}= \lambda\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}= \pm\lambda\vec{v}$. On en déduit
$$\vec{f}(\vec{u}) \in \{\pm\vec{u}, \pm\vec{v}\}$$
et donc que l'image du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs parmi $(\pm\vec{u}, \pm\vec{v})$ ou $(\pm\vec{v}, \pm\vec{u})$, les signes étant tous indépendants.

Il en résulte que si M est un point quelconque de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$, on a
$$f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = x\vec{f}(\vec{u}) + y\vec{f}(\vec{v})$$
et donc f est bien de la forme annoncée.

Dans le premier cas, on trouve : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $f = Id$; $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$, $f = -Id$; $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$, $f = s_{(Ox)}$; $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = -1$, $f = s_{(Oy)}$. Et dans le second, on trouve : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $f = s_{(y=x)}$; $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$, $f = s_{(y=-x)}$; $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$, $f = rot_{\pi/2}$; $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = -1$, $f = rot_{3\pi/2}$. On trouve donc le groupe D_8 formé des rotations d'angles multiples de $\pi/2$ et des symétries orthogonales par rapport aux axes ou aux bissectrices.

Question III.1.b. On cherche donc à exprimer $\overrightarrow{\Omega f(N)}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. On a
$$\overrightarrow{\Omega f(N)}=\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{O f(N)}=\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{f(O) f(N)}=\overrightarrow{\Omega O} +\vec{f}(\overrightarrow{ON})$$
et
$$\vec{f}(\overrightarrow{ON}) = \vec{f}(\overrightarrow{O\Omega}) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega N}) .$$
D'où
$$\overrightarrow{\Omega f(N)}= \frac{n+1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) - \frac{n+1}{2}\left(\vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})\right) + X\vec{f}(\vec{u}) + Y\vec{f}(\vec{v}) .$$
On a donc

Id :	$(X', Y') = (X, Y)$	$s_{y=x}$:	$(X', Y') = (Y, X)$
$rot_{\pi/2}$:	$(X', Y') = (n+1-Y, X)$	s_{Ox} :	$(X', Y') = (X, n+1-Y)$
$-Id$:	$(X', Y') = (n+1-X, n+1-Y)$	$s_{y=-x}$:	$(X', Y') = (n+1-Y, n+1-X)$
$rot_{3\pi/2}$:	$(X', Y') = (Y, n+1-X)$	s_{Oy} :	$(X', Y') = (n+1-X, Y)$

Question III.2.a. On vient de calculer la bijection inverse de ϕ. Puisque l'identité et $x \to n+1-x$ préservent $[1;n]$, ϕ^{-1} préserve $[1;n]^2$. Par bijectivité, on a en fait $\phi^{-1}\left([1;n]^2\right) = [1;n]$ et donc aussi

$$\phi\left([1;n]^2\right) = [1;n]\ .$$

Question III.2.b. L'application Φ_f est donc donnée par

$$\Phi_f\left(\sum_{i,j} m_{ij} E_{ij}\right) = \sum_{i,j} m_{ij} E_{\phi^{-1}(i,j)}$$

et est donc bien un endomorphisme de $M_n(\mathbf{R})$. C'est même un isomorphisme.

Question III.3. Il faut d'abord montrer que $\mathcal{F}$ est un groupe. On va plutôt vérifier que c'est un sous-groupe du groupe des isomorphismes de l'espace vectoriel $M_n(\mathbf{R})$. Il nous faut donc juste vérifier que $\mathcal{F}$ est non vide et que $\Phi_f \circ (\Phi_g)^{-1}$ appartient à $\mathcal{F}$ pour tout Φ_f et Φ_g dans $\mathcal{F}$.

L'identité appartient à $\mathcal{F}$ qui est donc non vide. Prenons f et g deux éléments de $\mathcal{I}$ et notons ϕ et ψ leurs deux applications associées par III.2. On calcule $\Phi_f \circ (\Phi_g)^{-1}$ dans la base des E_{ij}.

$$\Phi_g(E_{ij}) = E_{\psi^{-1}(i,j)} \quad \text{et donc} \quad (\Phi_g)^{-1}(E_{ij}) = E_{\psi(i,j)}\ .$$

D'où

$$\Phi_f \circ (\Phi_g)^{-1}(E_{ij}) = E_{\phi^{-1}\circ\psi(i,j)}\ .$$

Or $\psi^{-1}\circ\phi$ est l'expression de $(g^{-1})^{-1}\circ f^{-1}$, i.e. de $(f\circ g^{-1})^{-1}$, dans le repère $\mathcal{R}'$ et donc $\psi^{-1}\circ\phi$ est associée à $f\circ g^{-1}$ par III.2 et donc

$$E_{\phi^{-1}\circ\psi(i,j)} = E_{(\psi^{-1}\circ\phi)^{-1}(i,j)} = \Phi_{f\circ g^{-1}}(E_{ij})\ .$$

Il en résulte

$$\Phi_f \circ (\Phi_g)^{-1} = \Phi_{f\circ g^{-1}} \in \mathcal{F}$$

et donc $\mathcal{F}$ est bien un groupe. Au passage cette formule prouve que $f \to \Phi_f$ est un homomorphisme de groupes entre $\mathcal{I}$ et $\mathcal{F}$. Cet homomorphisme est surjectif par définition de $\mathcal{F}$ et le noyau de cet homorphisme est formé des f tels que Φ_f est l'identité, i.e. des f tels que

$$\forall (i,j) \quad \Phi_f(E_{ij}) = E_{ij}$$

et donc ϕ est l'identité et donc f aussi. Pour finir $f \to \Phi_f$ est un isomorphisme de groupes entre $\mathcal{I}$ et $\mathcal{F}$.

Question III.4.a. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice magique d'ordre n et $M' = \Phi_f(M) = (m'_{ij})$ son image par Φ_f. On a $m'_{ij} = m_{\phi(i,j)}$. La matrice M' est donc magique si ϕ envoie les lignes (i constant), les colonnes (j constant), les diagonales ($i+j = n+1$ et $i = j$) sur elles-même. Comme f préserve le carré $[1;n]^2$, elle préserve les sommets et comme elle est affine, elle préserve donc les diagonales du carré. Sur les expressions de ϕ, il est clair que ϕ envoie les droites parallèles aux axes sur elles-même. Donc M' est bien magique aussi.

Question III.4.b. Soit ϕ et ψ les applications associées à f et g par III.2. On a

$$\Phi_f(M) = \Phi_g(M) \Leftrightarrow \forall (i,j) \quad m_{\phi(i,j)} = m_{\psi(i,j)}\ .$$

Or tous les coefficients de M sont distincts d'après $\mathbf{P}_1$ et donc

$$\Phi_f(M) = \Phi_g(M) \Leftrightarrow \forall (i,j) \quad \phi(i,j) = \psi(i,j)$$

i.e. $\phi = \psi$ ou encore $f = g$.

Question III.4.c. Introduisons la relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices magiques d'ordre n définie par $M \sim N$ s'il existe f dans $\mathcal{I}$ tel que $\Phi_f(M) = N$. C'est bien une relation d'équivalence puisqu'elle est réflexive (en prenant $f = Id$), symétrique (en prenant f et son inverse), transitive (en prenant f, g et $g \circ f$). D'après III.4.a et III.4.b toutes les classes d'équivalences ont exactement autant d'éléments que $\mathcal{F}$, i.e. huit éléments. Comme l'ensemble des matrices magiques est réunion de ces classes d'équivalence, c'est que son cardinal est divisible par 8.

PARTIE IV

Question IV.1. Le terme général de $A_\sigma M$ d'indice (i,j) est $m_{\sigma(i),j}$. Celui de MA_σ est $m_{i,\sigma^{-1}(j)}$. En effet

$$\sum_k \delta_{\sigma(i),k} m_{k,j} = m_{\sigma(i),j}$$

et

$$\sum_k m_{i,k} \delta_{\sigma(k),j} = m_{i,\sigma^{-1}(j)} \ .$$

Question IV.2. Les formules précédentes montrent que le terme général de $A_\sigma {}^t A_\sigma$ est $\delta_{\sigma(i),\sigma(j)} = \delta_{ij}$ et donc A_σ est une matrice orthogonale. On va donc vérifier que $\mathcal{S}$ est un sous-groupe du groupe des matrices orthogonales de dimension n.

La non vacuité de $\mathcal{S}$ est claire et il nous faut calculer $A_\sigma A_\tau^{-1}$ pour σ et τ dans $\mathfrak{S}_n$. Le terme général de $A_\sigma A_\tau^{-1} = A_\sigma {}^t A_\tau$ est $\delta_{\sigma(i),\tau(j)} = \delta_{\tau^{-1}\sigma(i),j}$ et donc

$$A_\sigma A_\tau^{-1} = A_{\tau^{-1}\sigma} \in \mathcal{S} \ .$$

Cette formule montre également que $\sigma \to A_{\sigma^{-1}}$ est un homomorphisme (surjectif) de groupes. Son noyau est formé des σ tels que $A_{\sigma^{-1}}$ est l'identité et donc réduit à l'identité. On a donc affaire à un isomorphisme de groupes.

Question IV.3.a. On calcule directement le terme général de $A_\sigma M A_{\sigma'}$:

$$m_{\sigma(i),\sigma'^{-1}(j)} \ .$$

On a

$$\sum_i m_{\sigma(i),\sigma'^{-1}(j)} = \sum_k m_{k,\sigma'^{-1}(j)} = K$$

et

$$\sum_j m_{\sigma(i),\sigma'^{-1}(j)} = \sum_k m_{\sigma(i),k} = K \ .$$

Donc $A_\sigma M A_{\sigma'}$ appartient à $L_K \cap C_K$.

Question IV.3.b. Soit M une matrice magique, elle appartient à $L_K \cap C_K$ pour un certain K et on a

$$\sum_i m_{\sigma(i),\sigma(i)} = \sum_k m_{k,k} = K$$

et, pour σ dans $\mathfrak{T}_n$,

$$\sum_i m_{\sigma(i),\sigma(n+1-i)} = \sum_i m_{\sigma(i),n+1-\sigma(i)} = \sum_k m_{k,n+1-k} = K$$

et donc $A_\sigma M A_{\sigma^{-1}}$ est magique d'ordre n (en tenant compte de IV.3.a).

Question IV.4.a. Soit σ et τ dans $\mathfrak{T}_n$ et k dans $[1;n]$, on a

$$\sigma\tau(n+1-k) = \sigma\left(n+1-\tau(k)\right) = n+1-\sigma\tau(k)$$

et

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}(n+1-k) &= \sigma^{-1}\left(n+1-\sigma(\sigma^{-1}(k))\right)\\ &= \sigma^{-1}\left(\sigma(n+1-\sigma^{-1}(k))\right)\\ &= n+1-\sigma^{-1}(k)\ .\end{aligned}$$

Donc $\mathfrak{T}_n$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. Il en résulte que $\mathcal{J}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}$ isomorphe à $\mathfrak{T}_n$.

Question IV.4.b. Soit σ dans $\mathfrak{T}_n$. Remarquons que si $k+l=n+1$, alors $\sigma(k)+\sigma(l)=n+1$ et donc σ respecte la partition de $[1;n]$ en sous-ensembles donnée par

$$[1;n] = \coprod_{1\leq k<\frac{n+1}{2}} \{k, n+1-k\} \coprod \left\{\frac{n+1}{2}\right\}$$

le dernier ensemble pouvant être vide. S'il ne l'est pas $(n+1)/2$ est donc un point fixe de σ. Se donner σ est donc se donner l'image de tous les ensembles à deux éléments de la forme $\{k, n+1-k\}$. Choisir l'image de ces ensembles, c'est se donner une permutation des k tels que $1\leq k\leq n/2$, et dans chacune de ces images fixer l'image de k (et donc aussi de $n+1-k$), c'est choisir un des deux éléments de l'image. Il en résulte, pour p la partie entière de $n/2$,

$$\mathrm{Card}\mathcal{J} = 2^p.p!\ .$$

PARTIE V

Question V.A.1. Puisque 3 est premier à n, on peut trouver une relation de Bézout entre eux, disons $3m+un=1$ avec m et u entiers. Remarquons au passage que m est aussi premier à n et est l'inverse de 3 modulo n, i.e. $3m\equiv 1\ [n]$.

Si (i,j,k,l) vérifient le premier système, on a

$$2k-l \equiv 2(2i+j)-(i+2j) = 3i\ [n] \quad \text{et} \quad 2l-k \equiv 2(i+2j)-(2i+j) = 3j\ [n]$$

et donc, en multipliant par m ces congruences et en tenant compte de $3m\equiv 1\ [n]$, on a

$$i\equiv m(2k-l)\ [n] \quad \text{et} \quad j\equiv m(2l-k)\ [n]\ .$$

Réciproquement si i et j vérifient les congruences précédentes, on a

$$2i+j\equiv 3mk\equiv k\ [n] \quad \text{et} \quad i+2j\equiv 3ml\equiv l\ [n]\ .$$

Question V.A.2.a. Si u est premier à n, on peut trouver une relation de Bézout $au+bn=1$ avec a et b entiers. Il en résulte $au\equiv 1\ [n]$. On a donc

$$\begin{aligned}\dot{u}x+\dot{v}=\dot{u}y+\dot{v} &\Rightarrow \dot{u}(x-y)=\dot{0}\\ &\Rightarrow \dot{a}\dot{u}(x-y)=\dot{0}\\ &\Rightarrow (x-y)=\dot{0}\\ &\Rightarrow x=y\ .\end{aligned}$$

Par conséquent l'application $x \to \dot{u}x + \dot{v}$ est injective. Puisque son image et sa source ont même cardinal, c'est donc une bijection.

Question V.A.2.b. Comme 2 et m sont premiers à n, $2m$ l'est aussi. Donc la classe de $\alpha(k,l)$, pour k variant de 1 à n, décrit tout $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Par définition, il en résulte que $\alpha(k,l)$ décrit $[1;n]$. Par conséquent

$$\sum_k \alpha(k,l) = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Question V.A.3. On a $m = 2$ puisque $2 \times 3 = 6 \equiv 1$ [5]. Donc $\alpha(k,l)$ est le représentant entre 1 et 5 de la classe de $4k - 2l$ modulo 5. Et $\beta(k,l)$ est égal à $\alpha(l,k)$. On a donc les tableaux suivants

α

$k\backslash l$	1	2	3	4	5
1	2	5	3	1	4
2	1	4	2	5	3
3	5	3	1	4	2
4	4	2	5	3	1
5	3	1	4	2	5

β

$k\backslash l$	1	2	3	4	5
1	2	1	5	4	3
2	5	4	3	2	1
3	3	2	1	5	4
4	1	5	4	3	2
5	4	3	2	1	5

et donc

$$G = \begin{pmatrix} 7 & 21 & 15 & 4 & 18 \\ 5 & 19 & 8 & 22 & 11 \\ 23 & 12 & 1 & 20 & 9 \\ 16 & 10 & 24 & 13 & 2 \\ 14 & 3 & 17 & 6 & 25 \end{pmatrix} .$$

Question V.A.4.a. Notons que $g_{k,l} - 1 = n(\alpha(k,l) - 1) + (\beta(k,l) - 1)$ et donc l'écriture en base n de $g_{k,l}$ est donnée par cette équation. Il en résulte que $g_{k,l}$ varie dans $[0; n^2 - 1]$ puisque c'est l'ensemble des nombres ayant au plus deux chiffres en base n. Et, par unicité de l'écriture, $g_{k,l} - 1$ est égal à $g_{i,j} - 1$ si et seulement si $\alpha(k,l) = \alpha(i,j)$ et $\beta(k,l) = \beta(i,j)$ et donc si et seulement si $(k,l) = (i,j)$. Par cardinalité, $g_{k,l} - 1$ décrit donc tout $[0; n^2 - 1]$ et donc G vérifie $\mathbf{P}_1$.

Question V.A.4.b. L'argument de $V.A.2.b$ montre que la somme en k ou en l des $\alpha(k,l)$ ou des $\beta(k,l)$ vaut toujours $n(n+1)/2$. La somme des $\alpha(k,l) - 1$ vaut donc $n(n-1)/2$. Il en résulte

$$\sum_k g_{k,l} = \sum_l g_{k,l} = n\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3 + n}{2} = K_n \ .$$

On a $\alpha(k,k) = \beta(k,k)$ est le représentant de mk modulo n qui est compris entre 1 et n. D'après V.A.2.a, la classe de mk décrit tout $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ quand k varie entre 1 et n et donc $\alpha(k,k)$ et $\beta(k,k)$ décrivent tous les deux $[1;n]$ pour k variant dans le même ensemble. On a donc

$$\sum_k g_{k,k} = n\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k = K_n \ .$$

On a $\alpha(k,n+1-k) \equiv 3mk + m(n+1)\ [n]$ et $\beta(k,n+1-k) \equiv -3mk + 2m(n+1)\ [n]$. Toujours d'après V.A.2.a et parce que 3 et m sont premiers à n, ces deux quantités décrivent $[1;n]$ pour k variant dans ce même ensemble et

$$\sum_k g_{k,n+1-k} = K_n\ .$$

Il en résulte que G est une matrice magique d'ordre n.

Question V.A.5.a. Si $\alpha(k,l) = \alpha(k',l')$, on a nécessairement $2k - l \equiv 2k' - l'\ [n]$. Si on prend deux couples dans E_i, il en résulte alors $k \equiv k'\ [n]$ et donc $k = k'$, ainsi que $l \equiv l'\ [n]$ et donc $l = l'$. Comme E_i est de cardinal n (si $k \leq i$, on a $l = n + k - i$ et si $k > i$, on a $l = k - i$), $\alpha(k,l)$ décrit $[1;n]$ pour (k,l) décrivant E_i.

De même $\beta(k,l)$ décrit $[1;n]$ pour (k,l) décrivant E_i. Par conséquent on a encore

$$\sum_{(k,l)\in E_i} g_{k,l} = n\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = K_n\ .$$

Question V.A.5.b. On prend pour F_i l'ensemble des couples (k,l) de $[1;n]^2$ tels que $k + l \equiv i\ [n]$. Et alors, si $2k - l \equiv 2k' - l'\ [n]$ avec $k + l \equiv k' + l'\ [n]$, on a $3k \equiv 3k'\ [n]$ et donc $k = k'$. Les mêmes arguments que précédemment fournissent

$$\sum_{(k,l)\in F_i} g_{k,l} = n\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = K_n\ .$$

Remarque : E_n fournit la diagonale principale et F_1 l'autre diagonale.

Question V.B.1. La matrice D peut donc s'écrire par blocs

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c} A+27 & A+18 & A+63 \\ \hline A+72 & A+36 & A \\ \hline A+9 & A+54 & A+45 \end{array}\right)$$

et donc

$$D = \begin{pmatrix} 31 & 30 & 35 & 22 & 21 & 26 & 67 & 66 & 71 \\ 36 & 32 & 28 & 27 & 23 & 19 & 72 & 68 & 64 \\ 29 & 34 & 33 & 20 & 25 & 24 & 65 & 70 & 69 \\ 76 & 75 & 80 & 40 & 39 & 44 & 4 & 3 & 8 \\ 81 & 77 & 73 & 45 & 41 & 37 & 9 & 5 & 1 \\ 74 & 79 & 78 & 38 & 43 & 42 & 2 & 7 & 6 \\ 13 & 12 & 17 & 58 & 57 & 62 & 49 & 48 & 53 \\ 18 & 14 & 10 & 63 & 59 & 55 & 54 & 50 & 46 \\ 11 & 16 & 15 & 56 & 61 & 60 & 47 & 52 & 51 \end{pmatrix}.$$

Question V.B.2. Supposons que n s'écrive $n = l + p(j-1)$ (cette écriture est unique puisque l est le représentant dans $[1;p]$ de la classe de n modulo p et alors, $n - l$ est divisible par p, et donc $j - 1$ est le reste de la division euclidienne de $(n-l)/p$ par q). On a alors

$$\sum_m d_{mn} = \sum_{k,i} (a_{kl} + (b_{ij} - 1)p^2) = qK_p + p^3(K_q - q) = \frac{pq(p^2+1) + p^3q(q^2-1)}{2} = K_{pq}\ .$$

De même, si m s'écrit $k+p(i-1)$, on a

$$\sum_n d_{mn} = \sum_{l,j} (a_{kl} + (b_{ij} - 1)p^2) = qK_p + p^3(K_q - q) = K_{pq} \ .$$

Pour la diagonale principale on a de suite

$$\sum_n d_{nn} = \sum_{i,k} (a_{kk} + (b_{ii} - 1)p^2) = qK_p + p^3(K_q - q) = K_{pq} \ .$$

Enfin, remarquons que si $n = k + p(i-1)$ alors $pq + 1 - n = (p+1-k) + p(q+1-i-1)$ et donc

$$\sum_n d_{n,pq+1-n} = \sum_{i,k} (a_{k,p+1-k} + (b_{i,q+1-i} - 1)p^2) = qK_p + p^3(K_q - q) = K_{pq} \ .$$

D est donc une matrice magique d'ordre pq.

Question V.B.3. On effectue une récurrence sur l'entier n supérieur ou égal à 3 et impair afin de montrer que l'ensemble des matrices magiques d'ordre n est non vide. Pour $n = 3$, c'est I.2. Si c'est vrai jusqu'à n ($n \geq 3$ impair), alors soit $n+2$ est premier à 3 et cela résulte de V.A.4.b, soit $n+2 = 3q$ avec $1 < q < n$ est un entier naturel impair. On peut alors appliquer V.B.2 avec $p = 3$ et q puisque I.2 et l'hypothèse de récurrence montrent que des matrices magiques d'ordre p et q existent.

François Sauvageot